Appunti su argomenti monografici per il corso di FM1

Prof. Pierluigi Contucci

Gravità e Teorema di Gauss

Vogliamo dimostrare, a partire dalla legge di gravitazione universale che il campo gravitazionale generato da una massa sferica omogenea è identico a quello che si avrebbe se tutta la massa fosse concentrata nel centro. A tale scopo dimostreremo il teorema di Gauss (in una sua versione elementare). Definiamo anzitutto in $\mathbb{R}^2$ il concetto di segmento orientato $\mathbf{l} = l\mathbf{n}$ dove $\mathbf{n}$ è il vettore normale (uno dei due) al segmento e l è la misura della lunghezza del segmento. Si definisce flusso di un vettore $\mathbf{v}$ attraverso il segmento orientato $\mathbf{l}$ la quantità

$$\Delta\phi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{l} \; . \tag{1}$$

Una proprietà importante del flusso è la linearità rispetto alla somma di vettori: il flusso di una somma di vettori è uguale alla somma dei flussi (lo si dimostri per esercizio utilizzando la distributività del prodotto scalare rispetto alle somme).

Consideriamo ora il campo di vettori (campo di Gauss in $\mathbb{R}^2$) definito da

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^2} \tag{2}$$

e calcoliamo il suo flusso attraverso il generico segmento orientato

$$\Delta\phi = \frac{l}{r^2}\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \; . \tag{3}$$

Definito φ l'angolo tra il versore normale e il raggio si ha per il teorema sul prodotto scalare

$$\Delta\phi = \frac{l\cos\varphi}{r} \tag{4}$$

Notiamo che la grandezza $l\cos\varphi$ coincide con la lunghezza della proiezione del segmento sulla tangente al cerchio di raggio r. Quando inoltre l è molto piccolo ($l << r$) essa coincide con l'arco l' e pertanto per definizione di *angolo* orientato $\Delta\alpha$

$$\Delta\phi = \frac{l\cos\varphi}{r} = \frac{l'}{r} = \Delta\alpha\ . \tag{5}$$

$\Delta\alpha$ rappresenta cioè l'angolo (*orientato*) sotto cui il segmento orientato è visto dall'origine degli assi. Se ora vogliamo calcolare il flusso del vettore indicato attraverso una curva chiusa (con normale esterna) e senza autointersezioni $\mathcal{C}$ che abbraccia l'origine degli assi sommeremo su tutti gli infinitesimi segmenti orientati in cui la curva (liscia) può essere approssimata

$$\Phi_{\mathcal{C}} = \sum_i \Delta\phi_i = \sum_i \Delta\alpha_i = 2\pi \tag{6}$$

se invece la curva non abbraccia l'origine degli assi allora

$$\Phi_{\mathcal{C}} = \sum_i \Delta\phi_i = \sum_i \Delta\alpha_i = 0\ . \tag{7}$$

Procediamo ora in modo del tutto simile in $\mathbb{R}^3$. In questo caso definiamo superficie (piatta) orientata la quantià $\mathbf{S} = S\mathbf{n}$ dove $\mathbf{n}$ è il vettore normale (uno dei due) alla superficie e S è la sua misura. In tre dimensioni il campo di vettori che consideriamo è

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{8}$$

e il calcolo del flusso porge

$$\Delta\phi = \frac{1}{r^3}\mathbf{r}\cdot\mathbf{S}\ . \tag{9}$$

Come in due dimensioni si ottiene

$$\Delta\phi = \frac{S\cos\varphi}{r^2} \tag{10}$$

Notiamo che quando la superficie è contenuta dentro un quadrato molto piccolo ($S << r^2$) la grandezza $S\cos\varphi$ coincide con la misura della sua proiezione sulla sfera S' e pertanto per definizione di *angolo solido orientato*

$$\Delta\phi = \frac{S\cos\varphi}{r^2} = \frac{S'}{r^2} = \Delta\Omega \tag{11}$$

Se ora vogliamo calcolare il flusso del vettore indicato attraverso una superficie chiusa (con normale esterna) e senza autointersezioni $\mathcal{S}$ che racchiude l'origine degli assi sommeremo su tutte le infinitesime superfici orientate in cui la superficie (liscia) può essere approssimata

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \sum_i \Delta\phi_i = \sum_i \Delta\Omega_i = 4\pi \tag{12}$$

se invece essa non racchiude l'origine degli assi allora

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \sum_i \Delta\phi_i = \sum_i \Delta\Omega_i = 0\ . \tag{13}$$

Possiamo ora passare alla dimostrazione che il campo gravitazionale di una sfera omogenea coincide con quello che sarebbe generato se tutta la massa fosse concentrata nel suo centro. A tale scopo osserviamo che la legge di gravitazione universale si esprime come un campo

$$\mathbf{g} = -G\frac{m}{r^3}\mathbf{r}\ . \tag{14}$$

Il flusso del campo gravitazionale attraverso una superficie chiusa S che contiene una massa puntiforme m risulta pertanto essere

$$\Phi_{\mathcal{S}} = -4\pi G m\ , \tag{15}$$

Se invece di una sola massa puntiforme ce ne sono molte il flusso totale sarà dato dalla somma dei flussi (per la linearità del flusso) che risulta essere $-4\pi GM$ dove M indica la massa totale interna alla superficie.

Consideriamo ora una massa M distribuita in modo omogeneo in una sfera e calcoliamone, senza fare uso del risultato sopra dimostrato il flusso attraverso una superficie sferica concentrica alla sfera data ed esterna ad essa. Per ragioni di simmetria avremo che

$$\mathbf{g} = g(r)\mathbf{r} \tag{16}$$

e il suo flusso attraverso la superficie sferica data sarà, dalla definizione stessa di flusso,

$$\Phi_{\mathcal{S}} = \sum_i \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{S}_i = g(r) \sum_i S_i = g(r) 4\pi r^3 \ , \tag{17}$$

dove si è usato che $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = r$ Dal risultato (15) otteniamo quindi

$$\mathbf{g} = -G\frac{M}{r^3}\mathbf{r} \ , \tag{18}$$

c.v.d.

Esercizi

1. Mostrare che il campo gravitazionale all'interno di una sfera omogena è proporzionale alla distanza dal centro.

2. Mostrare che il campo gravitazionale generato da una distribuzione rettilinea di massa di densità costante descresce come l'inverso della distanza dalla retta massiva.

3. Mostrare che il campo gravitazionale generato da una distribuzione piana di massa di densità omogena non dipende dalla distanza dal piano massivo.

4. Mostrare che il campo gravitazionale all'interno di una superficie sferica massiva omogenea è nullo.

5. Mostrare nel caso in $\mathbb{R}^2$ che se la curva fa un certo numero k di giri intorno all'origine il lavore del flusso è $2k\pi$. Analogamente mostrare che nel caso di $\mathbb{R}^3$ una superficie chiusa che si avvolge k volte intorno all'origine ha un flusso pari a $4k\pi$.