

ESERCIZI SULLE CATENE DI MARKOV

Docente titolare: Irene Crimaldi

18/11/2009

ESERCIZIO 1

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2}, \quad \mu(2) = \frac{1}{4}, \quad \mu(3) = \frac{1}{4}.$$

- Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 3)$.
- Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,2}^{(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,3}^{(n)}$$

- Calcolare la previsione di X_1 .

ESERCIZIO 2

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2}, \mu(2) = \frac{1}{2}, \mu(3) = 0, \mu(4) = 0.$$

- Calcolare $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 4)$ e $P(X_5 = 1 | X_3 = 2)$.

- b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
 c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 1).$$

- d) Calcolare la previsione e la varianza di X_1

ESERCIZIO 3

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{3}{4}, \mu(2) = \frac{1}{4}, \mu(3) = 0, \mu(4) = 0.$$

- a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
 b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

- c) Calcolare la covarianza fra X_0 e X_1 .

ESERCIZIO 4

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = 0, \mu(2) = \frac{1}{2}, \mu(3) = 0, \mu(4) = \frac{1}{2}.$$

- a) Calcolare $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 2)$, $P(X_5 = 4|X_3 = 2)$ e $P(X_1 = 3)$.
 b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
 c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 1).$$

ESERCIZIO 5

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2} \quad \mu(2) = \frac{1}{8} \quad \mu(3) = \frac{3}{8}.$$

- a) Calcolare $\mathbf{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_4 = 1)$ e $\mathbf{P}(X_2 = 3|X_0 = 1)$.
 b) Calcolare $\mathbf{cov}(X_0, X_1)$.
 c) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
 d) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,3}^{(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,2}^{(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{3,1}^{(n)}.$$

ESERCIZIO 6

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2}, \mu(2) = 0, \mu(3) = \frac{1}{2}, \mu(4) = \mu(5) = 0.$$

- a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
 b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{1,5}^{(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{3,5}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 5).$$

- c) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 \leq 2)$.

ESERCIZIO 7

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{3}, \mu(2) = \mu(3) = 0, \mu(4) = \mu(5) = \frac{1}{3}.$$

- a) Calcolare $\mathbf{P}(X_0 = 5, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 5, X_4 = 2)$, $P(X_4 = 5 | X_3 = 1)$ e $\mathbf{P}(X_2 = 4 | X_0 = 1)$.
 b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati e i loro periodi.
 c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{5,4}^{(n)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

ESERCIZIO 8

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{2}{3}, \mu(2) = \frac{1}{3}, \mu(3) = 0, \mu(4) = \mu(5) = \mu(6) = 0.$$

- a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{3,5}^{(2n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{4,5}^{(2n)}.$$

- c) Calcolare $P(X_5 = 2 | X_3 = 1)$ e la previsione di X_1 .

ESERCIZIO 9

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = \mu(4) = \frac{1}{4}.$$

- a) Calcolare $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 1)$ e $P(X_5 = 2 | X_3 = 4, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)$.
- b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(2n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(2n+1)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

- d) Calcolare la previsione di X_1 .

ESERCIZIO 10

Una catena di Markov $(X_n)_{n \geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{2}{3}, \mu(2) = \frac{1}{3}, \mu(3) = 0, \mu(4) = \mu(5) = \mu(6) = 0.$$

- a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
- b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(2n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

- c) Calcolare la varianza di X_1 .

ESERCIZIO 11 (*Difficile!*)

Si consideri un sistema a coda con un singolo sportello e con un numero massimo di clienti pari ad M . Ciò significa che un nuovo cliente viene accettato se i clienti presenti nel sistema sono meno di M , altrimenti viene respinto. Per ogni unità di tempo, sia $\alpha \in (0, 1)$ la probabilità di arrivo di un nuovo cliente e $\beta \in (0, 1)$ la probabilità che lo sportello termini di servire un cliente (ossia la probabilità di uscita di un cliente). Si assuma che l'arrivo di un nuovo cliente e l'uscita di un cliente siano eventi indipendenti. Si assuma inoltre che, in ogni unità di tempo, ci possa essere al più una sola entrata e/o una sola uscita e che uno stesso cliente non possa entrare, essere servito e uscire dal sistema.

- a) Costruire una catena di Markov che rappresenti il numero dei clienti presenti nel sistema al trascorrere del tempo e analizzarla.
- b) Determinare la probabilità a regime che il sistema sia saturo.

ESERCIZIO 12

Una stampante può trovarsi in due stati differenti: occupata dalla stampa di un documento oppure libera. Per ogni unità di tempo, sia α la probabilità di passare dallo stato "occupata" allo stato "libera" e $(1 - \alpha)$ la probabilità di rimanere nello

stato “occupata”. Sia inoltre β la probabilità di passare dallo stato “libera” allo stato “occupata” e $(1 - \beta)$ la probabilità di rimanere nello stato “libera”.

- Costruire una catena di Markov che rappresenti lo stato della stampante al trascorre del tempo e analizzarla al variare di α e β in $[0, 1]$.
- Assumendo $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, determinare la distribuzione stazionaria.
- Assumendo $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, calcolare la probabilità a regime che la stampante sia occupata.

ESERCIZIO 13

Cinque palline sono ripartite in modo casuale in due urne, A e B. Ad ogni istante, una qualsiasi delle 5 palline viene estratta e spostata dall’urna in cui si trova nell’altra.

- Costruire una catena di Markov che rappresenti il numero di palline presenti nell’urna A al trascorre del tempo e analizzarla.
- Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare i limiti

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,j}^{(2n)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,j}^{(2n+1)}, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} p_{i,j}^{(n)}.$$

ESERCIZIO 14

Volendo studiare l’evoluzione della disoccupazione in una certa categoria sociale, si consideri una catena di Markov a tre stati, 1=“disoccupato di lungo periodo”, 2=“disoccupato di breve periodo” e 3=“impiegato”, con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Calcolare la probabilità a regime che una persona della categoria in esame sia impiegata.

ESERCIZIO 15 (*Domanda b) difficile!*)

Due giocatori, A e B, giocano lanciando ripetutamente una moneta non truccata. Se esce testa il giocatore A vince e riceve 1 euro da B, altrimenti B vince e riceve 1 euro da A. Il gioco termina quando uno dei due giocatori va in rovina, ossia perde tutto il suo capitale iniziale.

- Costruire una catena di Markov che rappresenti il capitale del giocatore A durante il gioco e analizzarla.
- Calcolare, in funzione del valore dei capitali iniziali dei due giocatori, la probabilità che A vinca l’intero gioco, mandando in rovina B.