PROVA SCRITTA

1. Provare che se f_n tende a f in L^2 e g_n tende a g in L^2, allora

$$\int f_n g_n \to \int fg$$

   Ma in generale da f_n tende a f debolmente in L^2 e g_n tende a g debolmente in L^2, non segue che

$$\int f_n g_n \to \int fg$$

2. Siano $E = C^1([0,1], R)$ con la norma $||f||_\infty + ||f'||_\infty$ e $F = C([0,1], R)$ con la norma $||.||_\infty$ Verificare che l'operatore

$$A : E \to F, \qquad A(f)(x) = f'(x) + \int_0^x f(t)dt$$

   A e' lineare e limitato.

3. Sia $T : W_0^1(]0,1[, R) \to R$

$$T(u) = \int_0^1 |u'|^2 + \int_0^1 (u^4 - u^3)dx$$

   Provare che T ha minimo. Imponendo l'annullamento del differenziale di Gateau nel punto di minimo, determinare l'equazione soddisfatta da u. Verificare che l'equazione e' soddisfatta in senso classico.