ESERCIZI SULLE CATENE DI MARKOV

18/11/2009

ESERCIZIO 1

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2}, \quad \mu(2) = \frac{1}{4}, \quad \mu(3) = \frac{1}{4}.$$

a) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 = 3)$.
b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,2}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{1,3}^{(n)}$$

d) Calcolare la previsione di X_1.

ESERCIZIO 2

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2}, \mu(2) = \frac{1}{2}, \mu(3) = 0, \mu(4) = 0.$$

a) Calcolare $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 4)$ e $P(X_5 = 1|X_3 = 2)$.
b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1).$$

d) Calcolare la previsione e la varianza di X_1

ESERCIZIO 3

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{3}{4}, \mu(2) = \frac{1}{4}, \mu(3) = 0, \mu(4) = 0.$$

a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

c) Calcolare la covarianza fra X_0 e X_1.

ESERCIZIO 4

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = 0, \mu(2) = \frac{1}{2}, \mu(3) = 0, \mu(4) = \frac{1}{2}.$$

a) Calcolare $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 2)$, $P(X_5 = 4|X_3 = 2)$ e $P(X_1 = 3)$.

b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 1).$$

ESERCIZIO 5

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & \frac{5}{6} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2} \quad \mu(2) = \frac{1}{8} \quad \mu(3) = \frac{3}{8}.$$

a) Calcolare $\mathbf{P}(X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3, X_4 = 1)$ e $\mathbf{P}(X_2 = 3 | X_0 = 1)$.
b) Calcolare $\mathbf{cov}(X_0, X_1)$.
c) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.
d) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,3}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{2,2}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{3,1}^{(n)}.$$

ESERCIZIO 6

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{2}, \mu(2) = 0, \mu(3) = \frac{1}{2}, \mu(4) = \mu(5) = 0.$$

a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{1,5}^{(n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{3,5}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 5).$$

c) Calcolare $\mathbf{P}(X_2 \leq 2)$.

ESERCIZIO 7

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1,2,3,4,5\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{1}{3}, \mu(2) = \mu(3) = 0, \mu(4) = \mu(5) = \frac{1}{3}.$$

a) Calcolare $\mathbf{P}(X_0 = 5, X_1 = 3, X_2 = 1, X_3 = 5, X_4 = 2)$, $P(X_4 = 5|X_3 = 1)$ e $\mathbf{P}(X_2 = 4|X_0 = 1)$.

b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati e i loro periodi.

c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \lim_{n\to\infty} p_{5,4}^{(n)} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

ESERCIZIO 8

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{2}{3}, \mu(2) = \frac{1}{3}, \mu(3) = 0, \mu(4) = \mu(5) = \mu(6) = 0.$$

a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{3,5}^{(2n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} p_{4,5}^{(2n)}.$$

c) Calcolare $P(X_5 = 2|X_3 = 1)$ e la previsione di X_1.

ESERCIZIO 9

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1,2,3,4\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \mu(2) = \mu(3) = \mu(4) = \frac{1}{4}.$$

a) Calcolare $P(X_0 = 2, X_1 = 3, X_2 = 4, X_3 = 1)$ e $P(X_5 = 2|X_3 = 4, X_2 = 1, X_1 = 2, X_0 = 1)$.

b) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

c) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(2n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(2n+1)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

d) Calcolare la previsione di X_1.

ESERCIZIO 10

Una catena di Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ con insieme degli stati $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ ha matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

e distribuzione iniziale

$$\mu(1) = \frac{2}{3}, \mu(2) = \frac{1}{3}, \mu(3) = 0, \mu(4) = \mu(5) = \mu(6) = 0.$$

a) Dire quali sono le classi di equivalenza fra stati ed i loro periodi.

b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare

$$\lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(2n)}, \quad \lim_{n\to\infty} p_{2,4}^{(n)} \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = 4).$$

c) Calcolare la varianza di X_1.

ESERCIZIO 11 (*Difficile!*)

Si consideri un sistema a coda con un singolo sportello e con un numero massimo di clienti pari ad M. Ciò significa che un nuovo cliente viene accettato se i clienti presenti nel sistema sono meno di M, altrimenti viene respinto. Per ogni unità di tempo, sia $\alpha \in (0,1)$ la probabilità di arrivo di un nuovo cliente e $\beta \in (0,1)$ la probabilità che lo sportello termini di servire un cliente (ossia la probabilità di uscita di un cliente). Si assuma che l'arrivo di un nuovo cliente e l'uscita di un cliente siano eventi indipendenti. Si assuma inoltre che, in ogni unità di tempo, ci possa essere al più una sola entrata e/o una sola uscita e che uno stesso cliente non possa entrare, essere servito e uscire dal sistema.

a) Costruire una catena di Markov che rappresenti il numero dei clienti presenti nel sistema al trascorrere del tempo e analizzarla.

b) Determinare la probabilità a regime che il sistema sia saturo.

ESERCIZIO 12

Una stampante può trovarsi in due stati differenti: occupata dalla stampa di un documento oppure libera. Per ogni unità di tempo, , sia α la probabilità di passare dallo stato "occupata" allo stato "libera" e $(1-\alpha)$ la probabilità di rimanere nello stato "occupata". Sia inoltre β la probabilità di passare dallo stato "libera" allo stato "occupata" e $(1-\beta)$ la probabilità di rimanere nello stato "libera".

a) Costruire una catena di Markov che rappresenti lo stato della stampante al trascorre del tempo e analizzarla al variare di α e β in $[0,1]$.

b) Assumendo $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, determinare la distribuzione stazionaria.

c) Assumendo $0 < \alpha < 1$ e $0 < \beta < 1$, calcolare la probabilità a regime che la stampante sia occupata.

ESERCIZIO 13

Cinque palline sono ripartite in modo casuale in due urne, A e B. Ad ogni istante, una qualsiasi delle 5 palline viene estratta e spostata dall'urna in cui si trova nell'altra.

a) Costruire una catena di Markov che rappresenti il numero di palline presenti nell'urna A al trascorre del tempo e analizzarla.

b) Dire se esistono e, in caso positivo, calcolare i limiti

$$\lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(2n)}, \qquad \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(2n+1)}, \qquad \lim_{n\to+\infty} p_{i,j}^{(n)}.$$

ESERCIZIO 14

Volendo studiare l'evoluzione della disoccupazione in una certa categoria sociale, si consideri una catena di Markov a tre stati, 1="disoccupato di lungo periodo", 2="disoccupato di breve periodo" e 3="impiegato", con matrice di transizione

$$P = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{2} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}.$$

Calcolare la probabilità a regime che una persona della categoria in esame sia impiegata.

ESERCIZIO 15 (*Domanda b) difficile!*)

Due giocatori, A e B, giocano lanciando ripetutamente una moneta non truccata. Se esce testa il giocatore A vince e riceve 1 euro da B, altrimenti B vince e riceve 1 euro da A. Il gioco termina quando uno dei due giocatori va in rovina, ossia perde tutto il suo capitale iniziale.

a) Costruire una catena di Markov che rappresenti il capitale del giocatore A durante il gioco e analizzarla.

b) Calcolare, in funzione del valore dei capitali iniziali dei due giocatori, la probabilità che A vinca l'intero gioco, mandando in rovina B.