

PROVA SCRITTA

1. Siano (f_n) una successione in $L^{5/3}$ convergente a f in norma $L^{5/3}$. Sia (g_n) una successione limitata in $L^{5/2}$. Provare che esistono sottosuccessioni (f_{n_j}) di (f_n) e (g_{n_j}) di (g_n) tali che

$$\int f_{n_j} g_{n_j} \rightarrow \int f g$$

2. Siano $E = C^2([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty$ e $F = C([0, 1], \mathbb{R})$ con la norma $\|\cdot\|_\infty$. Verificare che l'operatore

$$A : E \rightarrow F, \quad A(f) = f'' + 2f$$

A è lineare e limitato

3. Sia $T : W_0^1(]0, 1[, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(u) = \int_0^1 |u'|^2 - \int_0^1 u \log(u^2 + 1) dx$$

Provare che T ha minimo. Imponendo l'annullamento del differenziale di Gateau nel punto di minimo, determinare l'equazione soddisfatta da u . Verificare che l'equazione è soddisfatta in senso classico.