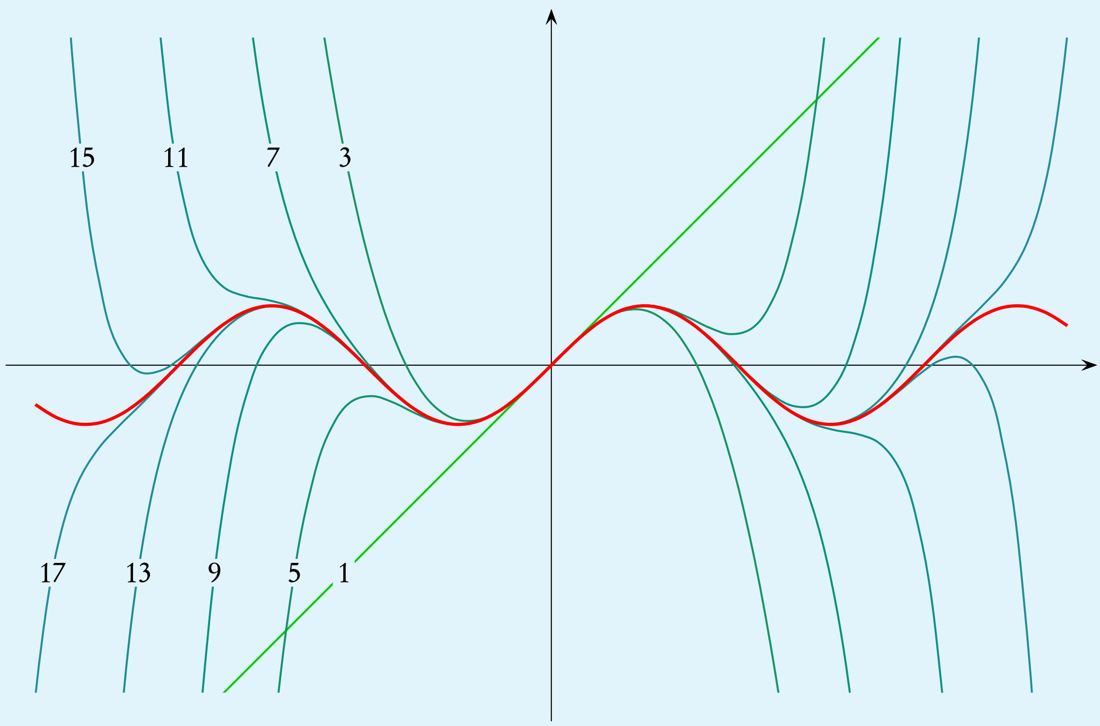
Giovanni Dore

Appunti del corso di

Analisi Matematica 1A

Teoria



Alma Mater Studiorum - Università di Bologna
Corso di Laurea in Matematica
Anno Accademico 2020/2021

In copertina: polinomi di Taylor di punto iniziale 0 della funzione seno.
Il numero riportato su ciascun grafico è il grado del polinomio.

Indice

1
Numeri reali

1.1 Assiomi dei numeri reali

Introduciamo anzitutto il sistema dei numeri reali, che è il fondamento dell'analisi matematica.

Parliamo di "sistema dei numeri reali" e non semplicemente di "insieme dei numeri reali", perché, oltre a un insieme (i cui elementi sono i numeri reali), abbiamo due operazioni e una relazione su di esso.

L'insieme dei numeri reali può essere costruito a partire dall'insieme dei numeri naturali mediante ampliamenti successivi, costruendo l'insieme dei numeri interi, poi quello dei numeri razionali e infine l'insieme dei numeri reali. Tuttavia, per evitare di allungare eccessivamente l'esposizione, non procediamo per allargamenti successivi, ma introduciamo direttamente il sistema dei numeri reali elencandone le proprietà fondamentali, dette, in termini rigorosi, **assiomi**.

Definizione di sistema dei numeri reali

Il **sistema dei numeri reali** è una quadrupla ordinata $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$, dove $\mathbb{R}$ è un insieme avente più di un elemento, $+$ e $\cdot$ sono due operazioni binarie su $\mathbb{R}$, cioè due funzioni da $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, chiamate rispettivamente **addizione** e **moltiplicazione**, $\leq$ è una relazione in $\mathbb{R}$, e sono soddisfatti gli assiomi elencati in seguito.

Gli assiomi possono essere divisi in tre gruppi: gli assiomi riguardanti le due operazioni, gli assiomi sulla relazione e un ulteriore assioma, detto "assioma di completezza".

Gli assiomi relativi alle operazioni stabiliscono le regole per fare i calcoli tra numeri reali; un insieme in cui sono definite due operazioni che verificano questi assiomi è detto **campo**.

Gli assiomi relativi alla relazione garantiscono che essa è di ordine lineare e descrivono il collegamento tra la relazione e le operazioni di addizione e di moltiplicazione; in generale un campo su cui è definita una relazione che soddisfa questi assiomi è detto **campo ordinato**.

Infine l'assioma di completezza assicura la validità delle proprietà dei numeri reali che consentono lo sviluppo dell'analisi, ad esempio l'esistenza della radice quadrata di ogni numero positivo. Tale assioma è quello che distingue il sistema dei numeri reali dal sistema dei numeri razionali. Un campo ordinato che soddisfa l'assioma di completezza è detto **campo ordinato completo**.

1.1.1 Assiomi delle operazioni

Enunciamo anzitutto gli assiomi relativi alle operazioni, elencando dapprima quelli relativi all'addizione (assiomi C1–C4), successivamente quelli relativi alla moltiplicazione (assiomi C5–C8) e infine un assioma che coinvolge sia l'addizione che la moltiplicazione (assioma C9).

Assioma C1: proprietà associativa dell'addizione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x + (y + z) = (x + y) + z \,.$$

Questo assioma assicura che non è necessario distinguere tra $x + (y + z)$ e $(x + y) + z$, quindi si può usare la notazione $x + y + z$ per indicare la somma di tre numeri reali.

Assioma C2: proprietà commutativa dell'addizione

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x + y = y + x \,.$$

Assioma C3: esistenza dell'elemento neutro additivo

$$\exists a \in \mathbb{R} \colon \forall x \in \mathbb{R}, \quad x + a = a + x = x \,.$$

L'elemento la cui esistenza è assicurata da questo assioma è unico, cioè:

1.1.1 Teorema (unicità dell'elemento neutro additivo)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$x + a = a + x = x \,,$$
$$x + b = b + x = x \,,$$

allora $a = b$.

Dimostrazione. Dalla prima ipotesi, ponendo $x = b$, segue $a + b = b$, mentre dalla seconda, ponendo $x = a$, segue $a + b = a$; perciò $a = b$. ■

Poiché questo elemento è unico, introduciamo un simbolo per indicarlo.

Definizione di elemento neutro additivo

Chiamiamo **elemento neutro additivo** il numero reale a la cui esistenza è assicurata dall'assioma C3; lo indichiamo con 0.

Assioma C4: esistenza dell'opposto

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \colon \quad x + y = y + x = 0 \,.$$

Poiché l'addizione è commutativa (assioma C2), se è verificata una delle due uguaglianze $x+y=0$ e $y+x=0$, allora è verificata anche l'altra.

Qualunque sia $x \in \mathbb{R}$, il numero reale y la cui esistenza è assicurata dall'assioma C4 è unico. Si ha cioè:

1.1.2 Teorema (unicità dell'opposto)

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $y, z \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$\begin{aligned} x+y=y+x=0, \\ x+z=z+x=0, \end{aligned}$$

allora $y=z$.

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} y &= y+0 && \text{proprietà di } 0 \text{ (assioma C3)}, \\ &= y+(x+z) && \text{ipotesi}, \\ &= (y+x)+z && \text{proprietà associativa dell'addizione (assioma C1)}, \\ &= 0+z && \text{ipotesi}, \\ &= z && \text{proprietà di } 0 \text{ (assioma C3)}. \end{aligned}$$

Pertanto $y=z$. ■

Definizione di opposto di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **opposto** (o **inverso additivo**) di x l'unico numero reale y che verifica $x+y=y+x=0$; indichiamo tale opposto con $-x$.

Anziché scrivere $x+(-y)$ si usa la notazione $x-y$.

Assioma C5: proprietà associativa della moltiplicazione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

Questo assioma assicura che non è necessario distinguere tra $x \cdot (y \cdot z)$ e $(x \cdot y) \cdot z$, quindi si può usare la notazione $x \cdot y \cdot z$ per indicare il prodotto di tre numeri reali.

Assioma C6: proprietà commutativa della moltiplicazione

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \cdot y = y \cdot x.$$

Assioma C7: esistenza dell'elemento neutro moltiplicativo

$$\exists a \in \mathbb{R} \colon \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \cdot a = a \cdot x = x.$$

L'elemento neutro moltiplicativo è unico, cioè:

1.1.3 Teorema (unicità dell'elemento neutro moltiplicativo)

Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Se, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$x \cdot a = a \cdot x = x,$$
$$x \cdot b = b \cdot x = x,$$

allora $a = b$.

Dimostrazione. Dalla prima ipotesi, ponendo $x = b$, segue $a \cdot b = b$, mentre dalla seconda, ponendo $x = a$, segue $a \cdot b = a$; perciò $a = b$. ■

Poiché questo elemento è unico, introduciamo un simbolo per indicarlo.

Definizione di elemento neutro moltiplicativo

Chiamiamo **elemento neutro moltiplicativo** il numero reale a la cui esistenza è assicurata dall'assioma C7; lo indichiamo con 1.

Assioma C8: esistenza del reciproco

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists y \in \mathbb{R}: \quad x \cdot y = y \cdot x = 1.$$

Poiché la moltiplicazione è commutativa (assioma C6), se è verificata una delle due uguaglianze $x \cdot y = 1$ o $y \cdot x = 1$, allora è verificata anche l'altra.

Qualunque sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, il numero reale y la cui esistenza è assicurata dall'assioma C8 è unico. Si ha cioè:

1.1.4 Teorema (unicità del reciproco)

Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $y, z \in \mathbb{R}$ sono tali che

$$x \cdot y = y \cdot x = 1,$$
$$x \cdot z = z \cdot x = 1,$$

allora $y = z$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}
y &= y \cdot 1 && \text{proprietà di 1 (assioma C7),}\\
&= y \cdot (x \cdot z) && \text{ipotesi,}\\
&= (y \cdot x) \cdot z && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (assioma C5),}\\
&= 1 \cdot z && \text{ipotesi,}\\
&= z && \text{proprietà di 1 (assioma C7).}
\end{aligned}$$

Pertanto $y = z$. ■

Definizione di reciproco di un numero reale non nullo

Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Chiamiamo **reciproco** (o **inverso moltiplicativo**) di x l'unico numero reale y che verifica $x \cdot y = y \cdot x = 1$; indichiamo tale reciproco con x^{-1} o con $1/x$.

Anziché scrivere $x \cdot (1/y)$ si usa la notazione x/y.

Enunciamo ora un assioma che collega addizione e moltiplicazione.

Assioma C9: proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z\,.$$

Nell'enunciato di questo assioma, come sempre in seguito, si adotta la convenzione che, in assenza di parentesi, la moltiplicazione viene eseguito prima dell'addizione, perciò la scrittura $x \cdot y + x \cdot z$ è un'abbreviazione di $(x \cdot y) + (x \cdot z)$.

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione, la proprietà distributiva vale anche nella forma

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z\,.$$

Un insieme in cui sono definite due operazioni che verificano gli assiomi C1–C9 è detto **campo**.

1.1.2 Assiomi della relazione

Riportiamo ora gli assiomi relativi alla relazione; anzitutto quelli che stabiliscono che la relazione è di ordine lineare (assiomi O1–O4), poi gli assiomi che stabiliscono un collegamento tra la relazione e l'addizione (assioma O5) e tra la relazione e la moltiplicazione (assioma O6).

Assioma O1: proprietà riflessiva della relazione

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \le x\,.$$

Assioma O2: proprietà antisimmetrica della relazione

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (x \le y \ \wedge \ y \le x) \implies x = y\,.$$

Assioma O3: proprietà transitiva della relazione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \le y \ \wedge \ y \le z) \implies x \le z\,.$$

Una relazione che verifica questi tre assiomi è detta **relazione d'ordine**.

Assioma O4: linearità della relazione d'ordine

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x \le y \ \vee \ y \le x\,.$$

Una relazione d'ordine che verifica questo assioma è detta **relazione d'ordine lineare** o **relazione d'ordine totale**.

Osserviamo che la proprietà riflessiva della relazione di $\leq$ è una conseguenza dell'assioma di linearità. Infatti se $x, y \in \mathbb{R}$, allora si ha $x \leq y$ oppure $y \leq x$; in particolare se $x \in \mathbb{R}$, posto $y = x$, si ottiene comunque $x \leq x$.

Assioma O5: compatibilità tra relazione e addizione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x \leq y \implies x + z \leq y + z\,.$$

Assioma O6: compatibilità tra relazione e moltiplicazione

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad (x \leq y \wedge 0 \leq z) \implies x \cdot z \leq y \cdot z\,.$$

Un campo in cui è definita una relazione che verifica gli assiomi O1–O6 è detto **campo ordinato**.

1.1.3 Assioma di completezza

Esistono numerosi campi ordinati. Ad esempio, l'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali è un campo ordinato. Per caratterizzare univocamente il sistema dei numeri reali tra i campi ordinati è necessario un ulteriore assioma, che, a differenza degli altri, non riguarda le proprietà fondamentali delle operazioni e della relazione, ma proprietà più raffinate del sistema numerico. Può essere espresso in diverse forme equivalenti tra loro, scegliamo una forma semplice di enunciarlo.

Assioma di completezza

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti. Se

$$\forall a \in A,\, \forall b \in B, \quad a \leq b\,,$$

allora esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall a \in A,\, \forall b \in B, \quad a \leq c \leq b\,.$$

Due insiemi che godono della proprietà che ogni elemento del primo è minore o uguale a ogni elemento del secondo sono detti **insiemi separati**. L'elemento c la cui esistenza è assicurata dall'assioma di completezza è detto **elemento di separazione** tra A e B.

Un campo ordinato che verifica l'assioma di completezza è detto **campo ordinato completo**.

Essenzialmente esiste un unico campo ordinato completo. In linguaggio tecnico questo fatto viene enunciato dicendo che: "due campi ordinati completi sono isomorfi". Questo significa che dati due campi ordinati completi esiste una funzione biunivoca dall'uno all'altro che rispetta le operazioni e la relazione. Tale funzione è detta **isomorfismo di campi ordinati**.

Per essere più precisi, si può dimostrare che se $(\mathbb{H},+_{\mathbb{H}},\cdot_{\mathbb{H}},\leq_{\mathbb{H}})$ e $(\mathbb{K},+_{\mathbb{K}},\cdot_{\mathbb{K}},\leq_{\mathbb{K}})$ sono campi ordinati completi, allora esiste $F\colon \mathbb{H} \to \mathbb{K}$ biunivoca e tale che, $\forall x,y \in \mathbb{H}$, si ha $F(x+_{\mathbb{H}}y)=F(x)+_{\mathbb{K}}F(y)$, $F(x\cdot_{\mathbb{H}}y)=F(x)\cdot_{\mathbb{K}}F(y)$ e $x\leq_{\mathbb{H}}y$ se e solo se $F(x)\leq_{\mathbb{K}}F(y)$.

1.2 Prime conseguenze degli assiomi

Studiamo ora alcune conseguenze quasi immediate degli assiomi. Elenchiamo per prime le conseguenze dei soli assiomi delle operazioni, cioè le proprietà di addizione e moltiplicazione, passiamo poi alle proprietà della relazione di $\leq$, ricavate dagli assiomi delle operazioni e da quelli della relazione, infine vediamo le conseguenze della completezza.

Quando non vi possono essere equivoci il prodotto $x\cdot y$ viene indicato con xy. Inoltre scriviamo $x<y$ per indicare che si ha $x\leq y$ e $x\neq y$, mentre $x\geq y$ equivale a $y\leq x$ e $x>y$ equivale a $y<x$.

Definizione di numero non negativo, non positivo, positivo, negativo

Sia $x\in\mathbb{R}$.
Diciamo che x è **non negativo** quando $x\geq 0$.
Diciamo che x è **non positivo** quando $x\leq 0$.
Diciamo che x è **positivo** quando $x>0$.
Diciamo che x è **negativo** quando $x<0$.

Ogni numero positivo è anche non negativo, mentre ogni numero negativo è anche non positivo; 0 è sia non positivo che non negativo.

Utilizziamo le seguenti notazioni per indicare alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{R}^+=\{x\in\mathbb{R}\mid x>0\},\qquad \mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R}\mid x<0\},\qquad \mathbb{R}^*=\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

1.2.1 Conseguenze degli assiomi delle operazioni

Dagli assiomi di campo deduciamo le proprietà fondamentali delle operazioni di addizione e di moltiplicazione.

1.2.1 Teorema (legge di cancellazione per l'addizione)

Siano $x,y,z\in\mathbb{R}$. Allora
$$x+z=y+z \implies x=y.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} x+z=y+z &\implies (x+z)-z=(y+z)-z && \text{esistenza dell'opposto (assioma C4),}\\ &\implies x+(z-z)=y+(z-z) && \text{proprietà associativa dell'addizione (assioma C1),}\\ &\implies x+0=y+0 && \text{esistenza dell'opposto (assioma C4),}\\ &\implies x=y && \text{proprietà di } 0 \text{ (assioma C3).} \end{aligned}$$
■

In modo del tutto analogo si dimostra il teorema seguente.

1.2.2 Teorema (legge di cancellazione per la moltiplicazione)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}^*$. Allora

$$x \cdot z = y \cdot z \implies x = y\,.$$

Notiamo che per poter cancellare un fattore moltiplicativo in una uguaglianza bisogna che esso sia diverso da 0. Questo perché la cancellazione richiede di moltiplicare entrambi i membri dell'uguaglianza per il reciproco del numero da cancellare, quindi non si può cancellare 0 che non ha reciproco.

1.2.3 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} 0 + x \cdot 0 &= x \cdot 0 && \text{proprietà di } 0 \text{ (assioma C3)},\\ &= x \cdot (0 + 0) && \text{proprietà di } 0 \text{ (assioma C3)},\\ &= x \cdot 0 + x \cdot 0 && \text{proprietà distributiva (assioma C9)}. \end{aligned}$$

Dall'uguaglianza $0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 + x \cdot 0$, per la legge di cancellazione per l'addizione 1.2.1, segue $0 = x \cdot 0$.

Per la proprietà commutativa della moltiplicazione (assioma C6) si ha anche $0 \cdot x = 0$. ■

1.2.4 Teorema

$$0 \neq 1\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per assurdo. Se fosse $0 = 1$ allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, sarebbe $x \cdot 0 = x \cdot 1$. Per il teorema 1.2.3 si ha $x \cdot 0 = 0$, per le proprietà di 1 (assioma C7) si ha $x \cdot 1 = x$; quindi $x = 0$. Perciò ogni elemento di $\mathbb{R}$ è uguale a 0; ciò è assurdo perché $\mathbb{R}$ ha più di un elemento. ■

Dagli ultimi due teoremi segue che, moltiplicando 0 per un qualunque numero reale, non si può ottenere 1; questo è il motivo per cui nell'assioma C8 si richiede l'esistenza del reciproco solo per i numeri reali non nulli.

1.2.5 Teorema (legge di annullamento del prodotto)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x \cdot y = 0 \iff (x = 0 \lor y = 0)\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo $x \cdot y = 0$. Dimostriamo che se $x \neq 0$, allora $y = 0$, quindi almeno uno dei due fattori è nullo. Infatti, se $x \neq 0$, allora

$$
\begin{aligned}
y &= 1 \cdot y && \text{esistenza di 1 (assioma C7),}\\
&= (x^{-1} \cdot x) \cdot y && \text{esistenza del reciproco (assioma C8),}\\
&= x^{-1} \cdot (x \cdot y) && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (assioma C5),}\\
&= x^{-1} \cdot 0 && \text{ipotesi,}\\
&= 0 && \text{teorema 1.2.3.}
\end{aligned}
$$

Viceversa, se almeno uno tra x e y è nullo, allora, per il teorema 1.2.3, si ha $x \cdot y = 0$. ■

Conseguenza immediata di questo teorema è il seguente:

1.2.6 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$.

$$x \cdot y \neq 0 \iff (x \neq 0 \wedge y \neq 0).$$

Studiamo le proprietà dell'opposto e del reciproco di numeri reali.

1.2.7 Teorema (opposto di zero)

$$-0 = 0.$$

DIMOSTRAZIONE. La proprietà di 0 (assioma C3) assicura che $0 + 0 = 0$, quindi 0 è l'opposto di 0. ■

1.2.8 Teorema (reciproco di uno)

$$1^{-1} = 1.$$

DIMOSTRAZIONE. La proprietà di 1 (assioma C7) assicura che $1 \cdot 1 = 1$, quindi 1 è il reciproco di 1. ■

1.2.9 Teorema (opposto dell'opposto)

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$-(-x) = x.$$

DIMOSTRAZIONE. Per la definizione di opposto $x + (-x) = 0$, quindi l'opposto di $-x$ è x. ■

1.2.10 Teorema (reciproco del reciproco)

Sia $x \in \mathbb{R}^*$. Allora $x^{-1} \neq 0$ e

$$\left(x^{-1}\right)^{-1} = x.$$

Dimostrazione. Poiché $x \cdot x^{-1} = 1 \neq 0$, per il teorema 1.2.6 $x^{-1} \neq 0$.

Per la definizione di reciproco $x \cdot x^{-1} = 1$, quindi il reciproco di x^{-1} è x. ■

Da ora in avanti, per evitare di appesantire troppo le dimostrazioni, applichiamo le proprietà associativa e commutativa di addizione e moltiplicazione senza menzionarle.

1.2.11 Teorema (opposto della somma)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$-(x+y) = -x - y\,.$$

Dimostrazione. Si ha
$$(-x-y)+(x+y) = (-x+x)+(-y+y) = 0+0 = 0;$$
pertanto l'opposto di $x+y$ è $-x-y$. ■

1.2.12 Teorema (reciproco del prodotto)

Siano $x, y \in \mathbb{R}^*$. Allora $x \cdot y \neq 0$ e
$$(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}\,.$$

Dimostrazione. Siano $x, y \in \mathbb{R}^*$. Per il teorema 1.2.6, si ha $x \cdot y \neq 0$ e
$$(x^{-1} \cdot y^{-1}) \cdot (x \cdot y) = (x^{-1} \cdot x) \cdot (y^{-1} \cdot y) = 1 \cdot 1 = 1;$$
pertanto $x^{-1} \cdot y^{-1}$ è il reciproco di $x \cdot y$. ■

Studiamo ora il prodotto di un numero reale per l'opposto di 1.

1.2.13 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora
$$(-1) \cdot x = x \cdot (-1) = -x\,.$$

Dimostrazione. Si ha
$$\begin{aligned}
x + (-1) \cdot x &= 1 \cdot x + (-1) \cdot x && \text{proprietà di 1 (assioma C7),}\\
&= (1-1) \cdot x && \text{proprietà distributiva (assioma C9),}\\
&= 0 \cdot x && \text{proprietà dell'opposto (assioma C4),}\\
&= 0 && \text{teorema 1.2.3.}
\end{aligned}$$

Pertanto $(-1) \cdot x$ è l'opposto di x. ■

Da questo teorema segue:

1.2.14 Teorema

Siano $x,y \in \mathbb{R}$. Allora

$$(-x)\cdot y = x\cdot(-y) = -(x\cdot y),$$
$$(-x)\cdot(-y) = x\cdot y\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}
(-x)\cdot y &= \big((-1)\cdot x\big)\cdot y && \text{teorema 1.2.13,}\\
&= (-1)\cdot(x\cdot y) && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (assioma C5),}\\
&= -(x\cdot y) && \text{teorema 1.2.13.}
\end{aligned}$$

In modo analogo si ottiene $x\cdot(-y) = -(x\cdot y)$.

Si ha

$$\begin{aligned}
(-x)\cdot(-y) &= (-x)\cdot\big((-1)\cdot y\big) && \text{teorema 1.2.13,}\\
&= \big((-1)\cdot(-x)\big)\cdot y && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (assioma C5) e proprietà commutativa della moltiplicazione (assioma C6),}\\
&= \big(-(-x)\big)\cdot y && \text{teorema 1.2.13,}\\
&= x\cdot y && \text{teorema 1.2.9.}
\end{aligned}$$

■

Questo teorema consente di utilizzare la notazione $-x\cdot y$ senza ambiguità: essa indica indifferentemente l'opposto di $x\cdot y$ oppure $-x$ moltiplicato per y.

1.2.2 Conseguenze degli assiomi della relazione

Dagli assiomi della relazione d'ordine deduciamo le regole fondamentali per manipolare le disuguaglianze.

1.2.15 Teorema

Siano $x,y \in \mathbb{R}$. Allora

$$x \le y \iff 0 \le y - x\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}
x \le y &\implies x - x \le y - x && \text{compatibilità tra relazione e addizione (assioma O5),}\\
&\implies 0 \le y - x && \text{proprietà dell'opposto (assioma C4).}
\end{aligned}$$

Viceversa

$$\begin{aligned}
0 \le y - x &\implies 0 + x \le y - x + x && \text{compatibilità tra relazione e addizione (assioma O5),}\\
&\implies x \le y - x + x && \text{proprietà di } 0 \text{ (assioma C3),}\\
&\implies x \le y && \text{proprietà dell'opposto (assioma C4).}
\end{aligned}$$

■

Da questo teorema segue:

1.2.16 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$x \leq y \iff -y \leq -x\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.2.15 si ha $x \leq y \iff 0 \leq y - x$. Per il teorema 1.2.9 si ha
$$y - x = -(-y) + (-x) = (-x) - (-y)\,,$$
pertanto, applicando nuovamente il teorema 1.2.15, risulta
$$x \leq y \iff 0 \leq (-x) - (-y) \iff -y \leq -x\,.$$
■

In particolare, ponendo $y = 0$, da questo teorema segue:

1.2.17 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$x \leq 0 \iff -x \geq 0\,.$$

L'assioma di compatibilità tra relazione e addizione (assioma O5) assicura che sommando lo stesso numero reale a entrambi i membri di una disuguaglianza questa si conserva. Vediamo ora una generalizzazione di questo fatto.

1.2.18 Teorema

Siano $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Allora
$$(x \leq y \,\wedge\, z \leq w) \implies x + z \leq y + w\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$(x \leq y \,\wedge\, z \leq w) \implies (x + z \leq y + z \,\wedge\, y + z \leq y + w)$	compatibilità tra relazione e addizione (assioma O5),
$\implies x + z \leq y + w$	proprietà transitiva della relazione (assioma O3). ■

Da questo teorema segue immediatamente:

1.2.19 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$(x \geq 0 \,\wedge\, y \geq 0) \implies x + y \geq 0\,.$$

Vediamo ora le proprietà delle disuguaglianze che coinvolgono il prodotto di due numeri reali.

1.2.20 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora
$$x \cdot x \geq 0.$$

Dimostrazione. Distinguiamo secondo che sia $x \geq 0$ o $x \leq 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
x \geq 0 &\implies x \cdot x \geq 0 \cdot x && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),}\\
&\implies x \cdot x \geq 0 && \text{teorema 1.2.3;}\\
x \leq 0 &\implies -x \geq 0 && \text{teorema 1.2.17,}\\
&\implies (-x)\cdot(-x) \geq 0 \cdot (-x) && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),}\\
&\implies x \cdot x \geq 0 && \text{teoremi 1.2.14 e 1.2.3.}
\end{aligned}$$

Quindi, in ogni caso, $x \cdot x \geq 0$. ∎

Da questo teorema segue:

1.2.21 Teorema

$$1 > 0.$$

Dimostrazione. Poiché $1 = 1 \cdot 1$, il teorema precedente assicura che $1 \geq 0$; per il teorema 1.2.4 $1 \neq 0$, quindi $1 > 0$. ∎

Dagli ultimi due teoremi segue che non esiste un numero reale x tale che $x \cdot x = -1$, perché il primo membro è non negativo e il secondo è negativo.

1.2.22 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora
$$x > 0 \iff x^{-1} > 0.$$

Dimostrazione. Sia $x > 0$. Si ha

$$\begin{aligned}
x^{-1} &= x^{-1} \cdot 1 && \text{proprietà di 1 (assioma C7),}\\
&= x^{-1} \cdot \left(x^{-1} \cdot x\right) && \text{esistenza del reciproco (assioma C8),}\\
&= \left(x^{-1} \cdot x^{-1}\right) \cdot x && \text{proprietà associativa della moltiplicazione (assioma C5).}
\end{aligned}$$

Per il teorema 1.2.20 $x^{-1} \cdot x^{-1} \geq 0$, mentre $x > 0$ per ipotesi, pertanto, per la compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6), risulta $\left(x^{-1} \cdot x^{-1}\right) \cdot x \geq 0$, quindi $x^{-1} \geq 0$; per il teorema 1.2.10 $x^{-1} \neq 0$, quindi si ha $x^{-1} > 0$.

Viceversa sia $x^{-1} > 0$. Poiché, per il teorema 1.2.10, $x = \left(x^{-1}\right)^{-1}$, x è reciproco di un numero positivo, quindi, per ciò che si è appena dimostrato, è positivo. ∎

1.2.23 Teorema

Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$. Allora

$$(x \leq y \ \land \ z \leq 0) \implies x \cdot z \geq y \cdot z\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$(x \leq y \ \land \ z \leq 0)$	$\implies (x \leq y \ \land \ -z \geq 0)$	teorema 1.2.17,
	$\implies x \cdot (-z) \leq y \cdot (-z)$	compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),
	$\implies -x \cdot z \leq -y \cdot z$	teorema 1.2.14,
	$\implies x \cdot z \geq y \cdot z$	teorema 1.2.16. ■

1.2.24 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora

$$0 < x \leq y \implies y^{-1} \leq x^{-1}\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Sia $0 < x \leq y$. Per il teorema 1.2.22 risulta $x^{-1} > 0$ e $y^{-1} > 0$. Si ha

$x \cdot x^{-1} \leq y \cdot x^{-1}$,	compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),
$y^{-1} \cdot x \cdot x^{-1} \leq y^{-1} \cdot y \cdot x^{-1}$,	compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),
$y^{-1} \cdot 1 \leq 1 \cdot x^{-1}$,	proprietà del reciproco (assioma C8),
$y^{-1} \leq x^{-1}$,	proprietà di 1 (assioma C7). ■

1.2.25 Teorema

Siano $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. Allora

$$(0 \leq x \leq y \ \land \ 0 \leq z \leq w) \implies x \cdot z \leq y \cdot w\,.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$(0 \leq x \leq y \ \land \ 0 \leq z \leq w)$	$\implies (x \cdot z \leq y \cdot z \ \land \ y \cdot z \leq y \cdot w)$	compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),
	$\implies x \cdot z \leq y \cdot w$	proprietà transitiva della relazione (assioma O3). ■

Studiamo il segno (cioè la positività o negatività) del prodotto di due numeri reali. Per la compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6) il prodotto di due numeri non negativi è non negativo. Vediamo gli altri casi.

1.2.26 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$(x \leq 0 \wedge y \leq 0) \implies x \cdot y \geq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}
(x \leq 0 \wedge y \leq 0) &\implies (-x \geq 0 \wedge -y \geq 0) && \text{teorema 1.2.17,}\\
&\implies (-x)\cdot(-y) \geq 0 && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),}\\
&\implies x \cdot y \geq 0 && \text{teorema 1.2.14.}
\end{aligned}$$
■

1.2.27 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora
$$(x \leq 0 \wedge y \geq 0) \implies x \cdot y \leq 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si ha

$$\begin{aligned}
(x \leq 0 \wedge y \geq 0) &\implies (-x \geq 0 \wedge y \geq 0) && \text{teorema 1.2.17,}\\
&\implies (-x)\cdot y \geq 0 && \text{compatibilità tra relazione e moltiplicazione (assioma O6),}\\
&\implies -x \cdot y \geq 0 && \text{teorema 1.2.14,}\\
&\implies x \cdot y \leq 0 && \text{teorema 1.2.17.}
\end{aligned}$$
■

1.2.3 La funzione valore assoluto

Prima di studiare le conseguenze dell'assioma di completezza definiamo e studiamo la funzione valore assoluto, che risulterà utile in seguito.

Definizione di valore assoluto di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **valore assoluto** di x e indichiamo con $|x|$ il numero reale
$$|x| = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \geq 0\,,\\ -x\,, & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

Abbiamo così definito una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, che è detta **funzione valore assoluto**.

1.2.28 Osservazione. È abituale rappresentare i numeri reali come punti di una retta. Ciò significa che si costruisce una funzione biunivoca da $\mathbb{R}$ ad una retta, pensata come insieme di punti. Non entriamo nel dettaglio della costruzione di questa funzione, ricordiamo solo che è determinata una volta che sulla retta sono scelti un'origine, un segmento di lunghezza unitaria e un verso positivo. Parleremo quindi indifferentemente di numeri reali e di punti.

Questa rappresentazione consente di dare alla funzione valore assoluto il seguente significato geometrico. Sia che x sia positivo, sia che esso sia negativo, $|x|$ è la lunghezza del

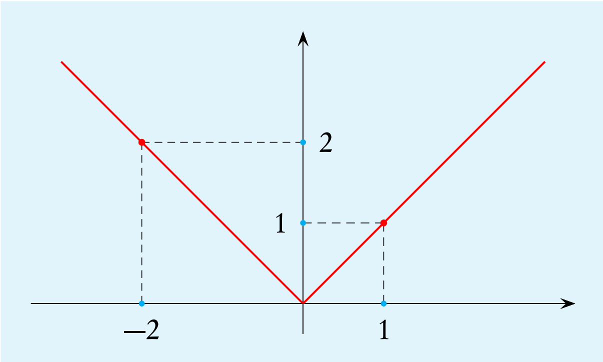


Figura 1.2.1
Grafico della funzione valore assoluto.

segmento di estremi 0 e x, cioè è la distanza di x dall'origine. Più in generale, se $x, y \in \mathbb{R}$, allora la lunghezza del segmento di estremi x e y è $x - y$ se $x \geq y$, mentre è $y - x$ in caso contrario. In ogni caso la lunghezza di tale segmento, cioè la distanza di x da y, è $|x-y|$. ◀

Da questa definizione si ottiene facilmente il teorema seguente:

1.2.29 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora:

I) $|x| \geq 0$;

II) $|x| = 0 \iff x = 0$;

III) $|x|^2 = x^2$;

IV) $-|x| \leq x \leq |x|$.

Per studiare le proprietà del valore assoluto risulta utile il seguente teorema.

1.2.30 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, tali che $x, y \geq 0$. Allora:

I) $x^2 = y^2 \iff x = y$;

II) $x^2 \leq y^2 \iff x \leq y$;

III) $x^2 < y^2 \iff x < y$.

Dimostrazione. I) Se $x = y$, ovviamente $x^2 = y^2$.

Viceversa, se $x^2 = y^2$, allora si ha $0 = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. Per la legge di annullamento del prodotto 1.2.5, si ha $x - y = 0$ oppure $x + y = 0$. Nel primo caso risulta $x = y$. Nel secondo caso si ha $x = -y \leq 0$, quindi risulta sia $x \geq 0$ che $x \leq 0$, pertanto, per la proprietà antisimmetrica della relazione (assioma O2), $x = 0$; perciò è anche $y = -x = 0$. Pertanto, anche in questo caso, $x = y$.

II) Si ha $x^2 \leq y^2$ se e solo se $y^2 - x^2 \geq 0$, cioè $(y - x)(y + x) \geq 0$.

Supponiamo $(y-x)(y+x) \geq 0$. Si ha $x + y \geq 0$, quindi se $y + x > 0$ per il teorema 1.2.22 si ha $(y + x)^{-1} > 0$, pertanto

$$y - x = \big((y - x)(y + x)\big)(y + x)^{-1} \geq 0$$

quindi $x \leq y$. Se invece $y + x = 0$, abbiamo visto, nella dimostrazione dell'affermazione I, che si ha $x = y = 0$ e quindi $x \leq y$.

Viceversa, se $x \leq y$, allora $y - x \geq 0$; poiché $x + y \geq 0$, risulta $(y-x)(y+x) \geq 0$.

III) Sia $x^2 < y^2$; se fosse $x \geq y$, allora, per l'affermazione II, sarebbe $x^2 \geq y^2$, contrariamente all'ipotesi. Pertanto, $x < y$.

Viceversa, sia $x < y$; se fosse $x^2 \geq y^2$, allora, per l'affermazione II, sarebbe $x \geq y$, contrariamente all'ipotesi. Pertanto, $x^2 < y^2$. ■

1.2.31 Teorema (proprietà del valore assoluto)

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Allora:

I) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$;

II) $|x| \geq y \iff (x \geq y \lor x \leq -y)$;

III) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

IV) $|x + y| \leq |x| + |y|$;

V) $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y|$.

Dimostrazione. I) Se $|x| \leq y$, per il teorema 1.2.29, affermazione IV, risulta $x \leq |x| \leq y$ e $x \geq -|x| \geq -y$.

Viceversa se $-y \leq x \leq y$, allora si ha $-x \leq y$; poiché $|x| = x$, oppure $|x| = -x$ in ogni caso risulta $|x| \leq y$.

II) Sia $|x| \geq y$. Poiché $|x| = x$ oppure $|x| = -x$, si ha $x \geq y$ oppure $-x \geq y$; quindi $x \geq y$ oppure $x \leq -y$.

Viceversa, sia $x \geq y$ oppure $x \leq -y$. Per il teorema 1.2.29, affermazione IV, nel primo caso risulta $|x| \geq x \geq y$, nel secondo $-|x| \leq x \leq -y$; in ognuno dei casi si ha $|x| \geq y$.

III) I due membri dell'uguaglianza sono non negativi, pertanto, per il teorema 1.2.30, affermazione I, essa è verificata se e solo se si ha uguaglianza tra i quadrati. Per il teorema 1.2.29, affermazione III si ha

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2|y|^2 = \big(|x||y|\big)^2.$$

IV) I due membri della disuguaglianza sono non negativi, pertanto, per il teorema 1.2.30, affermazione II, è verificata se e solo se vale la disuguaglianza tra i quadrati. Per il teorema 1.2.29, affermazioni III e IV, e per l'affermazione III di questo teorema si ha

$$|x+y|^2 = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \leq |x|^2 + 2|xy| + y^2 = |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = \big(|x| + |y|\big)^2.$$

V) I due membri della disuguaglianza sono non negativi, pertanto, per il teorema 1.2.30, affermazione II, è verificata se e solo se vale la disuguaglianza tra i quadrati. Per il teorema 1.2.29, affermazioni III e IV, e per l'affermazione III di questo teorema si ha

$$\begin{aligned}\big||x| - |y|\big|^2 &= \big(|x| - |y|\big)^2 = |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 = |x|^2 - 2|xy| + |y|^2 \leq x^2 - 2xy + y^2 = \\ &= (x-y)^2 = |x-y|^2.\end{aligned}$$

■

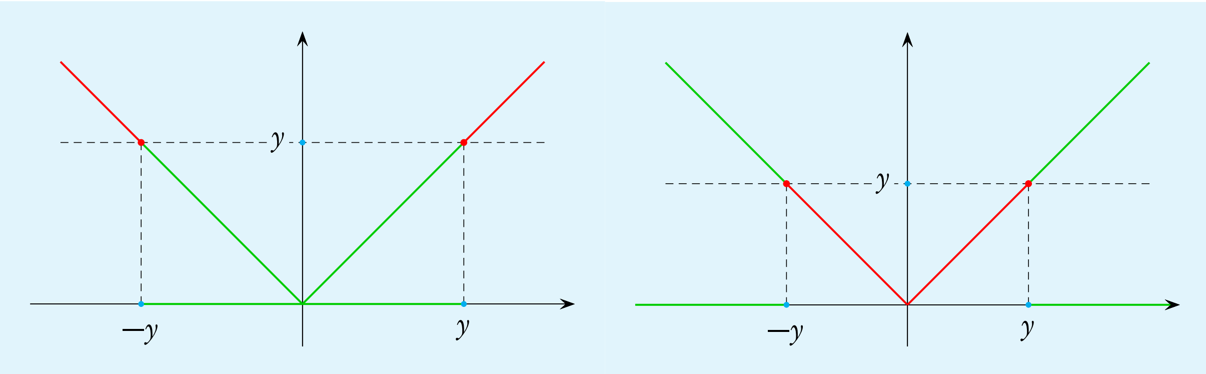


Figura 1.2.2
Prova geometrica delle affermazioni I (a sinistra) e II (a destra) del teorema 1.2.31.
Per determinare i numeri reali x tali che $|x| \leq y$ consideriamo i punti del grafico della funzione valore assoluto al di sotto della retta orizzontale individuata dall'ordinata y e li proiettiamo sull'asse delle ascisse, ottenendo il segmento di estremi $-y$ e y.
Per determinare i numeri reali x tali che $|x| \geq y$ consideriamo i punti del grafico della funzione valore assoluto al di sopra della retta orizzontale individuata dall'ordinata y e li proiettiamo sull'asse delle ascisse, ottenendo la semiretta orientata negativamente di origine $-y$ e la semiretta orientata positivamente di origine y.

La IV è detta **disuguaglianza triangolare**. Il nome deriva dall'interpretazione geometrica del valore assoluto (v. osservazione 1.2.28). Infatti, se $x, y \in \mathbb{R}$, allora $|x+y|$ è la distanza del punto x dal punto $-y$, $|x|$ è la distanza del punto x dall'origine e $|y|$ è la distanza del punto $-y$ dall'origine. Pertanto la disuguaglianza $|x+y| \leq |x|+|y|$ esprime il fatto che la distanza tra i due punti x e $-y$ di una retta non può essere maggiore della somma delle distanze dei due punti da un terzo punto (l'origine). Nel piano a questa disuguaglianza corrisponde il fatto che la lunghezza di un lato di un triangolo non può essere maggiore della somma delle lunghezze degli altri due.

1.2.4 Estremi di insiemi di numeri reali

Nel seguito è sottinteso che tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ considerati sono non vuoti.

Definizione di massimo e minimo di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $b, c \in \mathbb{R}$.
Diciamo che b è **massimo** di A quando $b \in A$ e, $\forall a \in A$, si ha $a \leq b$.
Diciamo che c è **minimo** di A quando $c \in A$ e, $\forall a \in A$, si ha $a \geq c$.

1.2.32 Teorema (unicità del massimo e del minimo)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $b_1, b_2, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

I) Se b_1 e b_2 sono massimo di A allora $b_1 = b_2$.

II) Se c_1 e c_2 sono minimo di A allora $c_1 = c_2$.

DIMOSTRAZIONE. I) Se b_1 e b_2 sono massimo di A, allora, per la definizione di massimo, $b_1, b_2 \in A$. Inoltre $\forall a \in A$ si ha $a \leq b_1$, in particolare, ponendo $a = b_2$ si ha $b_2 \leq b_1$. Ripetendo il ragionamento con b_1 e b_2 scambiati tra loro si ottiene anche $b_1 \leq b_2$. Perciò $b_1 = b_2$.
II) La dimostrazione è analoga. ■

Il massimo di un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, se esiste, è indicato con $\max A$, il minimo è indicato con $\min A$.

1.2.33 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se esistono $\min A$ e $\max A$ allora

$$\min A \leq \max A.$$

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di massimo $\max A \in A$ e $\min A$ è minore o uguale a ogni elemento di A, in particolare $\min A \leq \max A$. ■

1.2.34 Esempio. Siano

$$A_1 = \{-1\}, \qquad A_2 = \{0, 2, 3, 4\}, \qquad A_3 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\},$$
$$A_4 = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}, \quad A_5 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}, \quad A_6 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}.$$

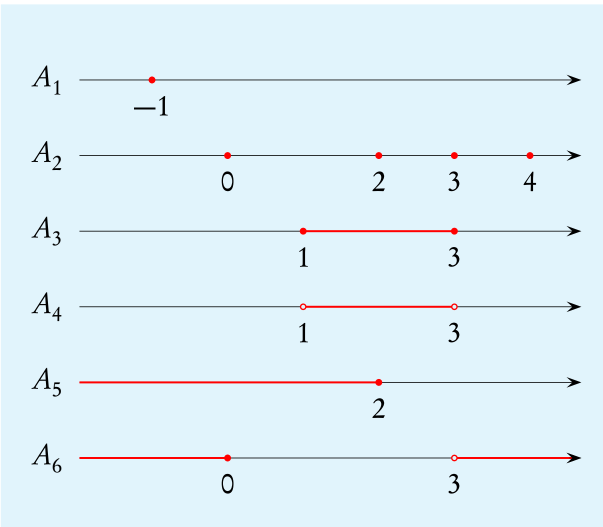


Figura 1.2.3
Gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34

Si verifica facilmente che $\min A_1 = \max A_1 = -1$, $\min A_2 = 0$, $\max A_2 = 4$, $\min A_3 = 1$, $\max A_3 = 3$.

L'insieme A_4 non ha minimo. Infatti sia $a \in A_4$ e indichiamo con b il punto medio tra a e 1, cioè $b = (a+1)/2$. Evidentemente da $1 < a$ segue $2 < a+1 < 2a$, quindi $1 < b < a$; poiché $a < 3$ è anche $b < 3$, quindi $b \in A_4$. Perciò b è un elemento di A_4 minore di a, quindi a non è minimo di A_4. Abbiamo così provato che nessun elemento di A_4 è il minimo dell'insieme. In modo analogo, considerando $c = (a+3)/2$, si prova che ciascun elemento a di A_4 non è massimo. Pertanto A_4 non ha né massimo né minimo.

Si ha $\max A_5 = 2$, mentre A_5 non ha minimo. Infatti, qualunque sia $a \in A_5$, $a - 1$ è un elemento di A_5 minore di a, quindi a non è il minimo di A_5.

L'insieme A_6 non ha né massimo né minimo. Infatti se $a \in A_6$ allora o $a \leq 0$, quindi $4 > a$ e $4 \in A_6$, oppure $a > 3$, quindi $a+1 \in A_6$ e $a+1 > a$. In ogni caso, esiste un elemento di A_6 maggiore di a. In modo analogo si dimostra che A_6 non ha minimo. ◀

È evidente da questi esempi che un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ può non avere massimo, o non avere minimo, o non avere né massimo né minimo.

1.2.35 Osservazione. Se $A \subseteq \mathbb{R}$ ha un numero finito di elementi, allora esistono massimo e minimo di A.

Questo fatto è evidente; una dimostrazione rigorosa richiede l'utilizzo del principio di induzione che studieremo nella sottosezione 1.3.1. ◀

Gli insiemi A_4 e A_6 dell'esempio 1.2.34 non hanno né massimo né minimo, ma c'è una differenza tra le due situazioni. Non esistono numeri reali maggiori o uguali a ogni elemento di A_6, mentre esistono numeri reali, ad esempio 4, maggiori o uguali a ogni elemento di A_4.

Per distinguere queste due situazioni diamo le seguenti definizioni.

Definizione di maggiorante e minorante di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.
Diciamo che x è un **maggiorante** di A quando $\forall a \in A$ si ha $a \leq x$.
Diciamo che x è un **minorante** di A quando $\forall a \in A$ si ha $a \geq x$.

1.2.36 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34.

Qualunque numero maggiore o uguale a -1 è maggiorante per A_1; qualunque numero minore o uguale a -1 è minorante per A_1.

I maggioranti di A_2 sono tutti e soli i numeri maggiori o uguale a 4, mentre i minoranti sono tutti e soli i numeri minori o uguali a 0.

I maggioranti di A_3 sono tutti e soli i numeri maggiori o uguale a 3, mentre i minoranti sono tutti e soli i numeri minori o uguali a 1. Lo stesso vale per A_4.

L'insieme A_5 non ha minoranti. Infatti se $x \in \mathbb{R}$ è tale che $x > 2$, allora evidentemente non è un minorante, mentre se $x \leq 2$, allora $x-1$ è un elemento di A_5 minore di x. I maggioranti di A_5 sono tutti e soli i numeri maggiori o uguali a 2.

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per dimostrare che A_5 non ha minoranti, si dimostra che A_6 non ha né maggioranti né minoranti. ◀

Definizione di insieme limitato superiormente, limitato inferiormente, limitato

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Diciamo che A è **superiormente limitato** quando l'insieme dei maggioranti di A è non vuoto, in caso contrario diciamo che A è **superiormente illimitato**.
Diciamo che A è **inferiormente limitato** quando l'insieme dei minoranti di A è non vuoto, in caso contrario diciamo che A è **inferiormente illimitato**.
Diciamo che A è **limitato** quando A è sia superiormente limitato che inferiormente limitato, in caso contrario diciamo che A è **illimitato**.

1.2.37 Osservazione. Talvolta risulta utile l'osservazione che un insieme A è limitato se e solo se $\{|a| \mid a \in A\}$ è superiormente limitato.

Infatti, se esiste x maggiorante di $\{|a| \mid a \in A\}$, allora, $\forall a \in A$, si ha $|a| \leq x$, quindi, per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione I, risulta $-x \leq a \leq x$; perciò $-x$ è un minorante e x è un maggiorante di A.

Viceversa, se esistono x minorante e y maggiorante di A, allora, $\forall a \in A$ si ha $a \leq y$ e $-a \leq -x$; poiché o $|a| = a$, oppure $|a| = -a$, risulta $|a| \leq \max\{-x, y\}$. Quindi $\max\{-x, y\}$ è un maggiorante di $\{|a| \mid a \in A\}$. ◀

1.2.38 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34.

Nell'esempio 1.2.36 abbiamo determinato i maggioranti e i minoranti di tali insiemi. Da questo segue che gli insiemi A_1, A_2, A_3 e A_4 sono superiormente limitati e inferiormente limitati, quindi sono limitati. L'insieme A_5 è superiormente limitato e inferiormente illimitato, mentre A_6 è superiormente e inferiormente illimitato; quindi A_5 e A_6 sono illimitati. ◀

Dalle definizioni si ottiene immediatamente il seguente teorema.

1.2.39 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$.
Si ha $x = \max A$ se e solo se $x \in A$ e x è maggiorante di A.
Si ha $x = \min A$ se e solo se $x \in A$ e x è minorante di A.

Definizione di estremo superiore e estremo inferiore di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Se A è superiormente limitato chiamiamo **estremo superiore** di A il minimo dell'insieme dei maggioranti.
Se A è inferiormente limitato chiamiamo **estremo inferiore** di A il massimo dell'insieme dei minoranti.

L'esempio 1.2.34 mostra che vi sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ privi di minimo, quindi non è garantito che un insieme superiormente limitato abbia estremo superiore; tuttavia, per la completezza di $\mathbb{R}$, l'insieme dei maggioranti di ogni insieme superiormente limitato ha minimo. Analogamente l'insieme dei minoranti di ogni insieme inferiormente limitato ha massimo.

Vale cioè il seguente teorema.

1.2.40 Teorema (esistenza dell'estremo superiore)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se A è superiormente limitato, allora l'insieme dei maggioranti di A ha minimo.

DIMOSTRAZIONE. Indichiamo con B l'insieme dei maggioranti di A.

Per la definizione di maggiorante, qualunque siano $x \in A$ e $y \in B$ risulta $x \leq y$. Perciò, per l'assioma di completezza, esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che $\forall x \in A$, $x \leq c$ e $\forall y \in B$, $y \geq c$. La prima disuguaglianza significa che c è un maggiorante di A, la seconda che c è minore o uguale a ogni maggiorante di A, pertanto c è il minimo dell'insieme dei maggioranti. ■

Un teorema analogo vale per l'estremo inferiore.

Per il teorema appena dimostrato, l'estremo superiore di un insieme superiormente limitato esiste sempre; esso è unico perché è unico il minimo di qualunque insieme. Tale estremo superiore è indicato con $\sup A$.

Nel caso che A sia superiormente illimitato si pone inoltre $\sup A = +\infty$.

In modo del tutto analogo l'estremo inferiore di un insieme A inferiormente limitato si indica con $\inf A$, mentre se A è inferiormente illimitato si pone $\inf A = -\infty$.

1.2.41 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati negll'esempio 1.2.34.

Nell'esempio 1.2.36 abbiamo determinato maggioranti e minoranti di tali insiemi. Se ne deduce facilmente che $\inf A_1 = \sup A_1 = -1$, $\inf A_2 = 0$, $\sup A_2 = 4$, $\inf A_3 = \inf A_4 = 1$, $\sup A_3 = \sup A_4 = 3$, $\sup A_5 = 2$. Poiché A_5 è inferiormente illimitato si ha $\inf A_5 = -\infty$; poiché A_6 è inferiormente e superiormente illimitato risulta $\inf A_6 = -\infty$ e $\sup A_6 = +\infty$. ◀

1.2.42 Teorema (caratterizzazione dell'estremo superiore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ superiormente limitato e $a \in \mathbb{R}$. Il numero a è estremo superiore di A se e solo se sono verificate le condizioni:

a) $\forall x \in A$, $x \leq a$,

b) $\forall y \in \mathbb{R}$ tale che $y < a$, esiste $z \in A$ tale che $z > y$.

Dimostrazione. Si ha $a = \sup A$ se e solo se a è un maggiorante di A e a è minore o uguale a ogni maggiorante.

La condizione che a sia un maggiorante è la a).

Il numero a è minore o uguale a ogni maggiorante se e solo se ogni $y \in \mathbb{R}$ tale che $y < a$ non è maggiorante, cioè esiste $z \in A$ tale che $z > y$. Quindi la condizione che a è minore o uguale a ogni maggiorante è equivalente alla (b). ■

Il teorema seguente è l'analogo per l'estremo inferiore.

1.2.43 Teorema (caratterizzazione dell'estremo inferiore)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato e $a \in \mathbb{R}$. Il numero a è estremo inferiore di A se e solo se sono verificate le condizioni:

a) $\forall x \in A$, $x \geq a$,

b) $\forall y \in \mathbb{R}$ tale che $y > a$, esiste $z \in A$ tale che $z < y$.

Il seguente teorema stabilisce la relazione tra massimo ed estremo superiore di un insieme.

1.2.44 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

I) Se A ha massimo allora è superiormente limitato e $\max A = \sup A$.

II) Se A è superiormente limitato e $\sup A \in A$ allora ha massimo e $\max A = \sup A$.

Dimostrazione. I) Se esiste $\max A$, allora esso è maggiorante di A, che quindi è superiormente limitato; inoltre $\max A$ è un elemento di A, per cui è minore o uguale a ogni maggiorante, perciò è è l'estremo superiore.

II) Se A è superiormente limitato e $\sup A \in A$, allora $\sup A$ è un maggiorante di A che appartiene ad A, per il teorema 1.2.39 esso è il massimo di A. ■

Un teorema analogo lega minimo ed estremo inferiore.

1.2.45 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato. Allora:

$$\inf A \leq \sup A.$$

Dimostrazione. Sia $x \in A$. Poiché $\inf A$ è un minorante di A e $\sup A$ è un maggiorante di A, si ha $\inf A \leq x \leq \sup A$. ■

1.3 Numeri naturali, interi, razionali

Studiamo ora i sistemi dei numeri naturali, dei numeri interi e dei numeri razionali; tali sistemi numerici sono introdotti come sottoinsiemi dell'insieme dei numeri reali, le operazioni e la relazione d'ordine su di essi sono ereditate da quelle sui numeri reali.

1.3.1 Numeri naturali

Introduciamo l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali come sottoinsieme di $\mathbb{R}$. L'idea di base per introdurre il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ costituito dai numeri naturali è che tale insieme è individuato dalle seguenti proprietà:

1. $0 \in \mathbb{N}$;
2. se $n \in \mathbb{N}$, allora $n+1 \in \mathbb{N}$;
3. un numero reale appartiene a $\mathbb{N}$ solo se si ottiene a partire da 0 applicando la regola 2.

Per tradurre in termini rigorosi questa idea consideriamo il più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ per cui valgono le proprietà 1. e 2. Questo ci porta a dare le seguenti definizioni.

Definizione di insieme induttivo

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è un **insieme induttivo** quando A verifica:

a) $0 \in A$,

b) $\forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Longrightarrow x+1 \in A$.

1.3.1 Esempio. Si verifica facilmente che sono insiemi induttivi $\mathbb{R}$, $\{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ e $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$.

Non è invece induttivo l'insieme $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{-2\}$, perché $-2 \in A$, ma $-2+1=-1 \notin A$; quindi non è verificata la condizione b) della definizione. ◀

Definizione di insieme dei numeri naturali

Chiamiamo **insieme dei numeri naturali** e indichiamo con $\mathbb{N}$ l'intersezione di tutti gli insiemi induttivi di numeri reali.

Analogamente a quanto fatto per l'insieme dei reali, indichiamo con $\mathbb{N}^*$ l'insieme $\mathbb{N}\setminus\{0\}$.

1.3.2 Teorema

Sia $A\subseteq\mathbb{R}$. Se A è induttivo allora $\mathbb{N}\subseteq A$.

DIMOSTRAZIONE. L'intersezione di una famiglia di insiemi è inclusa in ciascuno degli insiemi che si intersecano, quindi $\mathbb{N}$, intersezione di tutti gli insiemi induttivi, è incluso in ogni insieme induttivo. ■

1.3.3 Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ è induttivo.

DIMOSTRAZIONE. Il numero 0 appartiene a ogni insieme induttivo, quindi appartiene all'intersezione di tutti gli insiemi induttivi, cioè a $\mathbb{N}$.

Se $x\in\mathbb{N}$ allora, qualunque sia $A\subseteq\mathbb{R}$ induttivo, si ha $x\in A$, quindi $x+1\in A$; pertanto $x+1$ appartiene a ogni insieme induttivo, cioè $x+1\in\mathbb{N}$.

Pertanto $\mathbb{N}$ soddisfa entrambe le condizioni della definizione di insieme induttivo. ■

Il fatto che $\mathbb{N}$ è intersezione di tutti gli insiemi induttivi viene utilizzato per dimostrare affermazioni sui numeri naturali tramite il teorema che segue:

1.3.4 Teorema (principio di induzione)

Per ogni $n\in\mathbb{N}$ sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione. Se sono verificate le condizioni:

a) $\mathscr{P}(0)$ è vera,

b) $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathscr{P}(n)\implies\mathscr{P}(n+1)$,

allora $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall n\in\mathbb{N}$.

DIMOSTRAZIONE. Posto $A=\{n\in\mathbb{N}\mid\mathscr{P}(n)\text{ è vera}\}$, dobbiamo dimostrare che $A=\mathbb{N}$. Per la definizione di A, si ha $A\subseteq\mathbb{N}$, quindi resta da dimostrare che $\mathbb{N}\subseteq A$; poiché ogni insieme induttivo contiene $\mathbb{N}$ (teorema 1.3.2), è sufficiente dimostrare che A è induttivo.

Anzitutto dalla condizione a) segue $0\in A$. Inoltre se $n\in A$ allora $\mathscr{P}(n)$ è vera, per b) anche $\mathscr{P}(n+1)$ è vera, perciò $n+1\in A$. Questo prova che A è induttivo.

Il teorema è così provato. ■

Il principio di induzione giustifica anche le cosiddette **definizioni per induzione**. Ciò consiste nel definire un concetto che dipende da $n\in\mathbb{N}$, definendolo anzitutto per $n=0$ e dando la definizione per $n+1$ sulla base della definizione data per n. Il principio di induzione assicura che con questo procedimento il concetto è definito $\forall n\in\mathbb{N}$.

In questo modo possiamo dare una definizione rigorosa di potenza di un numero reale. L'idea intuitiva è che se $n \in \mathbb{N}^*$ e $x \in \mathbb{R}^*$, allora la potenza n-sima di x, indicata con x^n, è il prodotto di n fattori uguali a x. Pensando che il prodotto di 0 fattori sia l'elemento neutro moltiplicativo, cioè 1, risulta naturale la seguente definizione per induzione.

Definizione di potenza di un numero reale

Siano $x \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{N}$. Definiamo x^n ponendo:

a) $x^0 = 1$,

b) $x^{n+1} = x \cdot x^n$.

Poniamo inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0^n = 0$.
Chiamiamo **potenza n-esima** di x il numero reale x^n.

Un'altra utile definizione che è naturale dare per induzione è quella di prodotto dei primi n numeri naturali non nulli, che è chiamato fattoriale di n.

Definizione di fattoriale

Sia $n \in \mathbb{N}$. Chiamiamo **fattoriale** di n il numero naturale $n!$ definito ponendo:

a) $0! = 1$,

b) $(n+1)! = (n+1)\,n!$.

Risulta quindi $0! = 0$, $1! = 1 \cdot 0! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 = 6$, $4! = 4 \cdot 6 = 24$.

1.3.5 Esempio (disuguaglianza di Bernoulli[1]). Proviamo per induzione che $\forall x \in \mathbb{R}$ tale che $x > -1$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Fissato $x > -1$, la proposizione che vogliamo provare, $\forall n \in \mathbb{N}$, è

$$\mathscr{P}(n): \qquad (1+x)^n \geq 1 + nx\,.$$

Per $n = 0$ la disuguaglianza è $(1+x)^0 \geq 1 + 0 \cdot x$, cioè $1 \geq 1$ che è vera.
Supponiamo ora vera $\mathscr{P}(n)$ e dimostriamo $\mathscr{P}(n+1)$. Si ha

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n\,,$$

poiché $1 + x > 0$, da $\mathscr{P}(n)$ otteniamo

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + x^2 \geq 1 + (n+1)x\,,$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzato il fatto che $x^2 \geq 0$. Pertanto $(1+x)^{n+1} \geq 1 + (n+1)x$, cioè vale $\mathscr{P}(n+1)$.
Per il principio di induzione 1.3.4 la disuguaglianza vale $\forall n \in \mathbb{N}$. ◀

[1]La disuguaglianza prende il nome da Jakob Bernoulli (Basilea, 1655 Äì Basilea, 1705) che la dimostrò e la utilizzò più volte in un trattato del 1689. Bernoulli diede importanti contributi al calcolo differenziale e alla teoria della probabilità.
La formula era già stata trovata nel 1668 da René François Walter de Sluze (Visé, Belgio, 1622 - Liège, Belgio, 1685), fu tra i primi studiosi del calcolo differenziale.

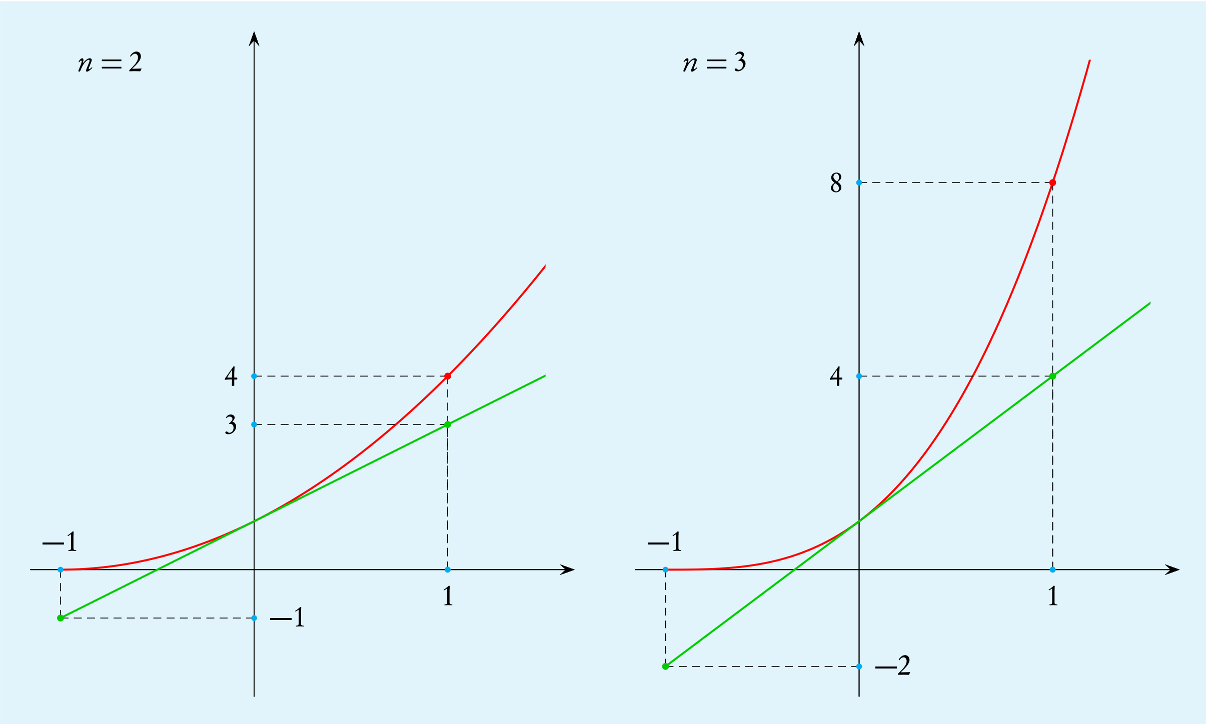


Figura 1.3.1
Grafici delle funzioni $x \mapsto 1+nx$ (in verde) e $x \mapsto (1+x)^n$ (in rosso) per $n=2$ (a sinistra) e $n=3$ (a destra). Per la disuguaglianza di Bernoulli, se $x>-1$, la prima delle due funzioni in x ha valore minore o uguale a quello dalla seconda nello stesso punto.

Studiamo la struttura dell'insieme $\mathbb{N}$. Anzitutto determiniamone gli estremi.

1.3.6 Teorema

$$\min \mathbb{N} = 0.$$

Dimostrazione. Poiché $0 \in \mathbb{N}$, per dimostrare che $0 = \min A$ è sufficiente provare che ogni elemento di $\mathbb{N}$ è maggiore o uguale a 0; ciò significa che, posto $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$, occcorre provare che $\mathbb{N} \subseteq A$. Per il teorema 1.3.2 ciò è vero se A è induttivo.

Si ha $0 \geq 0$, quindi $0 \in A$; se $x \in A$ allora $x+1 > x \geq 0$, pertanto anche $x+1 \in A$. Pertanto A è induttivo. ■

1.3.7 Teorema

$$\sup \mathbb{N} = +\infty.$$

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo che $\mathbb{N}$ sia superiormente limitato.

Poniamo $M = \sup \mathbb{N}$. Se $n \in \mathbb{N}$, allora $n+1 \in \mathbb{N}$, perciò $n+1 \leq M$; pertanto, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $n \leq M-1$, quindi $M-1$ è maggiorante di $\mathbb{N}$. Ma allora M non è il più piccolo dei maggioranti di $\mathbb{N}$ e ciò è assurdo. ■

Dall'idea intuitiva di insieme dei numeri naturali, sappiamo che tra un numero naturale n e $n+1$ non vi sono altri numeri naturali. Dimostriamo rigorosamente questo fatto.

1.3.8 Teorema

Sia $n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$. Allora $n-1\in\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Dobbiamo dimostrare che si ha $\mathbb{N}^*\subseteq\{n\in\mathbb{N}^*\mid n-1\in\mathbb{N}\}$, che equivale a $\mathbb{N}\subseteq\{0\}\cup\{n\in\mathbb{N}^*\mid n-1\in\mathbb{N}\}$. Per il teorema 1.3.2, posto

$$A=\{0\}\cup\{n\in\mathbb{N}^*\mid n-1\in\mathbb{N}\},$$

è sufficiente dimostrare che A è induttivo.

Evidentemente $0\in A$.

Sia $n\in A$. Allora $n\in\mathbb{N}$, quindi, per il teorema 1.3.6, $n\geq 0$, pertanto $n+1\geq 1$, quindi $n+1\in\mathbb{N}^*$; inoltre $(n+1)-1=n\in\mathbb{N}$. Pertanto $n+1\in A$. ■

Una conseguenza di questo teorema è il seguente.

1.3.9 Teorema

$$\min\bigl(\mathbb{N}\setminus\{0\}\bigr)=1.$$

Dimostrazione. Per il teorema 1.3.8 se $n\in\mathbb{N}^*$, allora $n-1\in\mathbb{N}$, pertanto, per il teorema 1.3.6, $n-1\geq 0$, cioè $n\geq 1$. Pertanto 1 è il più piccolo elemento di $\mathbb{N}^*$. ■

Generalizziamo il teorema 1.3.8, considerando la differenza di due numeri naturali.

1.3.10 Teorema

Siano $m,n\in\mathbb{N}$. Se $m\leq n$ allora $n-m\in\mathbb{N}$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema per induzione su n, cioè consideriamo l'affermazione

$$\mathscr{P}(n):\qquad \forall m\in\mathbb{N},\quad m\leq n\implies n-m\in\mathbb{N}.$$

Se $n=0$ e $m\in\mathbb{N}$, $m\leq n$, allora $m=0$, quindi $n-m=0\in\mathbb{N}$. Pertanto $\mathscr{P}(0)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$ e sia $m\in\mathbb{N}$, tale che $m\leq n+1$. Se $m=0$, allora si ha $(n+1)-m=n+1\in\mathbb{N}$. Se $m\neq 0$, allora, per il teorema 1.3.8, risulta $m-1\in\mathbb{N}$ e $m-1\leq(n+1)-1=n$, quindi, per ipotesi induttiva, $n-(m-1)\in\mathbb{N}$, cioè $(n+1)-m\in\mathbb{N}$. Pertanto $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

Per il principio di induzione 1.3.4 $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall n\in\mathbb{N}$. ■

1.3.11 Teorema

Siano $m,n\in\mathbb{N}$. Se $m\neq n$, allora $|n-m|\geq 1$.

Dimostrazione. Se $m<n$, allora si ha $|n-m|=n-m$, se invece $n>m$, allora si ha $|n-m|=m-n$. In ogni caso, per il teorema 1.3.10, $|n-m|\in\mathbb{N}$. Poiché è $m\neq n$ si ha anche $|n-m|\in\mathbb{N}^*$, quindi, per il teorema 1.3.9, $|n-m|\geq 1$. ■

Questo teorema consente di ottenere informazioni sull'esistenza di minimo e massimo per sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.

1.3.12 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Allora:

I) A ha minimo;

II) se A è superiormente limitato allora ha massimo.

Dimostrazione. I) Per il teorema 1.3.6 $\mathbb{N}$ è limitato inferiormente, quindi anche A è limitato inferiormente. Per l'analogo del teorema 1.2.44 per il minimo, è sufficiente dimostrare che $\inf A \in A$.

Posto $m = \inf A$, dimostriamo per assurdo che $m \in A$. Supponiamo quindi che sia $m \notin A$. Per la caratterizzazione dell'estremo inferiore 1.2.42 esiste $z \in A$ tale che $z < m+1$; poiché abbiamo supposto $m \notin A$, si ha $z \neq m$, perciò $m < z$. Ancora per il teorema 1.2.42, esiste $w \in A$ tale che $m \leq w < z$. Pertanto $0 < z - w < (m+1) - m = 1$. Per il teorema 1.3.10 $w - z \in \mathbb{N}$, ma ciò è assurdo, perché per il teorema 1.3.9 non esistono numeri naturali compresi tra 0 e 1.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Le operazioni di addizione e moltiplicazione tra numeri naturali danno come risultato un numero naturale. Si ha cioè:

1.3.13 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{N}$. Allora:

I) $m + n \in \mathbb{N}$,

II) $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione. I) Fissato $m \in \mathbb{N}$, dimostriamo l'affermazione applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: $m + n \in \mathbb{N}$.

Poiché $m + 0 = m$, $\mathscr{P}(0)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Allora $m + (n+1) = (m+n) + 1$, ma $m + n \in \mathbb{N}$ per ipotesi induttiva, quindi anche $(m+n)+1 \in \mathbb{N}$. Pertanto $\mathscr{P}(n+1)$ è vera.

II) Fissato $m \in \mathbb{N}$, dimostriamo l'affermazione applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

Si ha $m \cdot 0 = 0 \in \mathbb{N}$, quindi $\mathscr{P}(0)$ è vera.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$. Allora $m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$ è somma di due numeri naturali, quindi, per l'affermazione I, è naturale. Perciò $\mathscr{P}(n+1)$ è vera. ■

Per questo teorema addizione e moltiplicazione possono essere considerate come operazioni tra numeri naturali. Continuando a usare i simboli $+$ e $\cdot$ per indicare la restrizione ai naturali di addizione e moltiplicazione, abbiamo le seguenti proprietà.

1.3.14 Teorema

L'insieme $\mathbb{N}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ verifica gli assiomi C1–C3, C5–C7 e C9, non verifica gli assiomi C4 e C8.

Dimostrazione. È evidente che, poiché le proprietà associativa, commutativa e distributiva valgono in $\mathbb{R}$, esse valgono anche in sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, in particolare in $\mathbb{N}$. Pertanto gli assiomi C1, C2, C5, C6 e C9 sono verificati in $\mathbb{N}$.

Per la definizione di insieme induttivo $0 \in \mathbb{N}$ e $1 = 0 + 1 \in \mathbb{N}$, quindi sono verificati gli assiomi C3 e C7.

Se $n \in \mathbb{N}^*$, allora, per il teorema 1.3.6, $n > 0$, quindi $-n < 0$ (v. teorema 1.2.17), pertanto $-n \notin \mathbb{N}$. Perciò non è verificato l'assioma C4.

Se $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1$, allora, per il teorema 1.2.22, $0 < 1/n$ e, per il teorema 1.2.24, $1/n < 1$; per il teorema 1.3.9 non esistono naturali compresi tra 0 e 1, quindi $1/n \notin \mathbb{N}$. Perciò non è verificato l'assioma C8. ■

1.3.2 Numeri interi

Una volta definito, come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, l'insieme dei numeri naturali, è semplice definire l'insieme dei numeri interi e studiarne le proprietà.

Definizione di insieme dei numeri interi

Chiamiamo **insieme dei numeri interi** e indichiamo con $\mathbb{Z}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid -x \in \mathbb{N}\}.$$

Analogamente a quanto fatto per l'insieme dei reali, indichiamo con $\mathbb{N}^*$ l'insieme $\mathbb{N} \setminus \{0\}$.

È evidente che $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

È inoltre facile dimostrare che $n \in \mathbb{Z} \iff -n \in \mathbb{Z}$.

Come per i numeri naturali le operazioni tra numeri interi danno come risultato un numero intero.

1.3.15 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Allora:

I) $m + n \in \mathbb{Z}$,

II) $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione. I) Esaminiamo i vari casi possibili.

Se $m, n \in \mathbb{N}$, allora, per il teorema 1.3.13-I, si ha $m + n \in \mathbb{N}$. Se $m \in \mathbb{N}$ e $-n \in \mathbb{N}$, allora o $m \geq -n$, oppure $m < -n$; dal teorema 1.3.10 segue che nel primo caso si ha $m + n = m - (-n) \in \mathbb{N}$, mentre nel secondo caso si ha $-(m + n) = (-n) - m \in \mathbb{N}$. Infine, se $-m, -n \in \mathbb{N}$, allora risulta $-(m + n) = (-m) + (-n) \in \mathbb{N}$.

In ogni caso o $m + n \in \mathbb{N}$, oppure $-(m + n) \in \mathbb{N}$, quindi $m + n \in \mathbb{Z}$.

II) Esaminiamo i vari casi possibili.

Se $m, n \in \mathbb{N}$, allora, per il teorema 1.3.13-II, $m \cdot n \in \mathbb{N}$. Se $m \in \mathbb{N}$ e $-n \in \mathbb{N}$, allora $-(m \cdot n) = m \cdot (-n) \in \mathbb{N}$. Infine, se $-m, -n \in \mathbb{N}$, allora $m \cdot n = (-m) \cdot (-n) \in \mathbb{N}$.

In ogni caso o $m \cdot n \in \mathbb{N}$, oppure $-(m \cdot n) \in \mathbb{N}$, quindi $m \cdot n \in \mathbb{Z}$. ■

Questo teorema assicura che addizione e moltiplicazione possono essere considerate come operazioni tra numeri interi. Continuando a usare i simboli $+$ e $\cdot$ per indicare la restrizione ai naturali di addizione e moltiplicazione, abbiamo le seguenti proprietà.

1.3.16 Teorema

L'insieme $\mathbb{Z}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ verifica gli assiomi C1–C7 e C9, non verifica l'assioma C8.

Dimostrazione. Per motivi analoghi a quelli relativi a $\mathbb{N}$, gli assiomi C1, C2, C5, C6 e C9 sono verificati in $\mathbb{Z}$. Inoltre sappiamo che $0, 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, quindi sono verificati gli assiomi C3 e C7.

Se $n \in \mathbb{Z}$, allora o $n \in \mathbb{N}$, quindi $-(-n) \in \mathbb{N}$, pertanto $-n \in \mathbb{Z}$, oppure $-n \in \mathbb{N}$, quindi $-(-n) = n \in \mathbb{Z}$; quindi è verificato l'assioma C4

Come nel caso dei numeri naturali, se $n \in \mathbb{Z}$ e $n > 1$, allora, $1/n \notin \mathbb{Z}$. Perciò non è verificato l'assioma C8. ■

Studiamo gli estremi di $\mathbb{Z}$. Si ha:

1.3.17 Teorema

$$\inf \mathbb{Z} = -\infty, \qquad \sup \mathbb{Z} = +\infty.$$

Dimostrazione. L'insieme $\mathbb{Z}$ contiene $\mathbb{N}$ che è superiormente illimitato (v. teorema 1.3.7, quindi $\mathbb{Z}$ è superiormente illimitato.

Dimostriamo ora che $\mathbb{Z}$ è inferiormente illimitato. Poiché $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x$ non è un maggiorante di $\mathbb{N}$, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > -x$, cioè $-n < x$; siccome $-n \in \mathbb{Z}$ questo prova che x non è minorante di $\mathbb{Z}$. Pertanto $\mathbb{Z}$ non ha minoranti. ■

Analogamente a quanto avviene per i numeri naturali si ha:

1.3.18 Teorema

Siano $m, n \in \mathbb{Z}$. Se $m \neq n$, allora $|n - m| \geq 1$.

Dimostrazione. Poiché $n - m \in \mathbb{Z}$, $|n - m| \in \mathbb{Z}$, inoltre $|n - m| > 0$, quindi $|n - m| \in \mathbb{N}^*$ Pertanto, per il teorema 1.3.9 $|n - m| \geq 1$. ■

Infine vale il seguente teorema, la cui dimostrazione è simile a quella dell'analogo teorema per i sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ (v. teorema 1.3.12).

1.3.19 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$.
Se A è superiormente limitato allora ha massimo.
Se A è inferiormente limitato allora ha minimo.

1.3.3 Numeri razionali

A partire dall'insieme dei numeri interi, definiamo l'insieme dei numeri razionali.

Definizione di insieme dei numeri razionali

Chiamiamo **insieme dei numeri razionali** e indichiamo con $\mathbb{Q}$ il sottoinsieme di $\mathbb{R}$ tale che

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \in \mathbb{R} \;\middle|\; \exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{Z}^* : \quad x = \frac{p}{q} \right\}.$$

Analogamente a quanto fatto per l'insieme dei reali, indichiamo con $\mathbb{Q}^*$ l'insieme $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$. Poiché $1 \in \mathbb{Z}^*$, se $p \in \mathbb{Z}$ allora $p = p/1 \in \mathbb{Q}$, quindi $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$.

1.3.20 Teorema

Siano $p, q \in \mathbb{Q}$. Allora:

I) $p + q \in \mathbb{Q}$,

II) $p \cdot q \in \mathbb{Q}$.

Dimostrazione. I) Se $p = j/k$ e $q = m/n$, con $j, m \in \mathbb{Z}$ e $k, n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$p + q = \frac{j}{k} + \frac{m}{n} = \frac{j \cdot n}{k \cdot n} + \frac{m \cdot k}{n \cdot k} = \frac{j \cdot n + m \cdot k}{n \cdot k} \in \mathbb{Q}.$$

II) Se $p = j/k$ e $q = m/n$, con $j, m \in \mathbb{Z}$ e $k, n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$p \cdot q = \frac{j}{k} \cdot \frac{m}{n} = \frac{j \cdot m}{k \cdot n} \in \mathbb{Q}.$$

■

1.3.21 Teorema

L'insieme $\mathbb{Q}$ con le operazioni $+$ e $\cdot$ verifica gli assiomi C1–C9 cioè è un campo.

Dimostrazione. Per motivi analoghi a quelli relativi a $\mathbb{N}$, gli assiomi C1, C2, C5, C6 e C9 sono verificati in $\mathbb{Q}$. Inoltre sappiamo che $0, 1 \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q}$, quindi sono verificati gli assiomi C3 e C7.

Se $p/q \in \mathbb{Q}$, allora $-p/q = (-p)/q \in \mathbb{Q}$.
Se $p/q \in \mathbb{Q}^*$ allora $p \neq 0$, cioè $p \in \mathbb{Z}^*$, perciò $q/p \in \mathbb{Q}$. ■

Studiamo gli estremi di $\mathbb{Q}$. Si ha:

1.3.22 Teorema

$$\inf \mathbb{Q} = -\infty, \qquad \sup \mathbb{Q} = +\infty.$$

Dimostrazione. L'insieme $\mathbb{Q}$ contiene $\mathbb{Z}$ che è superiormente e inferiormente illimitato, quindi anche $\mathbb{Q}$ è superiormente e inferiormente illimitato. ■

Il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non è completo. Per provarlo dimostriamo anzitutto il seguente teorema.

1.3.23 Teorema

Non esiste $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo il teorema per assurdo. Supponiamo quindi che esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che $x^2 = 2$. Possiamo supporre $x > 0$, perché se fosse $x < 0$ sarebbe $-x > 0$ e $(-x)^2 = x^2 = 2$.

Pertanto esistono $m, n \in \mathbb{N}^*$ e tali che $(m/n)^2 = 2$. Possiamo supporre che la frazione sia ridotta ai minimi termini, cioè che m e n siano privi di fattori comuni. Si ha $m^2 = 2n^2$, quindi m^2 è pari. Poiché il quadrato di un numero dispari è dispari, m deve essere pari, quindi esiste $p \in \mathbb{N}^*$ tale che $m = 2p$. Allora risulta $4p^2 = 2n^2$, cioè $2p^2 = n^2$, quindi n^2 è pari, pertanto n è pari. Quindi sia m che n sono pari, ma questo è assurdo, perché tali numeri sono privi di fattori comuni. ■

1.3.24 Teorema

Il campo ordinato $\mathbb{Q}$ non è completo.

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$A = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 < 2\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{Q}^+ \mid x^2 > 2\}.$$

Se $a \in A$ e $b \in B$, allora si ha $a^2 < b^2$, quindi, per il teorema 1.2.30, affermazione III, risulta $a < b$. Dimostriamo che non esiste in $\mathbb{Q}$ un elemento di separazione tra A e B, quindi $\mathbb{Q}$ non verifica l'assioma di completezza.

Poiché $1 \in A$, un eventuale elemento di separazione è maggiore o uguale a 1, quindi è positivo.

Poniamo

$$f : \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^+, \qquad f(x) = x + \frac{2 - x^2}{x + 2} = \frac{2x + 2}{x + 2}.$$

Evidentemente se $a \in A$, quindi $2 - a^2 > 0$, si ha $f(a) > a$, mentre se $b \in B$ risulta $f(b) < b$. Inoltre, $\forall x \in \mathbb{Q}^+$, si ha

$$\big(f(x)\big)^2 - 2 = \frac{4x^2 + 8x + 4 - 2(x^2 + 4x + 4)}{(x + 2)^2} = \frac{2x^2 - 4}{(x + 2)^2}.$$

Pertanto se $a \in A$, allora si ha $\big(f(a)\big)^2 - 2 < 0$, quindi $f(a) \in A$, se invece $b \in B$, allora si ha $\big(f(b)\big)^2 - 2 > 0$, quindi $f(b) \in B$.

Abbiamo così dimostrato che, se $a \in A$, allora $f(a)$ è un elemento di A maggiore di a, quindi a non è elemento di separazione. Analogamente, se $b \in B$, allora $f(b)$ è un elemento di B minore di b, quindi b non è elemento di separazione. Per il teorema 1.3.23, se $x \in \mathbb{Q}^+$, allora o $x^2 < 2$ o $x^2 > 2$, quindi $\mathbb{Q}^+ = A \cup B$; poiché non esiste un elemento di separazione né in A né in B, non esiste un elemento di separazione in $\mathbb{Q}^+$. ■

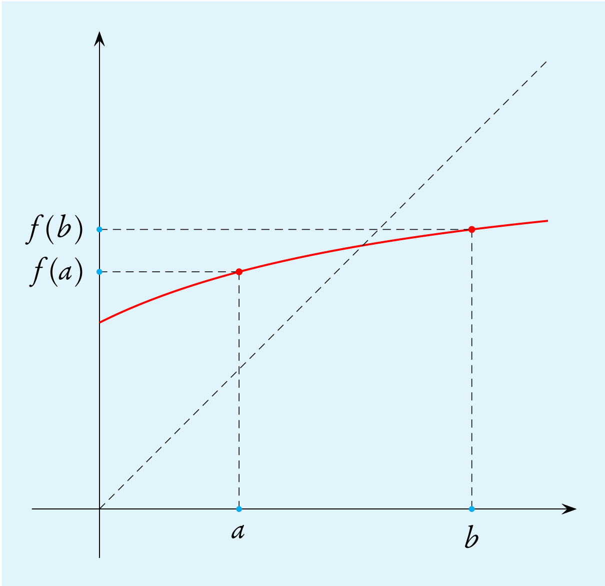


Figura 1.3.2
Grafico della funzione f utilizzata nella dimostrazione del teorema 1.3.24.

1.4 Ulteriori proprietà dei numeri reali

Enunciamo anzitutto un teorema semplice, ma fondamentale per lo sviluppo dell'analisi.

1.4.1 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $\forall y \in \mathbb{R}^+$ si ha $x \leq y$, allora $x \leq 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo che se è vera la negazione della tesi, allora è vera la negazione dell'ipotesi. Quindi proviamo che se $x > 0$ allora esiste $y \in \mathbb{R}^+$ tale che $y < x$. Ciò è ovvio, basta scegliere $y = x/2$. ■

1.4.2 Teorema (proprietà di Archimede[2])

Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$ e $y > 0$ allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $y < nx$.

Dimostrazione. Siano $x, y > 0$. Poiché $\mathbb{N}$ è superiormente illimitato (v. teorema 1.3.7) y/x non è maggiorante di $\mathbb{N}$, perciò $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y/x$; da questo segue $y < nx$. ■

1.4.3 Teorema

Sia $x \in \mathbb{R}$. Se $x > 0$, allora $\exists n \in \mathbb{N}$ tale che $1/n < x$.

Dimostrazione. Sia $x > 0$. Allora $1/x > 0$ e per la proprietà di Archimede 1.4.2, applicata ai numeri 1 e $1/x$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $1/x < n \cdot 1$, quindi $1/n < x$. ■

---

[2]La prpoprietà prende il nome da Archimede di Siracusa (Siracusa, 287 a.C. - Siracusa 212 a.C.), uno dei più grandi matematici della sua epoca, oltre che fisico e inventore.

La proprietà è riportata in un volume di Archimede del 225 a.C. riferita ai segmenti: dati due segmenti, è sempre possibile, ripetendo un numero sufficiente di volte uno dei due, ottenere un segmento più lungo dell'altro.

Archimede attribuisce la paternità della scoperta al matematico e astronomo Eudosso di Cnido (Cnido, Asia Minore, 408 a.C. - Cnido 355 a.C.).

Definizione di parte intera di un numero reale

Sia $x \in \mathbb{R}$. Chiamiamo **parte intera** di x e indichiamo con $[x]$, il numero intero

$$\max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

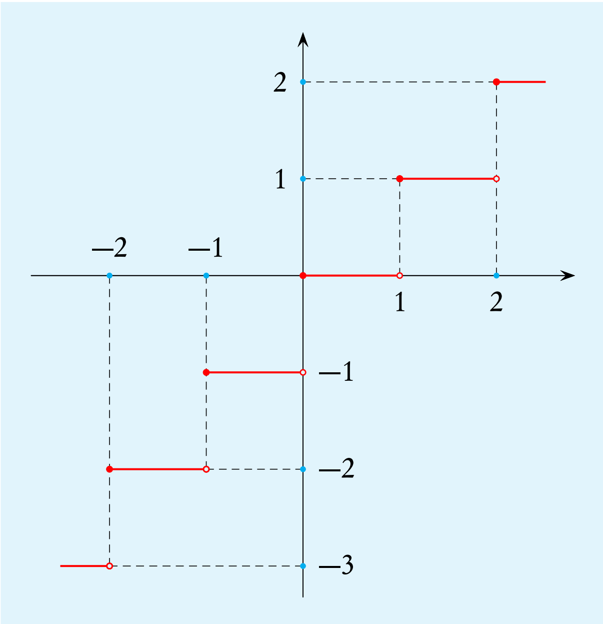


Figura 1.4.1
Grafico della funzione parte intera.

L'insieme $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ superiormente limitato, perché x è un suo maggiorante; quindi per il teorema 1.3.19 tale insieme ha massimo. Perciò la definizione è corretta.

Abbiamo così definito una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{Z}$, che è detta **funzione parte intera**.

1.4.4 Osservazione. Dalla definizione segue immediatamente che $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $[x] \in \mathbb{Z}$ e $[x] \leq x$. Inoltre $[x]+1$ è un intero più grande del più grande intero minore o uguale a x, quindi $[x]+1 > x$. ◀

1.4.5 Esempio. Risulta

$$[1]=1, \qquad [-2]=-2, \qquad \left[\frac{3}{2}\right]=1, \qquad \left[-\frac{3}{2}\right]=-2.$$ ◀

Definizione di radice n-esima di un numero reale non negativo

Siano $a, x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Diciamo che x è **radice n-esima** di a quando

$$x^n = a.$$

Premettiamo allo studio dell'esistenza della radice di un numero reale non negativo un teorema che verrà utilizzato in seguito.

Nella formula che segue si intende, in via del tutto eccezionale, che l'espressione x^0 indichi il numero 1, anche se $x=0$.

1.4.6 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Allora

$$x^n - y^n = (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1}.$$

In questo enunciato si richiede che sia $n \in \mathbb{N}^*$, perché per $n = 0$ il secondo membro non ha senso. Infatti l'indice k nella sommatoria dovrebbe verificare contemporaneamente le disuguaglianze $k \geq 0$ e $k \leq -1$.

Dimostrazione. Per $n \in \mathbb{N}^*$ indichiamo con $\mathscr{P}(n)$ l'uguaglianza da dimostrare. Possiamo applicare il principio di induzione 1.3.4 in forma modificata. Infatti è evidente che se si dimostra che $\mathscr{P}(1)$ è vera e che $\mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$, possiamo concludere che $\mathscr{P}(n)$ è vera $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Se $n = 1$ allora il primo membro è uguale a $x - y$, mentre il secondo è

$$(x-y)\sum_{k=0}^{0} x^k y^{-k} = (x-y)x^0 y^0 = x - y;$$

perciò l'uguaglianza è verificata per $n = 1$.

Se $\mathscr{P}(n)$ è vera, allora si ha

$$\begin{aligned} x^{n+1} - y^{n+1} &= x^{n+1} - x^n y + x^n y - y^{n+1} = (x-y)x^n + y(x^n - y^n) = \\ &= (x-y)x^n + y(x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k-1} = (x-y)x^n y^0 + (x-y)\sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-k} = \\ &= (x-y)\sum_{k=0}^{n} x^k y^{n-k}, \end{aligned}$$

quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è vera. ■

1.4.7 Teorema (esistenza e unicità della radice n-esima)

Siano $a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Allora esiste uno e un solo $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ tale che $x^n = a$.

Dimostrazione. Sia $a = 0$. Poiché $0^n = 0$, 0 è radice n-esima di a. Se $x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ è tale che $x^n = 0$, allora si ha $x = 0$, perché un prodotto si annulla solo se almeno un fattore è nullo. Quindi 0 è l'unica radice n-esima di 0.

Consideriamo ora il caso $a > 0$.

Dimostriamo l'unicità della radice n-esima di a. Siano x_1 e x_2 radici n-esime di a. Poiché $a \neq 0$, si ha $x_1 \neq 0$ e $x_2 \neq 0$, quindi si ha $x_1 > 0$ e $x_2 > 0$. Per il teorema 1.4.6 risulta

$$0 = x_1^n - x_2^n = (x_1 - x_2)\sum_{k=0}^{n-1} x_1^k x_2^{n-k-1}.$$

Per la legge di annullamento del prodotto 1.2.5, uno dei due fattori deve essere nullo; si ha $\sum_{k=0}^{n-1} x_1^k x_2^{n-k-1} > 0$, perché ciascun addendo è positivo, quindi deve essere $x_1 - x_2 = 0$. Pertanto la radice n-esima di a è unica.

Per dimostrare l'esistenza della radice n-esima di a, posto $A = \{y \in \mathbb{R}^+ \mid y^n \leq a\}$, proviamo che A è superiormente limitato e il suo estremo superiore è la radice n-sima cercata.

Se $a \leq 1$, allora $a^n \leq a$, quindi $a \in A$; inoltre $\forall y \in \mathbb{R}$, se $y > 1$, allora $y^n > 1^n = 1 \geq a$, quindi $y \notin A$, perciò 1 è un maggiorante di A. Se invece $a > 1$, allora $1^n = 1 < a$, quindi $1 \in A$; inoltre $\forall y \in \mathbb{R}$, se $y > a$, allora $y^n > a^n \geq a$, quindi $y \notin A$, perciò a è un maggiorante di A. Pertanto A ha un elemento positivo ed è superiormente limitato, quindi ha estremo superiore positivo. Poniamo $x = \sup A$.

Dimostriamo che $x^n = a$. Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, tale che $\varepsilon \leq x$. Poiché $x + \varepsilon > x = \sup A$, si ha $x + \varepsilon \notin A$, pertanto $(x+\varepsilon)^n > a$. Inoltre $x - \varepsilon < x$, perciò, per la caratterizzazione dell'estremo superiore, esiste $z \in A$ tale che $x - \varepsilon < z$, quindi $(x-\varepsilon)^n < z^n \leq a$; pertanto

$$(x-\varepsilon)^n < a < (x+\varepsilon)^n .$$

Poiché $0 \leq x - \varepsilon < x < x + \varepsilon$, si ha

$$(x-\varepsilon)^n < x^n < (x+\varepsilon)^n ,$$

cioè

$$-(x+\varepsilon)^n < -x^n < -(x-\varepsilon)^n .$$

Sommando membro a membro si ottiene

$$(x-\varepsilon)^n - (x+\varepsilon)^n < a - x^n < (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n ;$$

per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione I, queste disuguaglianze equivalgono a

$$|a - x^n| < (x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n .$$

Per il teorema 1.4.6, tenuto conto che $\varepsilon \leq x$, si ha

$$(x+\varepsilon)^n - (x-\varepsilon)^n = \big((x+\varepsilon)-(x-\varepsilon)\big)\sum_{k=0}^{n-1}(x+\varepsilon)^k (x-\varepsilon)^{n-k-1} \leq 2\varepsilon \sum_{k=0}^{n-1}(2x)^k x^{n-k-1} ;$$

quindi, posto $M = 2\sum_{k=0}^{n-1}(2x)^k x^{n-k-1}$, risulta $|a - x^n| < M\varepsilon$, cioè $|a - x^n|/M < \varepsilon$. Questa disuguaglianza è vera per ogni ε compreso tra 0 ed x, quindi anche per ogni $\varepsilon > 0$. Per il teorema 1.4.1, risulta quindi $|a - x^n|/M \leq 0$; poiché tale numero è non negativo, esso è uguale a 0. Pertanto $|a - x^n| = 0$, cioè $a = x^n$, quindi x è radice n-sima di a. ■

1.4.8 Teorema

Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$.

I) Esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.

II) Esiste $z \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che $x < z < y$.

La tesi del teorema viene espressa dicendo che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sono **densi** in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. I) Poiché $y-x>0$, per il teorema 1.4.3 $\exists m \in \mathbb{N}$ tale che $y-x>1/m$. Posto $n=[mx]$ e $q=(n+1)/m$, si ha $q\in\mathbb{Q}$; dimostriamo che q è compreso tra x e y.

Per l'osservazione 1.4.4 si ha $n \le mx < n+1$, quindi

$$\frac{n}{m} \le x < \frac{n+1}{m} = q\,,$$

pertanto $x<q$. Inoltre

$$y = x + (y-x) > \frac{n}{m} + \frac{1}{m} = q\,;$$

quindi q è il numero cercato.

II) Poiché $\sqrt{2}\,x < \sqrt{2}\,y$, per l'affermazione I esiste $q\in\mathbb{Q}$ tale che $\sqrt{2}\,x < q < \sqrt{2}\,y$, da cui segue

$$x < \frac{q}{\sqrt{2}} < y\,.$$

Si ha $q/\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, perché in caso contrario sarebbe $\sqrt{2}/q\in\mathbb{Q}$, quindi $\sqrt{2}=q\big(\sqrt{2}/2\big)\in\mathbb{Q}$, contrariamente a quanto affermato dal teorema 1.3.23. ∎

Definiamo una tipologia di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ di particolare interesse. Sono gli insiemi che potremmo chiamare "senza buchi"; cioè tali che dati due punti dell'insieme, ogni punto compreso tra di essi appartiene ancora all'insieme. Formalizziamo questa idea nella seguente definizione.

Definizione di intervallo

Sia $I\subseteq\mathbb{R}$ avente più di un elemento. Diciamo che I è un **intervallo** quando

$$\forall x,y,z\in\mathbb{R},\quad (x,y\in I \wedge x\le z\le y) \implies z\in I\,.$$

Ovviamente un insieme con un solo elemento verifica la condizione scritta sopra. Per questo motivo un tale insieme viene detto **intervallo degenere**.

1.4.9 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati nell'esempio 1.2.34.

L'insieme $A_1=\{-1\}$ ha un solo elemento, quindi è un intervallo degenere.

L'insieme $A_2=\{0,2,3,4\}$ non è un intervallo, perché $0,2\in A_2$ e $0<1<2$, ma $1\notin A_2$.

L'insieme $A_3=\{x\in\mathbb{R}\mid 1\le x\le 3\}$ è un intervallo. Infatti se $x,y\in A_3$ e z è compreso tra x e y, allora $z\ge x\ge 1$ e $z\le y\le 3$, pertanto $z\in A_3$.

L'insieme $A_4=\{x\in\mathbb{R}\mid 1<x<3\}$ è un intervallo, come si prova con ragionamenti simili a quelli relativi ad A_3.

L'insieme $A_5=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 2\}$ è un intervallo. Infatti se $x,y\in A_5$ e z è compreso tra x e y, allora $z\le y\le 2$, pertanto $z\in A_5$.

L'insieme $A_6=\{x\in\mathbb{R}\mid x\le 0\}\cup\{x\in\mathbb{R}\mid x>3\}$ non è un intervallo, perché $0,4\in A_6$ e $0<2<4$, ma $2\notin A_6$. ◀

È facile rendersi conto che per conoscere un intervallo è sufficiente conoscerne gli estremi, inferiore e superiore, oltre a sapere se tali estremi, nel caso che siano reali, appartengono o meno all'intervallo. Esaminando i casi possibili otteniamo le seguenti tipologie di intervalli.

Definizione di intervallo aperto, chiuso, limitato, illimitato

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$.
Chiamiamo **intervallo chiuso e limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $[a, b]$, l'insieme

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}.$$

Chiamiamo **intervallo chiuso a sinistra, aperto a destra, limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $[a, b[$, l'insieme

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}.$$

Chiamiamo **intervallo aperto a sinistra, chiuso a destra, limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $]a, b]$, l'insieme

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}.$$

Chiamiamo **intervallo aperto e limitato** di estremi a e b, e indichiamo con $]a, b[$, l'insieme

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}.$$

Chiamiamo **intervallo chiuso, superiormente illimitato e inferiormente limitato** di estremo a, e indichiamo con $[a, +\infty[$, l'insieme

$$[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}.$$

Chiamiamo **intervallo aperto, superiormente illimitato e inferiormente limitato** di estremo a, e indichiamo con $]a, +\infty[$, l'insieme

$$]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}.$$

Chiamiamo **intervallo chiuso, inferiormente illimitato e superiormente limitato** di estremo b, e indichiamo con $]-\infty, b]$, l'insieme

$$]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}.$$

Chiamiamo **intervallo aperto, inferiormente illimitato e superiormente limitato** di estremo b, e indichiamo con $]-\infty, b[$, l'insieme

$$]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}.$$

Inoltre, per coerenza con quanto definito sopra, poniamo:

$$]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}.$$

È evidente che ciascuno di questi insiemi è un intervallo. Viceversa si dimostra facilmente che ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che sia un intervallo rientra in una delle tipologie descritte sopra.

2
Successioni di numeri reali

2.1 Successioni

In questo capitolo studiamo le successioni, oggetti che possono essere visti come una lista numerata di elementi di un certo insieme; le possiamo indicare con la scrittura

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots.$$

In questo modo a ogni numero naturale corrisponde un oggetto, pertanto una successione può essere vista come una funzione avente dominio $\mathbb{N}$ e a valori in un determinato insieme, che solitamente sarà $\mathbb{R}$.

Le successioni costituiscono un ambito, più semplice di altri, in cui iniziare lo studio dei concetti fondamentali dell'analisi, in particolare il concetto di limite.

2.1.1 Terminologia

Definiamo anzitutto gli oggetti che studiamo.

Definizione di successione e di successione reale

Sia X un insieme non vuoto. Chiamiamo **successione** in X ogni funzione da $\mathbb{N}$ a X. In particolare, chiamiamo **successione reale** (o anche **successione** in $\mathbb{R}$) ogni funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$.

Una successione è una funzione con un particolare dominio: l'insieme dei numeri naturali. Tuttavia nello studio delle successioni il fatto che esse siano funzioni risulta marginale. Pertanto c'è l'abitudine di utilizzare terminologie e notazioni diverse da quelle usate solitamente per le funzioni; le introduciamo con le seguenti definizioni.

Definizione di termine di una successione

Sia a una successione e $n \in \mathbb{N}$. Chiamiamo n-esimo **termine** (o **termine di indice** n) della successione a, e indichiamo con a_n, l'elemento $a(n)$.

Vista la notazione usata per indicarne i termini, indichiamo la successione a con la scrittura $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Con un abuso di linguaggio, chiamiamo successione anche una funzione di dominio $\mathbb{N}^*$, cioè una successione per cui non è definito il termine di indice 0. Questa verrà indicata col simbolo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Definizione di insieme dei termini di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione. L'immagine di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cioè $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, è chiamato **insieme dei termini** della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

È essenziale non confondere una successione con l'insieme dei suoi termini: una funzione è diversa dalla sua immagine. Successioni diverse possono avere lo stesso insieme dei termini.

2.1.1 Esempio. Consideriamo le successioni reali con termine n-simo (v. figura 2.1.1):

$$\begin{array}{llllllllll}
p_n = \dfrac{1}{n+1}, & 1 & \frac12 & \frac13 & \frac14 & \frac15 & \frac16 & \frac17 & \dots; \\
q_n = \dfrac{n+(-1)^n}{n+1}, & 1 & 0 & 1 & \frac12 & 1 & \frac23 & 0 & \dots; \\
r_n = \dfrac{1}{5-2n}, & \frac15 & \frac13 & 1 & -1 & -\frac13 & -\frac15 & -\frac17 & \dots; \\
s_n = n, & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots; \\
t_n = \dfrac{2n+(-1)^n-1}{4}, & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 3 & \dots; \\
u_n = 3-n, & 3 & 2 & 1 & 0 & -1 & -2 & -3 & \dots; \\
v_n = (-1)^n, & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & \dots; \\
w_n = (-1)^n\dfrac{(n+2)}{n+1}, & 2 & -\frac32 & \frac43 & -\frac54 & \frac65 & -\frac76 & \frac87 & \dots; \\
z_n = (-1)^n n, & 0 & -1 & 2 & -3 & 4 & -5 & 6 & \dots.
\end{array}$$

Si prova facilmente che si ha:

$$\begin{aligned}
\{p_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \left\{\frac{1}{n+1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},\\
\{q_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \left\{\frac{n}{n+1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\{1\},\\
\{r_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \left\{-\frac{1}{2n+1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}\cup\left\{-1,\frac13,\frac15\right\},\\
\{s_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \mathbb{N},\\
\{t_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \mathbb{N},\\
\{u_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \{n\in\mathbb{Z} \mid n\le 3\},\\
\{v_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \{-1,1\},\\
\{w_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \left\{(-1)^n\frac{n+2}{n+1} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\},\\
\{z_n \mid n\in\mathbb{N}\} &= \{2n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{-(2n+1) \mid n\in\mathbb{N}\}.
\end{aligned}$$

Le successioni $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hanno lo stesso insieme dei termini: l'insieme dei numeri naturali. Tali successioni sono diverse, ad esempio $s_1 = 1$, mentre $t_1 = 0$. ◀

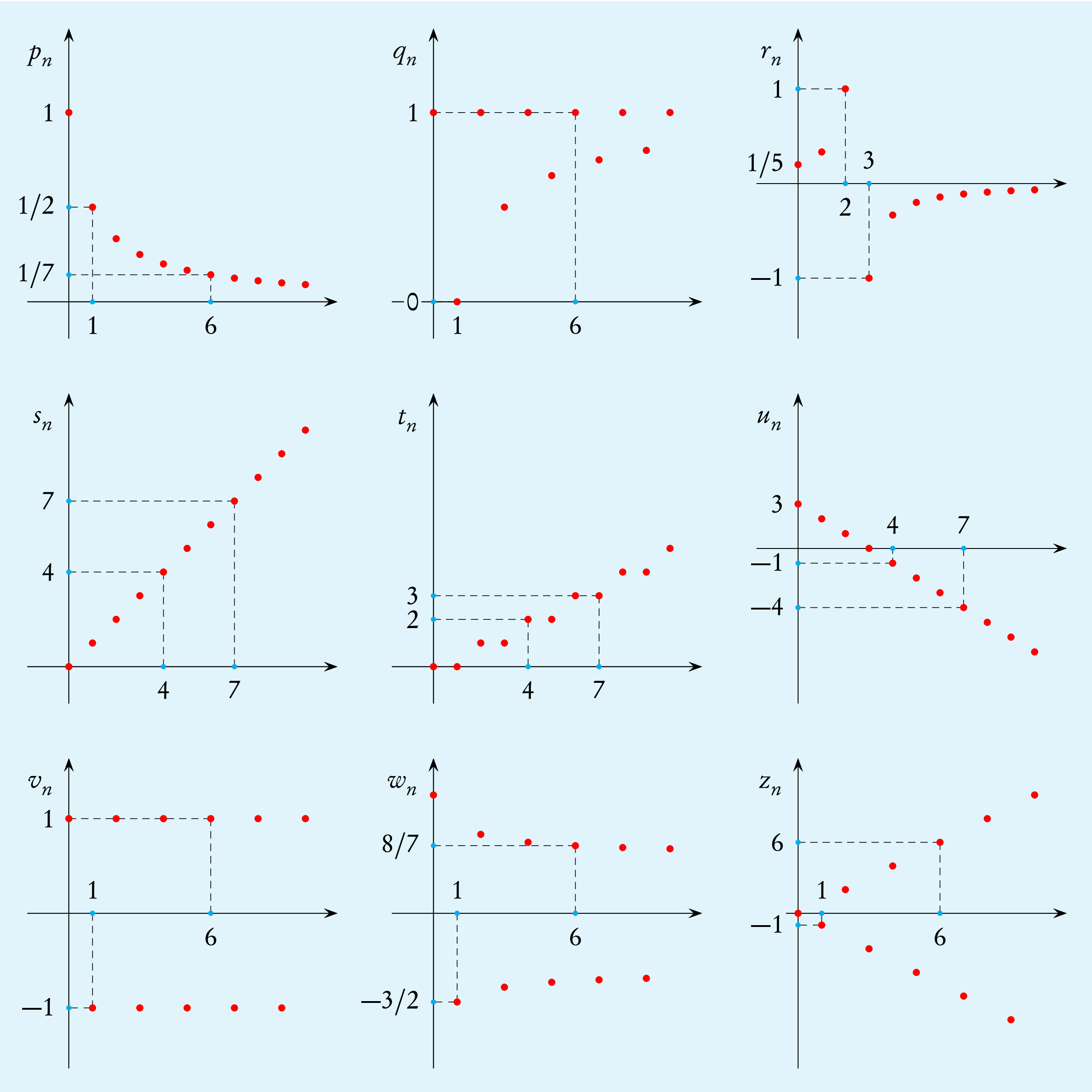


Figura 2.1.1
Le successioni definite nell'esempio 2.1.1.

Una successione reale è una funzione da un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$, quindi può essere rappresentata come sottoinsieme di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, cioè del piano cartesiano. Pertanto una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ viene rappresentata da punti di coordinate (n, a_n), con $n \in \mathbb{N}$.

Nella sottosezione 1.3.1 abbiamo definito per induzione il fattoriale di un numero naturale; abbiamo posto $0! = 1$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, abbiamo posto $(n+1)! = (n+1)\,n!$. Questa procedura definisce una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, cioè una successione.

Le successioni dell'esempio 2.1.1 sono definite mediante una formula, che consente di determinare direttamente il termine n-simo, invece la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n!)_{n\in\mathbb{N}}$ è definita fissando a_0 e stabilendo una "regola" che consente di determinare a_{n+1}, se si conosce a_n. Le successioni così definite sono dette **definite per ricorrenza** (o **per induzione**).

2.1.2 Esempio. Vediamo due esempi di successioni definite per ricorrenza.

Consideriamo la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita come segue:

$$\begin{cases} c_0 = 1\,, \\ c_{n+1} = \dfrac{2}{c_n + 2}\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

Osserviamo che la successione è ben definita, perché $c_n + 2$ non è nullo. Infatti si ha $c_0 > 0$ e, se $c_n > 0$, allora anche $c_{n+1} > 0$; quindi abbiamo termini positivi, pertanto $c_n + 2$ non è nullo. I primi termini della successione sono:

$$0 \quad \frac{2}{0+2} = 1 \quad \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{(2/3)+2} = \frac{3}{4} \quad \frac{2}{(3/4)+2} = \frac{8}{11} \quad \frac{2}{(8/11)+2} = \frac{11}{15} \quad \ldots\,.$$

Consideriamo la successione $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita come segue:

$$\begin{cases} d_0 = 1\,, \\ d_{n+1} = -d_n + n\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}\,. \end{cases}$$

I primi termini della successione sono:

$$1 \quad -1+0=-1 \quad 1+1=2 \quad -2+2=0 \quad 0+3=3 \quad -3+4=1 \quad \ldots\,.$$ ◀

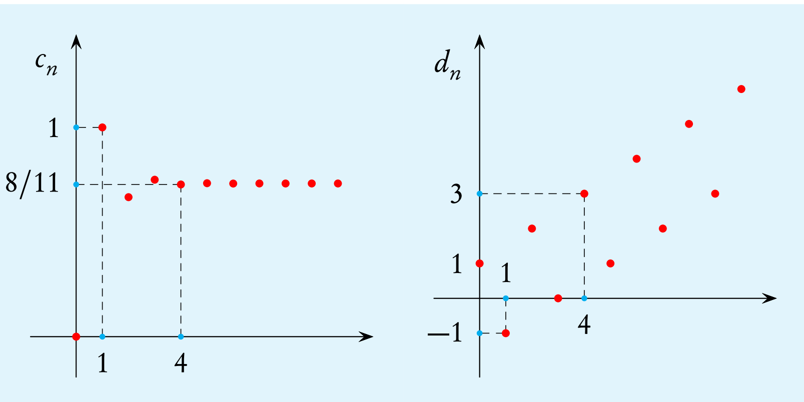


Figura 2.1.2
Le successioni definite nell'esempio 2.1.2.

2.1.2 Estremi e limitatezza di successioni

Nella sottosezione 1.2.4 abbiamo definito i concetti di limitatezza e di estremo (inferiore e superiore) per sottoinsiemi di $\mathbb{R}$. Tali concetti possono essere trasferiti all'ambito delle successioni reali, seguendo il principio che ogni affermazione riguarda l'insieme dei termini della successione.

Seguendo questa idea, risultano naturali le seguenti definizioni.

Definizione di successione superiormente limitata, superiormente illimitata e di estremo superiore di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **superiormente limitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente limitato. In tal caso chiamiamo **estremo superiore** di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e indichiamo con $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, l'estremo superiore dell'insieme dei termini della successione.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **superiormente illimitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente illimitato. In tal caso scriviamo $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$.

Definizione di successione inferiormente limitata, inferiormente illimitata e di estremo inferiore di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **inferiormente limitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è inferiormente limitato. In tal caso chiamiamo **estremo inferiore** di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e indichiamo con $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n$, l'estremo inferiore dell'insieme dei termini della successione.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **inferiormente illimitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è inferiormente illimitato. In tal caso scriviamo $\inf_{n\in\mathbb{N}} a_n = -\infty$.

Definizione di successione limitata e illimitata

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **limitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è limitato.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **illimitata** quando $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ è illimitato.

Osserviamo che la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata se e solo se esiste $M\in\mathbb{R}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \le M$. Analogamente inferiormente limitata se e solo se esiste $M\in\mathbb{R}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \ge M$.

2.1.3 Esempio. Riprendiamo in esame le successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

La successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, perché ogni suo termine è compreso tra 0 e 1. Evidentemente $\max\{1/(n+1) \mid n\in\mathbb{N}\} = p_0 = 1$. Dimostriamo che $\inf_{n\in\mathbb{N}} p_n = 0$, cioè che 0 è il massimo minorante dell'insieme dei termini. A tale fine dobbiamo dimostrare che, se $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, allora ε non è un maggiorante della successione, cioè esiste un termine $1/(n+1)$ maggiore di ε. La disuguaglianza $1/(n+1) > \varepsilon$ equivale a $n+1 > 1/\varepsilon$. Per la proprietà di Archimede 1.4.2, esiste $n\in\mathbb{N}$ tale che $1/\varepsilon < n\cdot 1$, quindi per tale n si ha anche $n+1 > 1/\varepsilon$. Pertanto qualunque $\varepsilon > 0$ non è un maggiorante della successione, quindi $\inf_{n\in\mathbb{N}} p_n = 0$.

La successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n+(-1)^n)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata, perché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha

$$\frac{n+(-1)^n}{n+1} \le \frac{n+1}{n+1} = 1;$$

inoltre $n+(-1)^n \geq 0$, pertanto $q_n \geq 0$, quindi la successione è inferiormente limitata. Poiché $q_0 = 1$, 1 è un maggiorante della successione che appartiene all'insieme dei termini, pertanto $\max\{q_n | n \in \mathbb{N}\} = 1$. Inoltre $q_1 = 0$, quindi 0 è un minorante della successione che appartiene all'insieme dei termini, pertanto $\min\{q_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

La successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, perché, $\forall n \in \mathbb{N}$, $5-2n \in \mathbb{Z}^*$, quindi $|5-2n| \geq 1$, pertanto ogni termine della successione è compreso tra -1 e 1. Inoltre $r_2 = 1$ e $r_3 = -1$, pertanto $\max\{1/(2n-5) \mid n \in \mathbb{N}\} = r_2 = 1$ e $\min\{1/(2n-5) \mid n \in \mathbb{N}\} = r_3 = -1$.

Poiché l'insieme dei termini della successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ è l'insieme dei numeri naturali, è evidente che la successione è superiormente illimitata e inferiormente limitata; inoltre $\min\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \min \mathbb{N} = 0$.

Poiché $\{t_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, quanto affermato relativamente a $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vale anche per $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $3-n \geq 3$, pertanto $\max\{u_n | n \in \mathbb{N}\} = u_0 = 3$. L'insieme dei termini contiene l'insieme degli interi negativi, quindi la successione è inferiormente illimitata.

Poiché l'insieme dei termini di $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è $\{-1, 1\}$, tale successione è limitata. Evidentemente $\min\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} = -1$ e $\max\{v_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1$.

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$|w_n| = \left|\frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} \leq 2,$$

pertanto la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. Si ha $w_0 = 2$, pertanto $2 = \max\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Se n è pari, allora $w_n > 0$, mentre se n è dispari, allora w_n è negativo, quindi ogni termine di indice dispari è minore di ogni termine di indice pari. Inoltre, se n è dispari, allora

$$w_{n+2} - w_n = -\frac{n+4}{n+3} + \frac{n+2}{n+1} = \frac{-(n+4)(n+1)+(n+2)(n+3)}{(n+3)(n+1)} = \frac{2}{(n+3)(n+1)} > 0.$$

Pertanto al crescere dell'indice n dispari w_n cresce, quindi w_1 è minore di ogni altro termine di indice dispari. Inoltre, come già detto, ogni termine di indice dispari è minore di ogni termine di indice pari, pertanto $\min\{w_n \mid n \in \mathbb{N}\} = w_1 = -3/2$.

Poiché l'insieme dei termini della successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è l'unione dell'insieme dei numeri naturali pari con l'insieme degli opposti dei numeri naturali dispari; quindi la successione è illimitata sia superiormente che inferiormente. ◀

2.2 Limiti di successioni

2.2.1 Successioni convergenti

Ha interesse conoscere il comportamento dei termini di una successione quando l'indice da cui essi dipendono diventa "grande". L'idea è di chiedersi se per valori "grandi" dell'indice n il termine a_n si "avvicina" ad un numero reale. La traduzione in termini rigorosi di questa idea non è semplice e costituisce la seguente definizione.

Definizione di limite reale di una successione

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha **limite** ℓ (o che a_n **tende** a ℓ) e scriviamo $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Per indicare che $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ si usa anche la notazione $a_n \to \ell$.

La condizione $|a_n - \ell| < \varepsilon$ è tanto più restrittiva quanto più ε è piccolo, poiché se è verificata per un certo valore di ε allora è verificata anche per ogni valore più grande. Per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione I, questa condizione equivale a $\ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$.

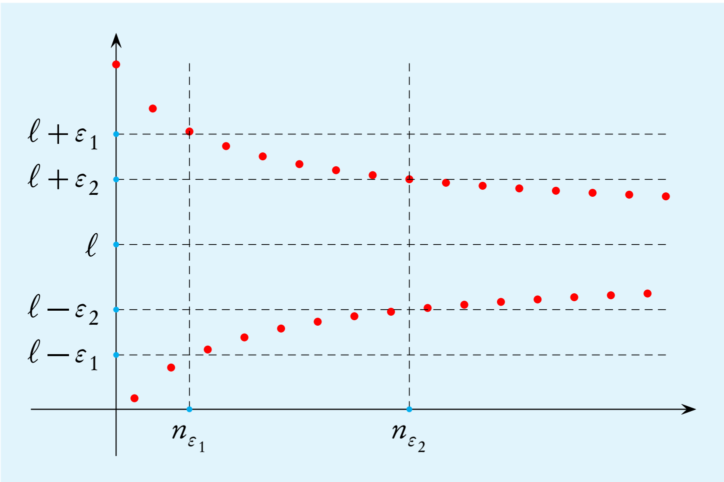


Figura 2.2.1
Illustrazione della definizione di limite.
I termini della successione di indice maggiore di n_{ε_1} distano dal limite ℓ meno di ε_1, cioè sono compresi tra $\ell - \varepsilon_1$ e $\ell + \varepsilon_1$.
Lo stesso avviene se si sostituisce ε_2 a ε_1.

2.2.1 Osservazione. È immediato verificare che

$$a_n \to \ell \iff a_n - \ell \to 0 .$$ ◀

Questa osservazione mostra che le successioni che hanno limite 0 rivestono un particolare interesse, per questo motivo hanno una denominazione particolare: vengono chiamate **successioni infinitesime**.

Definizione di successione convergente

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **convergente** quando esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $a_n \to \ell$.

2.2.2 Osservazione. Le successioni costanti, cioè quelle con tutti i termini uguali, sono convergenti.

Infatti se tutti i termini della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono uguali a m allora, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ e $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $|a_n - m| = 0 < \varepsilon$; pertanto la definizione di limite è verificata scegliendo sempre $n_\varepsilon = 0$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = m$. ◀

2.2.3 Esempio. Studiamo i limiti di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite 0.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Si ha $|p_n - 0| < \varepsilon$ se e solo se $1/(n+1) < \varepsilon$, cioè $n+1 > 1/\varepsilon$. Pertanto qualunque sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$, risulta

$$n > n_\varepsilon \implies n+1 > \frac{1}{\varepsilon} \implies |p_n - 0| < \varepsilon .$$

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} p_n = 0$.

Consideriamo la successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n+(-1)^n)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite 1.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|q_n - 1| = \left|\frac{n+(-1)^n}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{n+(-1)^n-(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^n-1}{n+1}\right| \leq \frac{2}{n+1} .$$

Pertanto se $2/(n+1) < \varepsilon$, allora si ha $|q_n - 1| < \varepsilon$. Quindi scelto $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon \geq 1/(2\varepsilon)$, risulta

$$n > n_\varepsilon \implies \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n_\varepsilon} \leq \varepsilon \implies |q_n - 1| < \varepsilon .$$

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} q_n = 1$.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite 0.

Sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Si ha $|r_n - 0| < \varepsilon$ se e solo se $1/|5-2n| < \varepsilon$, cioè $|2n-5| > 1/\varepsilon$. Per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione II, tale disuguaglianza è verificata se e solo se $2n-5 > 1/\varepsilon$, oppure $2n-5 < -1/\varepsilon$. Dalla prima condizione segue che la disuguaglianza è verificata se $n > (5+1/\varepsilon)/2$. Pertanto, qualunque sia $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $n_\varepsilon \geq (5+1/\varepsilon)/2$, risulta

$$n > n_\varepsilon \implies n > \frac{1}{2}\left(5 + \frac{1}{\varepsilon}\right) \implies |r_n - 0| < \varepsilon .$$

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} r_n = 0$. ◀

2.2.4 Teorema (di unicità del limite)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell, m \in \mathbb{R}$. Se $a_n \to \ell$ e $a_n \to m$, allora $\ell = m$.

Dimostrazione. Poiché ℓ e m sono limiti della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > j_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon ,$$
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > k_\varepsilon \implies |a_n - m| < \varepsilon .$$

Scelto $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$; allora $n > j_\varepsilon$ e $n > k_\varepsilon$, quindi si ha

$$|\ell - m| = \big|(\ell - a_n) + (a_n - m)\big| \leq |\ell - a_n| + |a_n - m| < 2\varepsilon .$$

Pertanto, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si ha $|\ell - m| < 2\varepsilon$. Poiché ogni numero reale positivo può essere scritto nella forma 2ε, con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, per il teorema 1.4.1 si ha $|\ell - m| \leq 0$, quindi $|\ell - m| = 0$, pertanto $\ell = m$. ■

Vediamo alcuni teoremi che collegano il concetto di limite con la relazione d'ordine.

2.2.5 Teorema (del confronto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siano convergenti. Se, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \le b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>j_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon\,,$$
$$\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>k_\varepsilon \implies m-\varepsilon<b_n<m+\varepsilon\,.$$

Scelto $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, sia $n\in\mathbb{N}$ tale che $n>\max\{j_\varepsilon,k_\varepsilon\}$; allora si ha $\ell-\varepsilon<a_n$ e $b_n<m+\varepsilon$, poiché $a_n\le b_n$, si ha anche $\ell-\varepsilon<m+\varepsilon$.

Quindi, $\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, si ha $\ell-m<2\varepsilon$. Per il teorema 1.4.1 si ha $\ell-m\le 0$, cioè $\ell\le m$. ■

In particolare, se in questo teorema si sceglie come $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione che vale costantemente b, segue che se, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n\le b$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n\le b$.

2.2.6 Osservazione. Se si rafforza l'ipotesi del teorema del confronto, chiedendo che sia, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n<b_n$, non si può concludere che vale la disuguaglianza stretta tra i limiti.

Consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.1. Nell'esempio 2.2.3 abbiamo stabilito che $1/(n+1)\to 0$. Per l'osservazione 2.2.2 la successione costante $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0. Si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$, $1/(n+1)>0$, ma $\lim_{n\to+\infty} 1/(n+1) = \lim_{n\to+\infty} 0$. ◀

2.2.7 Teorema (della permanenza del segno)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $m\in\mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente.

I) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n > m$ allora esiste $\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, se $n>\overline{n}$ risulta $a_n>m$.

II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n < m$ allora esiste $\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, se $n>\overline{n}$ risulta $a_n<m$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, dalla definizione di limite, scelto $\varepsilon = \ell-m$, si ha:

$$n>n_{\ell-m} \implies a_n\in\,]\ell-(\ell-m),\ell+(\ell-m)[\,=\,]m,2\ell+m[\implies a_n>m\,.$$

La tesi è verificata scegliendo $\overline{n}=n_{\ell-m}$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Questo teorema afferma che una certa proprietà è verificata da tutti i termini di una successione il cui indice è maggiore di una certa soglia (il numero $\overline{n}$ dell'enunciato). Poiché nello studio delle successioni ci si trova spesso in una situazione di questo tipo, è utile la seguente definizione.

Definizione di proprietà valida definitivamente

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathscr{P}(n)$ una proposizione. Diciamo che $\mathscr{P}(n)$ vale **definitivamente** quando
$$\exists m \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > m \implies \mathscr{P}(n).$$

Questa terminologia verrà usata frequentemente quando la proposizione $\mathscr{P}(n)$ è un'affermazione riguardante il termine n-simo di una successione. Ad esempio, il teorema 2.2.7, affermazione I, può essere enunciato nella forma: "se $\lim_{n\to+\infty} a_n > m$, allora definitivamente risulta $a_n > m$".

2.2.8 Esempio. La successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.1 ha sia termini positivi che negativi; ad esempio $a_0 = 1/5$ e $a_3 = -1$. Se $n > 2$, allora $5-2n < 0$, quindi $r_n < 0$. Pertanto i termini della successione non sono tutti negativi, ma sono definitivamente negativi. Spesso questa affermazione viene abbreviata dicendo che la successione è definitivamente negativa. ◀

2.2.9 Osservazione. Siano, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ e $\mathscr{Q}(n)$ proposizioni. Se sia $\mathscr{P}(n)$ che $\mathscr{Q}(n)$ valgono definitivamente, allora anche $\mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{Q}(n)$ vale definitivamente.

Infatti, se $m_P, m_Q \in \mathbb{N}$ sono tali che $n > m_P \implies \mathscr{P}(n)$ e $n > m_Q \implies \mathscr{Q}(n)$, allora $n > \max\{m_P, m_Q\} \implies \mathscr{P}(n) \wedge \mathscr{Q}(n)$. ◀

2.2.10 Esempio. Utilizziamo il teorema della permanenza del segno 2.2.7 per provare che alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1 non hanno limite.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che non esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $v_n \to \ell$.

Se fosse $v_n \to \ell$, con $\ell > 0$, allora, per il teorema delle permanenza del segno 2.2.7, v_n sarebbe definitivamente positivo, ma questo non è vero perché la successione ha termini negativi di indice arbitrariamente grande. Poiché la successione ha anche termini positivi di indice arbitrariamente grande, non può neppure avere limite negativo. Infine non può essere $v_n \to 0$. Infatti, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $|v_n - 0| = \big|(-1)^n\big| = 1$. Pertanto se nella definizione di limite scegliamo $\varepsilon = 1/2$ non si ha mai $|v_n - 0| < \varepsilon$.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che non esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che $w_n \to \ell$.

Come la successione $\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, anche questa ha termini di indice arbitrariamente grande positivi e e termini di indice arbitrariamente grande negativi, quindi non può avere né limite negativo né limite positivo. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha
$$|w_n| = \left|\frac{(-1)^n(n+2)}{n+1}\right| = \frac{n+2}{n+1} > 1,$$
quindi $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non può convergere a 0. ◀

2.2.11 Teorema (dei due carabinieri)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n \le b_n \le c_n$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n\,,$$

allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n\,.$$

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n$, per definizione si ha:

$$\begin{aligned}
&\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>j_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<a_n<\ell+\varepsilon\,,\\
&\forall \varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>k_\varepsilon \implies \ell-\varepsilon<c_n<\ell+\varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Scelto $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, poniamo $n_\varepsilon = \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$; se $n>n_\varepsilon$, allora si ha $n>j_\varepsilon$ e $n>k_\varepsilon$, quindi $\ell-\varepsilon<a_n$ e $c_n<\ell+\varepsilon$; poiché $a_n\le b_n\le c_n$, da qui segue $\ell-\varepsilon<b_n<\ell+\varepsilon$.

Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$. ■

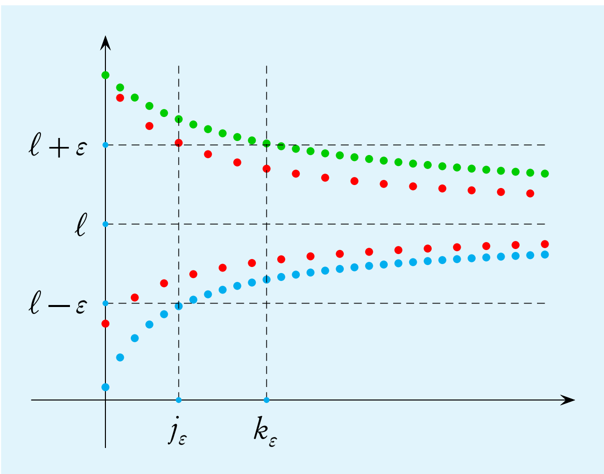


Figura 2.2.2
Illustrazione della dimostrazione del teorema dei due carabinieri 2.2.11.
In blu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, in rosso $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e in verde $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Se $n>j_\varepsilon$, allora $a_n>\ell-\varepsilon$, quindi si ha anche $b_n>\ell-\varepsilon$; se $n>k_\varepsilon$, allora $c_n<\ell+\varepsilon$, quindi si ha anche $b_n<\ell+\varepsilon$. I termini di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di indice maggiore sia di j_ε che di k_ε sono compresi tra $\ell-\varepsilon$ e $\ell+\varepsilon$.

2.2.12 Esempio. Sia $k\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Consideriamo le successioni $(0)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big((n+1)^{-k}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(p_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((n+1)^{-1}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ (v. esempio 2.1.1). Poiché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $1+n\le(1+n)^k$, risulta $0<(n+1)^{-k}\le 1/(1+n)$. La successione $(0)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite 0 e nell'esempio 2.2.3 abbiamo provato che $1/(n+1)\to 0$. Pertanto, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, risulta $(n+1)^{-k}\to 0$.

Osserviamo che si ha anche $n^{-k}\to 0$. Infatti, fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, se n_ε è tale che per $n>n_\varepsilon$ si ha $(n+1)^{-k}<\varepsilon$, allora per $n>n_\varepsilon+1$ si ha $n^{-k}<\varepsilon$. ◀

2.2.2 Successioni divergenti

Vi sono successioni per cui i termini di indice grande non si “avvicinano” ad alcun numero reale, ma diventano essi stessi “grandi” in valore assoluto, con segno sempre positivo o sempre negativo. Nello stesso ordine di idee della definizione di limite reale di una successione, diamo due definizioni per individuare le successioni che hanno questo comportamento.

Definizione di limite $+\infty$ e $-\infty$ di una successione

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha **limite** $+\infty$ quando

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_M\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_M \implies a_n>M;$$

in tal caso scriviamo $\lim_{n\to+\infty} a_n=+\infty$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha **limite** $-\infty$ quando

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_M\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_M \implies a_n<M;$$

in tal caso scriviamo $\lim_{n\to+\infty} a_n=-\infty$.

Osserviamo che nella definizione di limite $+\infty$, se la condizione $a_n>M$ è verificata per un certo numero M allora è verificata per tutti gli M minori; di conseguenza, se la condizione è verificata per ogni $M\in\mathbb{R}^+$, allora è verificata per ogni $M\in\mathbb{R}$.

Nel caso di limite $-\infty$ si ha analogamente che è sufficiente chiedere che la condizione sia verificata per gli M appartenenti a $\mathbb{R}^-$.

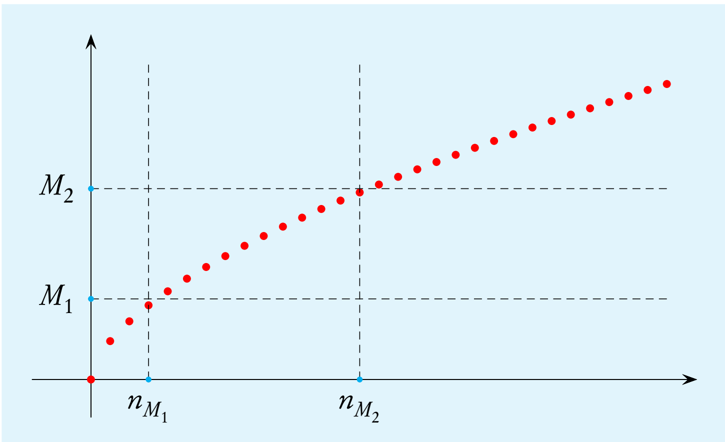


Figura 2.2.3
Illustrazione della definizione di limite uguale a $+\infty$.
I termini della successione di indice maggiore di n_{M_1} sono maggiori di M_1.
Lo stesso avviene se si sostituisce M_2 a M_1.

Definizione di successione divergente

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **divergente** quando $a_n\to+\infty$ oppure $a_n\to-\infty$.
In particolare diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **divergente positivamente** o **divergente a** $+\infty$ nel primo caso, **divergente negativamente** o **divergente a** $-\infty$ nel secondo caso.

È utile definire un termine per indicare tutte le successioni che hanno limite, sia esso reale o $\pm\infty$.

Definizione di successione regolare e successione oscillante

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **regolare** quando è convergente o divergente, cioè quando ha limite.
In caso contrario diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **oscillante**.

2.2.13 Esempio. Studiamo i limiti di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite $+\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$. Qualunque sia $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M \geq M$, se $n > n_M$ si ha $s_n = n > n_M \geq M$. Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$.

Consideriamo la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+(-1)^n-1)/4\big)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite $+\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = \frac{2n+(-1)^n-1}{4} \geq \frac{2n-2}{4} = \frac{n-1}{2};$$

Pertanto se $n-1 > 2M$, allora si ha $t_n > M$. Quindi, scelto $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M \geq 2M+1$, se $n > n_M$ risulta $t_n > M$. Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} t_n = +\infty$.

Consideriamo la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3-n)_{n\in\mathbb{N}}$, dimostriamo che ha limite $-\infty$.

Sia $M \in \mathbb{R}$. Si ha $u_n < M$ se e solo se $3-n < M$, cioè $n > 3-M$. Pertanto qualunque sia $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $n_M \geq 3-M$, se $n > n_M$ si ha $3-n < M$. Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. ◀

Per provare la divergenza di una successione vale un teorema analogo al teorema dei due carabinieri 2.2.11.

2.2.14 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \leq b_n$.

I) Se $a_n \to +\infty$ allora anche $b_n \to +\infty$.

II) Se $b_n \to -\infty$ allora anche $a_n \to -\infty$.

Dimostrazione. I) Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M.$$

Qualunque sia $M \in \mathbb{R}$, se $n > n_M$ si ha $b_n \geq a_n > M$, cioè $b_n > M$, pertanto $b_n \to +\infty$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

2.2.15 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^k \geq n$ e $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.13). Pertanto, per il teorema 2.2.14, affermazione I, $n^k \to +\infty$. ◀

2.2.16 Esempio. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, risulta $n! \geq n$. Questo vale evidentemente per $n = 0$. Se si pensa al fattoriale di n come al prodotto dei numeri da 1 a n, l'affermazione è evidente anche per $n > 0$. Infatti ogni fattore è maggiore o uguale a 1, quindi il prodotto è maggiore o uguale a ogni fattore, in particolare maggiore o uguale a n.

Una dimostrazione rigorosa della disuguaglianza $n! \geq n$ richiede il principio di induzione, che applichiamo a partire da 1, invece che da 0. Poiché $1! = 1$ l'affermazione vale per $n = 1$. Se vale per n, allora

$$(n+1)! = (n+1)\, n! \geq (n+1)n \geq n+1,$$

dove nella prima disuguaglianza abbiamo usato l'ipotesi induttiva. Quindi l'affermazione vale per $n+1$.

Poiché $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.13), per il teorema 2.2.14, affermazione I, si ha anche $n! \to +\infty$. ◀

2.2.3 Successioni regolari

Introduciamo alcune definizioni per unificare, per quanto possibile, i teoremi relativi alle successioni convergenti e quelli relativi alle successioni divergenti. Introduciamo anzitutto un insieme contenente tutti i possibili limiti di successioni.

Definizione di insieme dei numeri reali esteso

Chiamiamo **insieme dei numeri reali esteso** (o anche **retta reale estesa**) e indichiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme ottenuto aggiungendo ai numeri reali due oggetti che indichiamo con i simboli $-\infty$ e $+\infty$ (si leggono rispettivamente "meno infinito" e "più infinito"). Abbiamo quindi

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

La relazione di $\leq$ in $\mathbb{R}$ può essere estesa a una relazione in $\overline{\mathbb{R}}$ che è ancora di ordine lineare. È invece impossibile estendere le operazioni di addizione e di moltiplicazione a $\overline{\mathbb{R}}$ in modo che continuino a valere le abituali proprietà di tali operazioni (e in particolare gli assiomi di campo C1–C9). Per tale motivo i simboli $x+y$ e $x \cdot y$ non hanno significato nel caso che x o y siano $+\infty$ o $-\infty$. Utilizziamo però la notazione $-x$ quando $x = \pm\infty$, intendendo che $-(+\infty) = -\infty$ e $-(-\infty) = +\infty$; la notazione è impropria perché non essendo definita la somma non è possibile parlare di opposto.

La relazione di $\leq$ è estesa a $\overline{\mathbb{R}}$ considerando $+\infty$ maggiore di ogni numero reale e di $-\infty$ e $-\infty$ minore di ogni numero reale (e ovviamente di $+\infty$). Si ha quindi

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}}, \quad -\infty \leq x \leq +\infty.$$

Con questa definizione (intendendo come al solito che $x < y$ significa $x \leq y$, ma $x \neq y$) $x < +\infty$ è equivalente a $x \neq +\infty$ e analogamente $x > -\infty$ è equivalente a $x \neq -\infty$.

Talvolta per esprimere il fatto che un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ appartiene a $\mathbb{R}$ (cioè non è né $+\infty$ né $-\infty$) si dice che esso è "finito".

Nella definizione di successione che tende a $c \in \mathbb{R}$ si considera la condizione $|a_n - c| < \varepsilon$, che equivale a $a_n \in \,]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$. Se il limite è $+\infty$ gioca un ruolo analogo la condizione $a_n > M$, cioè $\_n \in \,]M, +\infty[$, mentre se il limite è $-\infty$ utilizziamo la condizione $a_n < M$, cioè $a_n \in \,]-\infty, M[$.

È utile dare un nome agli insiemi individuati sopra.

Definizione di intorno di un elemento di $\overline{\mathbb{R}}$

Sia $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
Se $c \in \mathbb{R}$ chiamiamo **intorno** di c ogni insieme del tipo $]c-\varepsilon, c+\varepsilon[$ con $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$.
Se $c = +\infty$ chiamiamo **intorno** di c ogni insieme del tipo $]M, +\infty[$ con $M \in \mathbb{R}$.
Se $c = -\infty$ chiamiamo **intorno** di c ogni insieme del tipo $]-\infty, M[$ con $M \in \mathbb{R}$.
In ogni caso indichiamo con $\mathscr{I}_c$ l'insieme degli intorni di c.

Pertanto, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha

$$\mathscr{I}_c = \left\{]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\;\middle|\; \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \right\},$$

inoltre

$$\mathscr{I}_{+\infty} = \left\{]M, +\infty[\;\middle|\; M \in \mathbb{R} \right\},$$
$$\mathscr{I}_{-\infty} = \left\{]-\infty, M[\;\middle|\; M \in \mathbb{R} \right\}.$$

Utilizzando il concetto di intorno, le definizioni di limite reale, $+\infty$ e $-\infty$ possono essere unificate. Infatti è facile verificare che, se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell, \exists n_U \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_U \implies a_n \in U.$$

I teoremi della permanenza del segno 2.2.5 e del confronto 2.2.7, visti per le successioni convergenti, valgono anche per successioni divergenti e quindi, in generale, per le successioni regolari.

2.2.17 Teorema (del confronto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ siano regolari. Se, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n \le b_n$, allora $\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Se $\ell = -\infty$, allora $\ell \le m$; se invece $\ell = +\infty$, allora, per il teorema 2.2.14, affermazione I, anche $m = +\infty$.

Se $m = -\infty$, allora, per il teorema 2.2.14, affermazione II, anche $\ell = -\infty$; se invece $m = +\infty$, allora $\ell \le m$.

Infine se $\ell, m \in \mathbb{R}$, allora, per il teorema 2.2.5, si ha $\ell \le m$. ■

2.2.18 Teorema (della permanenza del segno)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{R}$. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia regolare.

I) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n > m$ allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n > \overline{n}$ risulta $a_n > m$.

II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_n < m$ allora esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n > \overline{n}$ risulta $a_n < m$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Poiché $\ell > m \in \mathbb{R}$, risulta $\ell \neq -\infty$.
Se $\ell \in \mathbb{R}$, allora abbiamo il teorema della permanenza del segno 2.2.7, affermazione I.
Se $\ell = +\infty$, allora la tesi segue immediatamente dalla definizione di limite.
II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Il seguente teorema fornisce un collegamento tra il fatto che una successione abbia limite e la sua limitatezza.

2.2.19 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata.

II) Se $a_n \to +\infty$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata e superiormente illimitata.

III) Se $a_n \to -\infty$ allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata e inferiormente illimitata.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon .$$

Se $n > n_1$, allora $\ell - 1 < a_n < \ell + 1$. Dunque $\ell - 1$ e $\ell + 1$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante di $\{a_n \mid n > n_1\}$.

Poniamo $a = \min\bigl(\{a_n \mid n \leq n_1\} \cup \{\ell - 1\}\bigr)$ e $b = \max\bigl(\{a_n \mid n \leq n_1\} \cup \{\ell + 1\}\bigr)$. È evidente che a è un minorante di $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; infatti se $n > n_1$ allora $a_n > \ell - 1 \geq a$, mentre se $n \leq n_1$ allora $a_n \geq \min\{a_n \mid n \leq n_1\} \geq a$. Analogamente b è un maggiorante di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, quindi la successione ha sia minoranti che maggioranti, perciò è limitata.
II) Per definizione si ha:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists n_M \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_M \implies a_n > M .$$

Pertanto $\forall M \in \mathbb{R}$ esistono termini della successione maggiori di M, quindi la successione non ammette maggioranti, cioè è superiormente illimitata.

Se $n > n_0$ si ha $a_n > 0$, perciò, posto $a = \min\bigl(\{a_n \mid n \leq n_0\} \cup \{0\}\bigr)$, ragionando come al punto precedente si prova che a è un minorante di $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$; quindi la successione è inferiormente limitata.
III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

Da questo teorema segue subito che una successione convergente non può essere divergente, mentre una successione divergente a $+\infty$ non può essere divergente a $-\infty$. Quindi il teorema di unicità del limite 2.2.4 vale considerando non solo limiti reali, ma anche limiti in $\overline{\mathbb{R}}$. Vale cioè il seguente teorema.

2.2.20 Teorema (di unicità del limite)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\ell, m \in \overline{\mathbb{R}}$. Se $a_n \to \ell$ e $a_n \to m$, allora $\ell = m$.

Il concetto di limite di una successione dipende solo dai valori che la successione assume per valori grandi dell'indice. In altre parole modificando un numero finito di termini di una successione il limite, se esiste, non cambia. Ciò è precisato dal seguente teorema.

2.2.21 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$. Supponiamo che esista $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, se $n > \overline{n}$ risulta $a_n = b_n$.
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare, allora anche $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$.

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists n_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_U \implies a_n \in U.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, poniamo $k_U = \max\{\overline{n}, n_U\}$. Se $n > k_U$, allora si ha $a_n \in U$ e $b_n = a_n$, quindi $n > k_U \implies b_n \in U$; perciò è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} b_n = \ell$. ■

2.2.22 Osservazione. L'ipotesi del teorema può essere espressa anche dicendo che le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ differiscono al più per un numero finito di termini. Infatti può essere $a_n \neq b_n$ solo se $n \leq \overline{n}$, quindi le due successioni hanno al più $\overline{n}+1$ termini diversi. Viceversa se le due successioni hanno un numero finito di termini diversi, allora, indicato con $\overline{n}$ il più grande indice tale che $a_{\overline{n}} \neq b_{\overline{n}}$, evidentemente si ha $n > \overline{n} \implies a_n = b_n$.

Questa osservazione ha carattere generale: una proprietà vale definitivamente per una successione se e solo se è verificata da tutti i termini tranne, al più, un numero finito. ◄

2.2.23 Osservazione. Questo teorema ha una importante conseguenza: ogni proprietà del limite di una successione che vale se una determinata ipotesi è verificata da ogni termine della successione, vale anche se l'ipotesi è verificata solo definitamente.

Infatti se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica l'ipotesi definitivamente, modificando opportunamente i termini a_n che non verificano l'ipotesi, si costruisce una successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definitivamente uguale a $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e avente tutti i termini che verificano l'ipotesi. Quindi $\lim_{n\to+\infty} b_n$ ha la proprietà considerata, per il teorema 2.2.21 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n$, pertanto anche $\lim_{n\to+\infty} a_n$ ha la proprietà considerata.

Ad esempio, è una immediata conseguenza del teorema del confronto 2.2.17 il fatto che una successione regolare a termini non negativi ha limite non negativo. Il ragionamento appena fatto ci consente di concludere che anche le successioni regolari a termini definitivamente non negativi hanno limite non negativo. ◄

2.3 Operazioni sui limiti

Studiamo ora il limite di successioni ottenute, mediante le operazioni, da altre successioni. Iniziamo con le successioni espresse come somma di due successioni.

2.3.1 Teorema (sul limite della somma)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti allora anche $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to+\infty}a_n+\lim_{n\to+\infty}b_n\,.$$

II) Se $a_n\to+\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata allora $a_n+b_n\to+\infty$.

III) Se $a_n\to+\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite diverso da $-\infty$ allora $a_n+b_n\to+\infty$.

IV) Se $a_n\to-\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata allora $a_n+b_n\to-\infty$.

V) Se $a_n\to-\infty$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite diverso da $+\infty$ allora $a_n+b_n\to-\infty$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell=\lim_{n\to+\infty}a_n$ e $m=\lim_{n\to+\infty}b_n$, per definizione si ha:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>j_\varepsilon\implies|a_n-\ell|<\varepsilon\,,$$
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>k_\varepsilon\implies|b_n-m|<\varepsilon\,.$$

Posto $n_\varepsilon=\max\{j_\varepsilon,k_\varepsilon\}$, se $n>n_\varepsilon$ risulta

$$\big|(a_n+b_n)-(\ell+m)\big|=\big|(a_n-\ell)+(b_n-m)\big|\le|a_n-\ell|+|b_n-m|<2\varepsilon\,.$$

Se $\eta\in\mathbb{R}^+$, si ha $\eta=2(\eta/2)$ e $\eta/2\in\mathbb{R}^+$. Pertanto possiamo ottenere la disuguaglianza $\big|(a_n+b_n)-(\ell+m)\big|<\eta$ scegliendo, nel ragionamento precedente, $\varepsilon=\eta/2$. Quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty}(a_n+b_n)=\ell+m$.

II) Per definizione si ha:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_M\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_M\implies a_n>M\,;$$

poiché $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata, esiste $b\in\mathbb{R}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $b_n\ge b$, quindi

$$n>n_M\implies a_n+b_n>M+b\,.$$

Poiché, scegliendo opportunamente M in $\mathbb{R}$, ogni numero reale può essere scritto nella forma $M+b$, risulta verificata la definizione di $a_n+b_n\to+\infty$.

III) Per il teorema 2.2.19, affermazioni I e II, le ipotesi dell'affermazione precedente sono verificate, quindi vale la tesi.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II.

V) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione III. ■

Questo teorema consente di calcolare il limite della somma di due successioni quando si conosce il limite di ciascuno dei due addendi, con l'esclusione del caso in cui una delle successioni diverge a $+\infty$ e l'altra diverge a $-\infty$. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata.**

Precisiamo che parlare di forma indeterminata non significa che il limite non esiste o che non lo si sa calcolare, ma soltanto che le sole informazioni su qual è il limite delle due successioni che si sommano non sono sufficienti per trarre conclusioni sul limite della successione somma. Occorre quindi esprimere i termini della successione in una forma diversa.

Studiamo il limite di successioni espresse come prodotto di due successioni.

2.3.2 Teorema (sul limite del prodotto)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti allora anche $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

II) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $\inf\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\} > 0$ allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

III) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite maggiore di 0 allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

IV) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $\sup\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\} < 0$ allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = -\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

V) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite minore di 0 allora $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente e

$$\lim_{n\to+\infty}(a_n b_n) = -\lim_{n\to+\infty} a_n .$$

VI) Se $a_n \to 0$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora $a_n b_n \to 0$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $m = \lim_{n\to+\infty} b_n$, per definizione si ha: Si ha

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists j_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n > j_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon ,$$
$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists k_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n > k_\varepsilon \implies |b_n - m| < \varepsilon .$$

Posto $n_\varepsilon = \max\{j_\varepsilon, k_\varepsilon\}$, se $n > n_\varepsilon$ si ha:

$$|a_n b_n - \ell m| = |(a_n b_n - a_n m) + (a_n m - \ell m)| \le |a_n b_n - a_n m| + |a_n m - \ell m| =$$
$$= |a_n||b_n - m| + |a_n - \ell||m| \le |a_n|\varepsilon + \varepsilon|m| .$$

Poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, essa è limitata per il teorema 2.2.19, affermazione I, perciò $\{|a_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente limitato; sia c un numero maggiore dell'estremo superiore di tale insieme. Si ha allora

$$n > n_\varepsilon \implies |a_n b_n - \ell m| \leq \big(|a_n| + |m|\big)\varepsilon < \big(c + |m|\big)\varepsilon ;$$

poiché ogni numero reale positivo può essere scritto come $\big(c+|m|\big)\varepsilon$, con $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$ opportuno, è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \ell m$.

II) Supponiamo $a_n \to +\infty$, il caso $a_n \to -\infty$ si tratta in modo analogo.

Poniamo $b = \inf\{b_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, per ipotesi $b > 0$. Per definizione si ha:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_M\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n > n_M \implies a_n > M ;$$

se $M\in\mathbb{R}^+$ da qui segue

$$n > n_M \implies a_n b_n > M b_n \geq bM ,$$

pertanto $a_n b_n \to +\infty$.

III) Per il teorema della permanenza del segno 2.2.18 se $m\in\mathbb{R}^+$ è tale che $m < \lim_{n\to+\infty} b_n$, allora $\exists \overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che, per $n > \overline{n}$, si ha $b_n > m$, quindi

$$\inf\{b_n \mid n > \overline{n}\} \geq m > 0 .$$

Quindi $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ verifica definitivamente la condizione richiesta nell'affermazione II, allora (v. osservazione 2.2.23) vale la conclusione di tale affermazione, cioè $a_n b_n \to +\infty$.

IV) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione II.

V) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione III.

VI) Per definizione si ha:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n > n_\varepsilon \implies |a_n| < \varepsilon .$$

Poiché $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata anche $\{|b_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$ è limitato; scegliamo $b > \sup\{|b_n| \mid n\in\mathbb{N}\}$. Se $n > n_\varepsilon$ si ha $|a_n b_n| < b\varepsilon$; pertanto $a_n b_n \to 0$. ■

Questo teorema consente di calcolare il limite del prodotto di due successioni se si conosce il limite di ciascuno dei due fattori, con l'esclusione del caso in cui una delle successioni diverge e l'altra converge a 0. In tal caso si dice che si ha un limite in **forma indeterminata**.

Vale anche per la forma indeterminata del prodotto quanto osservato per la forma indeterminata della somma.

2.3.3 Esempio. Sia $a\in\,]1,+\infty[$. Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. esempio 1.3.5), si ha

$$a^n = \big(1 + (a-1)\big)^n \geq 1 + (a-1)n > (a-1)n .$$

Poiché $a - 1 > 0$ e $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$, per il teorema sul limite del prodotto 2.3.2, affermazione III, risulta $(a-1)n \to +\infty$, pertanto, per il teorema 2.2.14, affermazione I, risulta $a^n \to +\infty$. ◀

2.3.4 Teorema (sul limite del reciproco)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n\neq 0$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e $\lim_{n\to+\infty} a_n\neq 0$ allora anche $(1/a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n}=\frac{1}{\lim_{n\to+\infty} a_n}\,.$$

II) Se $a_n\to 0$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n>0$ allora $1/a_n\to+\infty$.

III) Se $a_n\to 0$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n<0$ allora $1/a_n\to-\infty$.

IV) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente allora $1/a_n\to 0$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell=\lim_{n\to+\infty} a_n$; sappiamo che $\ell\neq 0$. Per definizione si ha:

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_\varepsilon\implies |a_n-\ell|<\varepsilon\,.$$

Risulta

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\ell}\right|=\left|\frac{\ell-a_n}{a_n\ell}\right|=\frac{|\ell-a_n|}{|a_n|\,|\ell|}\,.$$

Se $\ell>0$, allora $\ell>\ell/2$, quindi, per il teorema della permanenza del segno 2.2.18, $\exists\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che se $n>\overline{n}$ allora $a_n>\ell/2$; se invece $\ell<0$ allora $\ell<\ell/2$, per cui $\exists\overline{n}\in\mathbb{N}$ tale che se $n>\overline{n}$ allora $a_n<\ell/2$. In ciascuno dei due casi per $n>\overline{n}$ risulta $|a_n|>|\ell|/2$. Quindi, se $n>\max\{\overline{n},n_\varepsilon\}$, si ha

$$\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{\ell}\right|=\frac{|\ell-a_n|}{|a_n|\,|\ell|}<\frac{\varepsilon}{\frac{|\ell|}{2}\,|\ell|}=\frac{2}{|\ell|^2}\varepsilon\,,$$

quindi $1/a_n\to 1/\ell$.

II) Se $\forall n\in\mathbb{N}$ si ha $a_n>0$, allora la definizione di $a_n\to 0$ diventa

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_\varepsilon\implies a_n<\varepsilon\,.$$

Se $n>n_\varepsilon$, si ha $1/a_n>1/\varepsilon$; perciò, $\forall M\in\mathbb{R}^+$, se $n>n_{1/M}$ si ha $1/a_n>M$. Quindi $1/a_n\to+\infty$.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente.

IV) Consideriamo il caso $a_n\to+\infty$. Per definizione si ha:

$$\forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_M\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_M\implies a_n>M\,.$$

In particolare se M è positivo, dalla disuguaglianza $a_n>M$, valida per ogni $n>n_M$, segue

$$0<\frac{1}{a_n}<\frac{1}{M}\,.$$

Perciò fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n > n_{1/\varepsilon}$ allora si ha

$$0 < \frac{1}{a_n} < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} = \varepsilon .$$

Quindi $1/a_n \to 0$.

Nel caso $a_n \to -\infty$ la dimostrazione è analoga. ■

Poiché $a_n/b_n = a_n(1/b_n)$, da questo teorema e da quello sul limite del prodotto 2.3.2, si possono ottenere informazioni sul limite del quoziente. Non sempre si può applicare il teorema sul limite del prodotto, sappiamo infatti che questo non dà informazioni nel caso del prodotto tra una successione infinitesima e una successione divergente. Studiando un quoziente ci si trova in questa situazione in due casi: quando la successione a numeratore e quella a denominatore sono entrambe infinitesime e quando sono entrambe divergenti. Abbiamo quindi, come per la somma e il prodotto, limiti che si presentano in **forma indeterminata**.

2.3.5 Esempio. Sia $a \in \,]0,1[$. Si ha

$$a^n = \frac{1}{(1/a)^n}$$

e $1/a > 1$; pertanto (v. esempio 2.3.3) $(1/a)^n \to +\infty$, quindi, per il teorema sul limite del reciproco 2.3.4, affermazione IV, risulta $a^n \to 0$. ◀

2.3.6 Teorema (sul limite del valore assoluto)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora anche $\big(|a_n|\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente e

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = \left|\lim_{n\to+\infty} a_n\right|.$$

II) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è divergente allora $|a_n| \to +\infty$.

III) Se $|a_n| \to 0$ allora $a_n \to 0$.

Dimostrazione. I) Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon .$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n > n_\varepsilon$, per le proprietà del valore assoluto 1.2.31, affermazione V, si ha

$$\big||a_n| - |\ell|\big| \le |a_n - \ell| < \varepsilon ;$$

quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = |\ell|$.

II) Se $a_n \to +\infty$, poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $|a_n| \geq a_n$, per il teorema 2.2.14, affermazione I, risulta $|a_n| \to +\infty$.

Se invece $a_n \to -\infty$, poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $-|a_n| \leq a_n$, per il teorema 2.2.14, affermazione II, risulta $-|a_n| \to -\infty$, quindi $|a_n| \to +\infty$.

III) Per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies \big||a_n| - 0\big| < \varepsilon;$$

poiché $\big||a_n| - 0\big| = |a_n| = |a_n - 0|$, questa definizione coincide con quella di $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. ■

2.3.7 Esempio. Sia $a \in]-1, 0[$. Si ha $|a^n| = |a|^n$ e $|a| \in]0, 1[$; pertanto (v. esempio 2.3.5) $|a^n| \to 0$, quindi, per il teorema sul limite del valore assoluto 2.3.6, affermazione III, risulta $a^n \to 0$. ◀

2.4 Confronto di successioni

2.4.1 Criterio del rapporto

Vediamo un criterio utile per stabilire il limite di varie successioni a termini positivi. In numerosi casi questo criterio consente di determinare il limite di successioni che si presentano come quoziente in forma indeterminata, $0/0$ o ∞/∞, cioè consente di confrontare tra loro due successioni infinitesime o due successioni divergenti.

2.4.1 Teorema (criterio del rapporto)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^+$ tale che esiste $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$.

I) Se $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n < 1$, allora $a_n \to 0$.

II) Se $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n > 1$, allora $a_n \to +\infty$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n$. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n + 1/a_n > 0$, per il teorema del confronto 2.2.17 risulta $\ell \geq 0$.

I) Se $\ell < 1$, poniamo $m = (\ell + 1)/2$. Risulta $\ell < m < 1$, quindi per il teorema della permanenza del segno 2.2.18, affermazione II, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_{n+1}/a_n < m$, cioè $a_{n+1} < m a_n$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} &a_{\overline{n}+1} < m a_{\overline{n}}, \\ &a_{\overline{n}+2} < m a_{\overline{n}+1} < m^2 a_{\overline{n}}, \end{aligned}$$

ripetendo il ragionamento, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta $a_{\overline{n}+k} < m^k a_{\overline{n}}$. Pertanto, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_n < m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}}$. Poiché $m \in]0, 1[$ si ha $m^n \to 0$ (v. esempio 2.3.5), quindi si ha anche $m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}} = m^n m^{-\overline{n}} a_{\overline{n}} \to 0$. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_n > 0$, pertanto, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, risulta $a_n \to 0$.

II) Se $\ell \in]1,+\infty[$, poniamo $m = (\ell+1)/2$, mentre, se $\ell = +\infty$, poniamo $m = 2$. In ogni caso risulta $\ell > m > 1$, quindi per il teorema della permanenza del segno 2.2.18, affermazione I, esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_{n+1}/a_n > m$, cioè $a_{n+1} > ma_n$. Pertanto si ha

$$\begin{aligned} &a_{\overline{n}+1} > ma_{\overline{n}}, \\ &a_{\overline{n}+2} > ma_{\overline{n}+1} > m^2 a_{\overline{n}}, \end{aligned}$$

ripetendo il ragionamento, per ogni $k \in \mathbb{N}$, risulta $a_{\overline{n}+k} > m^k a_{\overline{n}}$. Pertanto, se $n \geq \overline{n}$, allora $a_n > m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}}$. Poiché $m \in]1,+\infty[$ si ha $m^n \to +\infty$ (v. esempio 2.3.3), quindi si ha anche $m^{n-\overline{n}} a_{\overline{n}} = m^n m^{-\overline{n}} a_{\overline{n}} \to +\infty$. Per il teorema 2.2.14, affermazione I, risulta $a_n \to +\infty$. ■

2.4.2 Osservazione. Nel caso in cui il limite studiato in questo teorema sia 1, non si può concludere nulla sul limite di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Infatti si verifica facilmente che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una delle successioni $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(1/(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ o $(\ell)_{n\in\mathbb{N}}$ (con $\ell \in \mathbb{R}^+$), allora $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1}/a_n = 1$ e queste successioni hanno limiti diversi. Infatti $n \to +\infty$ (v. esempio 2.2.13), $1/(n+1) \to 0$ (v. esempio 2.2.3) e $\ell \to \ell$. ◀

2.4.3 Esempio. Siano $k \in \mathbb{N}^*$ e $a \in]1,+\infty[$. Si ha $n^k \to +\infty$ (v. esempio 2.2.15) e $a^n \to +\infty$ (v. esempio 2.3.3), pertanto $\lim_{n\to+\infty} n^k/a^n$ si presenta in forma indeterminata. La successione $(n^k/a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto 2.4.1. Si ha

$$\frac{(n+1)^k/a^{n+1}}{n^k/a^n} = \frac{(n+1)^k a^n}{a^{n+1} n^k} = \frac{1}{a}\left(\frac{n+1}{n}\right)^k = \frac{1}{a}\left(1+\frac{1}{n}\right)^k \to \frac{1}{a}.$$

Poiché $1/a < 1$, per il criterio del rapporto 2.4.1 si ha $n^k/a^n \to 0$. ◀

2.4.4 Esempio. Sia $a \in]1,+\infty[$. Si ha $a^n \to +\infty$ (v. esempio 2.3.3) e $n! \to +\infty$ (v. esempio 2.2.16), pertanto $\lim_{n\to+\infty} a^n/n!$ si presenta in forma indeterminata. La successione $(a^n/n!)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi, applichiamo il criterio del rapporto 2.4.1. Si ha

$$\frac{a^{n+1}/(n+1)!}{a^n/n!} = \frac{a^{n+1} n!}{a^n (n+1)!} = \frac{a}{n+1} \to 0.$$

Per il criterio del rapporto 2.4.1 si ha $a^n/n! \to 0$. ◀

2.4.2 Simboli di Landau

Introduciamo alcuni simboli utili per semplificare il calcolo dei limiti. Alla base dell'introduzione di questi simboli c'è l'osservazione che nel calcolo di un limite spesso non è necessario conoscere l'espressione precisa di una successione, ma interessa soltanto il suo "comportamento all'infinito". I simboli che introduciamo sono detti **simboli di Landau**.[3]

[3] I simboli prendono il nome da Edmund Landau (Berlino, 1877 - Berlino, 1938), studioso di teoria dei numeri, che li utilizzò in un trattato del 1909.
Il simbolo o grande era già stato introdotto da Paul Bachmann (Berlino, 1837 - Weimar, Germania, 1920), anch'egli studioso di teoria dei numeri, nel 1894.

Definizione di successione asintotica

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, sia $b_n\neq 0$. Diciamo che a_n è **asintotica** (o **equivalente**) a b_n quando esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 1$. In tal caso scriviamo $a_n\sim b_n$.

Utilizzeremo questa definizione anche se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si annulla per qualche valore di n, purché tale successione sia definitivamente non nulla, in modo che abbia comunque senso parlare di limite del quoziente.

L'utilità del concetto di equivalenza di successioni è dovuta al seguente teorema.

2.4.5 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, sia $b_n\neq 0$. Supponiamo che sia $a_n\sim b_n$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare se e solo se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e in tal caso si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n .$$

Dimostrazione. Poniamo, $\forall n\in\mathbb{N}$, $h_n = a_n/b_n$. Per ipotesi $a_n\sim b_n$, quindi

$$\lim_{n\to+\infty} h_n = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n} = 1 .$$

Supponiamo $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ regolare. Poiché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_n = h_n b_n$, a_n è prodotto di due successioni regolari, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$, che ha limite 1, pertanto, per il teorema sul limite del prodotto 2.3.2, anche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e il limite coincide con quello di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Viceversa, supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ regolare. Poiché $\lim_{n\to+\infty} h_n > 0$, per il teorema del confronto 2.2.5, definitivamente $h_n > 0$, quindi $a_n\neq 0$ e risulta $b_n = a_n/h_n$. Come sopra, da qui segue che b_n è regolare. ■

Questo teorema assicura che per determinare il limite di una successione si può studiare il limite di una successione asintotica a essa; questo consente, in molti casi, di ricondursi allo studio di una successione più semplice.

2.4.6 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k\in\mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j x^j ,$$

con $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}\in\mathbb{R}$ e $\alpha_k\in\mathbb{R}^*$. Studiamo la successione $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha, $\forall n\in\mathbb{N}$,

$$p(n) = \sum_{j=0}^{k}\alpha_j n^j = \alpha_k n^k \sum_{j=0}^{k}\frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} = \alpha_k n^k\left(\sum_{j=0}^{k-1}\frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} + 1\right).$$

Per $j = 0, 1, \dots, k-1$ si ha $j - k < 0$, quindi $n^{j-k} \to 0$ (v. esempio 2.2.12), pertanto

$$\sum_{j=0}^{k-1} \frac{\alpha_j}{\alpha_k} n^{j-k} + 1 \to 1 .$$

Quindi si ha $p(n) \sim \alpha_k n^k$.

Poiché $n^k \to +\infty$ (v. esempio 2.2.15), per il teorema sul limite del prodotto 2.3.2, se $\alpha_k > 0$, allora $\alpha_k n^k \to +\infty$, mentre se $\alpha_k < 0$, allora $\alpha_k n^k \to -\infty$. Per il teorema 2.4.5 possiamo concludere che $\big(p(n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, positivamente se il coefficiente del termine di grado massimo è positivo, negativamente in caso contrario. ◀

Il seguente teorema è una immediata conseguenza della definizione di successione asintotica e dei teoremi sul limite del prodotto 2.3.2, affermazione I e sul limite del reciproco 2.3.4, affermazione I.

2.4.7 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}^*$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

I) Se $a_n \sim c_n$ e c_n e $b_n \sim d_n$, allora $a_n b_n \sim c_n d_n$.

II) Se $c_n \sim d_n$, allora $1/c_n \sim 1/d_n$.

2.4.8 Esempio. Consideriamo una funzione razionale fratta r. Siano cioè

$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j , \qquad q(x) = \sum_{j=0}^{m} \beta_j x^j ,$$

con $k \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{m-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k, \beta_m \in \mathbb{R}^*$ e poniamo $r(x) = p(x)/q(x)$ per gli $x \in \mathbb{R}$ che non annullano il denominatore. Poiché un polinomio ha al più un numero finito di radici, $r(n)$ è definito per gli n naturali, escluso al più un numero finito. Possiamo quindi studiare il limite di $r(n)$.

Come visto nell'esempio 2.4.6, si ha $p(n) \sim \alpha_k n^k$ e $q(n) \sim \beta_m n^m$. Pertanto, per il teorema 2.4.7, si ha

$$r(n) = p(n)\frac{1}{q(n)} \sim \alpha_k n^k \frac{1}{\beta_m n^m} = \frac{\alpha_k}{\beta_m} n^{k-m} .$$

Se $k > m$, allora $n^{k-m} \to +\infty$ (v. esempio 2.2.15), se $k = m$, allora $n^{k-m} = 1$, se $k < m$, allora $n^{k-m} \to 0$ (v. esempio 2.2.12). Pertanto, per il teorema 2.4.5, risulta

$$r(n) \to \begin{cases} +\infty , & \text{se } k > m \text{ e } \alpha_k \beta_m > 0 , \\ -\infty , & \text{se } k > m \text{ e } \alpha_k \beta_m < 0 , \\ \dfrac{\alpha_k}{\beta_m} , & \text{se } k = m , \\ 0 , & \text{se } k < m . \end{cases}$$

◀

Definizione di successione trascurabile

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $b_n \neq 0$. Diciamo che a_n è **trascurabile** rispetto a b_n quando esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n/b_n = 0$. In tal caso scriviamo $a_n = o(b_n)$ (si legge "a_n è o piccolo di b_n").

Come nel caso dell'asintoticità, useremo questa notazione anche se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è solo definitivamente diversa da 0.

2.4.9 Osservazione. Osserviamo che l'uso del simbolo $=$ per indicare che una successione è trascurabile rispetto a un'altra è scorretto; sarebbe necessario usare il simbolo di appartenenza, perché esistono più successioni trascurabili rispetto a una successione fissata, quindi la definizione individua un insieme di successioni. L'abitudine è però di usare il simbolo di uguaglianza, perché ciò consente di semplificare le notazioni. C'è un prezzo da pagare per questa scelta: il fatto che il simbolo o piccolo indichi più di una successione comporta che le regole di calcolo con gli o piccoli sono diverse dalle ordinarie regole di calcolo.

Ad esempio, la differenza di due successioni trascurabili rispetto a una terza è ancora una successione trascurabile rispetto a quest'ultima. Infatti, se $a_n/c_n \to 0$ e $b_n/c_n \to 0$, allora possiamo concludere solamente che

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n - b_n}{c_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{c_n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{c_n} = 0.$$

Questo si traduce nella formula $o(c_n) - o(c_n) = o(c_n)$. Evidentemente non possiamo concludere che $o(c_n) - o(c_n)$ è nullo, perché non consideriamo la differenza di una successione con se stessa, come potrebbe fare pensare il fatto che facciamo la differenza di due oggetti indicati con lo stesso simbolo. Stiamo invece considerando la differenza di due successioni di cui sappiamo soltanto che il quoziente di ognuna di esse con c_n tende a 0. ◀

2.4.10 Esempio. Siano $h, k \in \mathbb{N}^*$, con $h < k$. Si ha $n^h/n^k = n^{h-k} \to 0$, perché $h - k < 0$ (v. esempio 2.2.12). Utilizzando i simboli di Landau, questo fatto può essere scritto come $n^h = o(n^k)$.

Sappiamo che, se $k \in \mathbb{N}^*$ e $a \in]1, +\infty[$, allora $n^k/a^n \to 0$ (v. esempio 2.4.3). Possiamo quindi scrivere $n^k = o(a^n)$.

Sappiamo che, se $a \in]1, +\infty[$, allora $a^n/n! \to 0$ (v. esempio 2.4.4). Possiamo quindi scrivere $a^n = o(n!)$. ◀

Vi è un collegamento tra asintoticità e trascurabilità di successioni, stabilito dal seguente teorema.

2.4.11 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $b_n \neq 0$. Si ha $a_n \sim b_n$ se e solo se $a_n = b_n + o(b_n)$.

Dimostrazione. Se $a_n \sim b_n$, allora, posto $c_n = a_n - b_n$, risulta $a_n = b_n + c_n$ e

$$\frac{c_n}{b_n} = \frac{a_n - b_n}{b_n} = \frac{a_n}{b_n} - 1 \to 1 - 1 = 0;$$

quindi $c_n = o(b_n)$.

Viceversa, se $a_n = b_n + o(b_n)$, allora

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{b_n + o(b_n)}{b_n} = 1 + \frac{o(b_n)}{b_n} \to 1 + 0 = 1:$$

quindi $a_n \sim b_n$. ■

2.4.12 Esempio. Determiniamo $\lim_{n\to+\infty}(2^n + n^4)/(3^n + n^2)$. Numeratore e denominatore sono somma di successioni positivamente divergenti, quindi sono positivamente divergenti. Il limite è quindi in forma indeterminata. Per l'esempio 2.4.3, si ha $n^4/2^n \to 0$ e $n^2/3^n \to 0$, quindi, per il teorema 2.4.11,

$$2^n + n^4 = 2^n + o(2^n) \sim 2^n,$$
$$3^n + n^2 = 3^n + o(3^n) \sim 3^n.$$

Pertanto, per il teorema 2.4.7, si ha

$$\frac{2^n + n^4}{3^n + n^2} \sim \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0,$$

dove la convergenza a 0 segue dall'esempio 2.3.5, perché $2/3 < 1$. Quindi, per il teorema 2.4.5, si ha anche $\lim_{n\to+\infty}(2^n + n^4)/(3^n + n^2) = 0$.

Determiniamo $\lim_{n\to+\infty}(n!+4^n)/(n!+n^4)$. Numeratore e denominatore sono somma di successioni positivamente divergenti, quindi sono positivamente divergenti. Il limite è quindi in forma indeterminata. Per l'esempio 2.4.4, si ha $4^n/n! \to 0$, inoltre, per l'esempio 2.4.3, si ha $n^4/4^n \to 0$, quindi $n^4/n! = (n^4/4^n)(4^n/n!) \to 0$. Per il teorema 2.4.11, risulta

$$n! + 4^n = n! + o(n!) \sim n!,$$
$$n! + n^4 = n! + o(n!) \sim n!.$$

Pertanto, per il teorema 2.4.7, si ha

$$\frac{n! + 4^n}{n! + n^4} \sim \frac{n!}{n!} = 1.$$

Quindi, per il teorema 2.4.5, si ha $\lim_{n\to+\infty}(n! + 4^n)/(n! + n^4) = 1$. ◀

Il seguente teorema, che stabilisce le regole di calcolo per o piccolo, è immediata conseguenza della definizione e dei teoremi sul limite della somma 2.3.1 e del prodotto 2.3.2.

2.4.13 Teorema (regole di calcolo per o piccolo)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, $m\in\mathbb{R}^*$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, sia $c_n\neq 0$ e $d_n\neq 0$.

I) Se $a_n=o(c_n)$ e $b_n=o(c_n)$, allora $a_n+b_n=o(c_n)$.

II) Se $a_n=o(c_n)$, allora $ma_n=o(c_n)$.

III) Se $a_n=o(c_n)$, allora $a_nd_n=o(c_nd_n)$.

IV) Se $a_n=o(c_n)$ e $b_n=o(d_n)$, allora $a_nb_n=o(c_nd_n)$.

V) Se $a_n=o(c_n)$ e $c_n=o(d_n)$, allora $a_n=o(d_n)$.

VI) Se $a_n=o(c_n)$ e $c_n\sim d_n$, allora $a_n=o(d_n)$.

Le regole di calcolo stabilite da questo teorema possono essere espresse come:

$$\begin{gathered} o(c_n)+o(c_n)=o(c_n),\\ mo(c_n)=o(c_n),\\ o(c_n)d_n=o(c_nd_n),\\ o(c_n)o(d_n)=o(c_nd_n),\\ o\big(o(d_n)\big)=o(d_n),\\ c_n\sim d_n \implies o(c_n)=o(d_n). \end{gathered}$$

Definizione di successione controllata

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ e, $\forall n\in\mathbb{N}$, sia $b_n\neq 0$. Diciamo che a_n è **controllata** da b_n quando la successione $(a_n/b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata. In tal caso scriviamo $a_n=\mathrm{O}(b_n)$ (si legge “a_n è o grande di b_n”).

Per il teorema 2.2.19, affermazione I, ogni successione convergente è limitata. Se $a_n\sim b_n$ oppure $a_n=o(b_n)$, il quoziente a_n/b_n converge, quindi tale quoziente è limitato; pertanto in tali casi si ha $a_n=\mathrm{O}(b_n)$.

2.4.14 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k\in\mathbb{N}^*$. Sia cioè

$$p(x)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_jx^j,$$

con $\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1}\in\mathbb{R}$ e $\alpha_k\in\mathbb{R}^*$. Per l'esempio 2.4.8, si ha $p(n)/n^k\to\alpha_k$, per il teorema 2.2.19, affermazione I, ogni successione convergente è limitata, quindi $p(n)=\mathrm{O}\big(n^k\big)$. ◀

Per o grande valgono regole di calcolo del tutto analoghe a quelle per o piccolo, di dimostrazione immediata.

2.4.15 Teorema (regole di calcolo per o grande)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}^*$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

I) Se $a_n = O(c_n)$ e $b_n = O(c_n)$, allora $a_n + b_n = O(c_n)$.

II) Se $a_n = O(c_n)$, allora $ma_n = O(c_n)$.

III) Se $a_n = O(c_n)$, allora $a_n d_n = O(c_n d_n)$.

IV) Se $a_n = O(c_n)$ e $b_n = O(d_n)$, allora $a_n b_n = O(c_n d_n)$.

V) Se $a_n = O(c_n)$ e $c_n = O(d_n)$, allora $a_n = O(d_n)$.

VI) Se $a_n = O(c_n)$ e $c_n \sim d_n$, allora $a_n = O(d_n)$.

Le regole di calcolo stabilite da questo teorema possono essere espresse come:

$$
\begin{gathered}
O(c_n) + O(c_n) = O(c_n), \\
mO(c_n) = O(c_n), \\
O(c_n)d_n = O(c_n d_n), \\
O(c_n)O(d_n) = O(c_n d_n), \\
O\big(O(d_n)\big) = O(d_n), \\
c_n \sim d_n \implies O(c_n) = O(d_n).
\end{gathered}
$$

Abbiamo inoltre le seguenti regole che coinvolgono insieme o grande e o piccolo.

2.4.16 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$, $m \in \mathbb{R}^*$ e, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $c_n \neq 0$ e $d_n \neq 0$.

I) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = O(c_n)$, allora $a_n + b_n = O(c_n)$.

II) Se $a_n = o(c_n)$ e $b_n = O(d_n)$, allora $a_n b_n = o(c_n d_n)$.

III) Se $a_n = o(c_n)$ e $c_n = O(d_n)$, allora $a_n = o(d_n)$.

IV) Se $a_n = O(c_n)$ e $c_n = o(d_n)$, allora $a_n = o(d_n)$.

Le regole di calcolo stabilite da questo teorema possono essere espresse come:

$$
\begin{gathered}
o(c_n) + O(c_n) = O(c_n), \\
o(c_n)O(d_n) = o(c_n d_n), \\
o\big(O(d_n)\big) = o(d_n), \\
O\big(o(d_n)\big) = o(d_n).
\end{gathered}
$$

2.5 Condizioni per la convergenza di successioni

Per determinare se una successione è convergente (o, più in generale, regolare) è necessario verificare la definizione di limite e per questo occorre conoscere il limite. In alternativa si possono usare i teoremi che collegano limiti e operazioni, ma occorre già conoscere il limite delle successioni che sommiamo o moltiplichiamo. In questa sezione adottiamo un diverso punto di vista e studiamo condizioni che assicurano che una successione reale è convergente, o che è regolare, senza conoscere a priori il limite.

2.5.1 Successioni monotòne

Introduciamo una classe di successioni, semplice da definire, per cui esiste sempre il limite.

Definizione di successione crescente, decrescente, monotòna

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **crescente** quando

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}\geq a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **strettamente crescente** quando

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}> a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **decrescente** quando

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}\leq a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **strettamente decrescente** quando

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad a_{n+1}< a_n\,.$$

Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **monotòna** quando è crescente o decrescente.
Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è **strettamente monotòna** quando è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente si dimostra facilmente che, $\forall m,n\in\mathbb{N}$, se $m<n$ allora $a_m\leq a_n$; proprietà analoghe valgono negli altri casi.

Ogni successione strettamente crescente è crescente, mentre ogni successione strettamente decrescente è decrescente. Le successioni costanti sono sia crescenti che decrescenti.

2.5.1 Esempio. Studiamo la monotonia della successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

La successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}=\bigl(1/(n+1)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente, perché, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $p_{n+1}=1/(n+2)<1/(n+1)=p_n$.

Esaminando i termini della successione $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}=\bigl((n+(-1)^n)/(n+1)\bigr)_{n\in\mathbb{N}}$ si vede facilmente che non è monotòna. Infatti $q_0=1>0=q_1$, quindi la successione non è crescente, e $q_1=0<1=q_2$, quindi la successione non è decrescente.

Analogamente, la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna. Infatti risulta $r_0 = 1/5 < 1/3 = r_1$ e $r_3 = 1 > -1 = r_4$.

Si verifica facilmente che la successione $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente.

Consideriamo la successione $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+(-1)^n-1)/4\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha

$$t_{n+1} - t_n = \frac{2n+2+(-1)^{n+1}-1}{4} - \frac{2n+(-1)^n-1}{4} = \frac{1-(-1)^n}{2} = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ è pari,} \\ 1, & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Pertanto si ha $t_{n+1} = t_n$ se n è pari e $t_{n+1} > t_n$ se n è dispari. Quindi $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, ma non strettamente crescente.

Si verifica facilmente che la successione $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (3-n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente decrescente.

La successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna, perché $v_0 > v_1$ e $v_1 < v_2$.

Analogamente, la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna, perché $w_0 = 2 > -3/2 = w_1$ e $w_1 = -3/2 < 4/3 = w_2$.

Anche la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non è monotòna, perché $z_0 = 0$, $z_1 = -1$ e $z_2 = 2$, quindi $z_0 > z_1$ e $z_1 < z_2$. ◀

Il principale risultato sulle successioni monotòne è il teorema seguente.

2.5.2 Teorema (sul limite delle successioni monotòne)

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotòna crescente, allora è regolare e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

II) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è monotòna decrescente, allora è regolare e si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n .$$

Dimostrazione. I) Consideriamo anzitutto il caso $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n = +\infty$. Ogni $M \in \mathbb{R}$ non è un maggiorante della successione, pertanto esiste $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_M} > M$. Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, se $n > n_M$ si ha $a_n \geq a_{n_M} > M$. Pertanto $a_n \to +\infty$.

Consideriamo ora il caso $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \in \mathbb{R}$. Posto $\ell = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si ha $\ell - \varepsilon < \sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$, quindi, per la caratterizzazione dell'estremo superiore 1.2.42, esiste un termine della successione maggiore di $\ell - \varepsilon$; indichiamolo con a_{n_ε}. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente, quindi, se $n > n_\varepsilon$, si ha $a_n \geq a_{n_\varepsilon} > \ell - \varepsilon$. Poiché ℓ è estremo superiore della successione, $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \leq \ell < \ell + \varepsilon$; pertanto

$$n > n_\varepsilon \implies \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon ,$$

quindi $a_n \to \ell$.

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

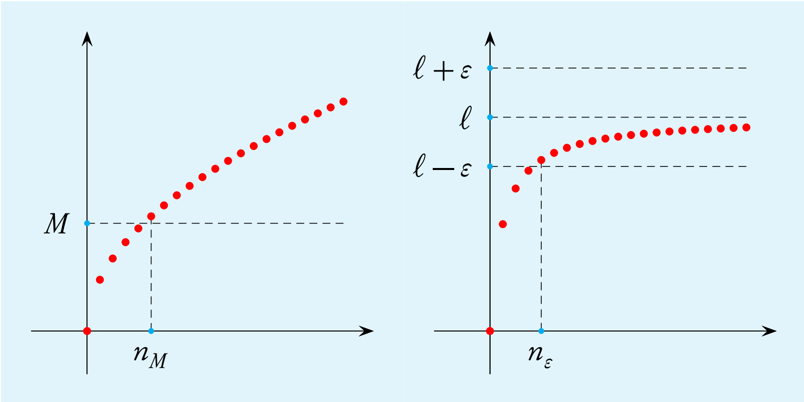


Figura 2.5.1
Dimostrazione del teorema sul limite delle successioni monotòne 2.5.2.
A sinistra il caso di una successione crescente illimitata, a destra il caso di una successione crescente limitata.

In particolare da questo teorema segue che una successione crescente non può avere limite $-\infty$, perché $\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ è diverso da $-\infty$. Analogamente una successione decrescente non può avere limite $+\infty$.

Osserviamo inoltre che questo teorema assicura che un successione crescente superiormente limitata è convergente e, analogamente, una successione decrescente inferiormente limitata è convergente.

2.5.3 Esempio (numero di Nepero o numero di Eulero[4]). Consideriamo le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, definite da

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Dimostriamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è crescente e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ è decrescente.

Per $n\in\mathbb{N}^*$ si ha

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{n+1}{n}\left(\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. esempio 1.3.5) risulta

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq 1-(n+1)\frac{1}{(n+1)^2} = 1-\frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1},$$

[4]Dal nome latinizzato di John Napier (Edimburgo, 1550 - Edimburgo 1617) e di Leonhard Euler (Basilea, 1707 - San Pietroburgo 1783).

Napier fu l'inventore dei logaritmi, che comparvero per la prima volta in un volume del 1614. In tale volume sono utilizzati i logaritmi in base $1/e$.

Euler, che diede molti contributi in vari settori della matematica e della fisica, è ricordato in relazione a questo numero perché fu il primo, nel 1731, a indicarlo con la lettera e.

La definizione di e come limite di $\left(1+(1/n)\right)^n$ è dovuta a Jakob Bernoulli (v. nota 1) che scrisse tale successione nel 1683 per studiare un problema di interessi composti.

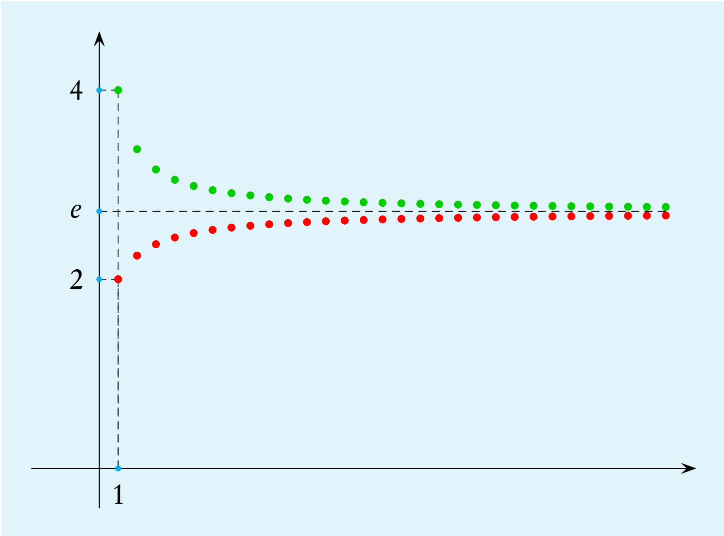


Figura 2.5.2
Le successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (in rosso) e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ (in verde) studiate nell'esempio 2.5.3.

pertanto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{n+1}{n}\,\frac{n}{n+1} = 1\,.$$

Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $a_n \leq a_{n+1}$.

Per $n \in \mathbb{N}^*$ si ha

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\dfrac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{n}{n+1}\left(\frac{n+1}{n}\,\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+2} = \frac{n}{n+1}\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2}.$$

Per la disuguaglianza di Bernoulli (v. esempio 1.3.5) risulta

$$\left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \geq 1+(n+2)\frac{1}{n(n+2)} = 1+\frac{1}{n} = \frac{n+1}{n}\,,$$

pertanto

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1}\,\frac{n+1}{n} = 1\,.$$

Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha $b_n \geq b_{n+1}$.

Per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.5.2, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ hanno limite. Dimostriamo che le due successioni hanno lo stesso limite reale.

Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, si ha

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = a_n\,,$$

per la monotonia delle successioni risulta $a_1 \leq a_n < b_n \leq b_1$; pertanto a_1 è un minorante di $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ e b_1 è un maggiorante di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Pertanto tali successioni sono limitate, quindi hanno limite reale e si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n \leq b_0 = 4$ e $\lim_{n\to+\infty} b_n \geq a_0 = 2$. Inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) a_n = \lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

Indichiamo con e e chiamiamo **numero di Nepero** o **numero di Eulero** questo limite. ◀

2.5.2 Sottosuccessioni

Per studiare alcune proprietà delle successioni risulta utile il concetto di sottosuccessione. L'idea su cui si basa questo concetto è che si "buttano via" alcuni termini della successione (ad esempio quelli di indice dispari) e si "rinumerano" i termini rimanenti, conservando il loro ordine; naturalmente, perché i termini rimasti individuino una nuova successione, questi devono essere infiniti.

Se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è ottenuta in questo modo a partire da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, allora b_0 è uguale al primo termine di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che abbiamo conservato, indicando l'indice di tale termine con k_0, abbiamo $b_0 = a_{k_0}$. Analogamente b_1 è uguale al termine successivo che abbiamo conservato, indichiamo l'indice di tale termine con k_1, quindi $b_1 = a_{k_1}$. Evidentemente si ha $k_1 > k_0$. Proseguendo a costruire la sottosuccessione, in generale si ha $b_n = a_{k_n}$, con la proprietà che passando da n a $n+1$ il corrispondente indice per la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cresce, cioè $k_{n+1} > k_n$.

Per formalizzare l'idea, risulta quindi naturale scegliere una successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di numeri naturali, i termini di questa successione sono gli indici dei termini di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ che rimangono. Per conservare l'ordine dei termini, questa successione deve essere crescente.

Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione di sottosuccessione

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri naturali strettamente crescente. La successione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è detta **sottosuccessione** della successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (o anche **successione estratta** dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$).

Per lo studio delle sottosuccessioni è essenziale la proprietà dei loro indici enunciata nel teorema seguente.

2.5.4 Teorema

Sia $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{N}$ strettamente crescente. Allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $k_n \geq n$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4.

Poiché k_0 è naturale, per il teorema 1.3.6, si ha $k_0 \geq 0$.

Se $k_n \geq n$, poiché $k_{n+1} > k_n$, si ha $k_{n+1} > n$; quindi $k_{n+1} - n$ è un naturale diverso da 0, per il teorema 1.3.11, risulta $k_{n+1} - n \geq 1$, pertanto $k_{n+1} \geq n+1$. ■

2.5.5 Teorema (sul limite delle sottosuccessioni)

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare allora anche $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n .$$

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists n_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_U \implies a_n \in U .$$

Se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $n > n_U$, poiché, per il teorema 2.5.4, $k_n \geq n$, si ha anche $k_n > n_U$, quindi $a_{k_n} \in U$. Perciò è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$. ■

Se una sottosuccessione ha limite, allora la successione da cui questa è estratta non necessariamente ha limite; è sempre possibile, data una successione oscillante, trovare una sua sottosuccessione regolare.

Possiamo ricavare conclusioni sul limite di una successione a partire da informazioni sul limite di sottosuccessioni se gli indici delle sottosuccessioni coinvolte esauriscono l'insieme dei naturali. In tale ordine di idee si ha il teorema seguente.

2.5.6 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$, $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(a_{h_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ due sue sottosuccessioni regolari. Se $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$ e $\mathbb{N} = \{k_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{h_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ allora esiste $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$.

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_{h_n}$, per definizione si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists i_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > i_U \implies a_{k_n} \in U ,$$
$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists j_U \in \mathbb{N}\colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > j_U \implies a_{h_n} \in U .$$

Sia $U \in \mathscr{I}_\ell$ e poniamo $n_U = \max\left\{k_{i_U}, h_{k_U}\right\}$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > n_U$. Poiché

$$\mathbb{N} = \{k_m \mid m \in \mathbb{N}\} \cup \{h_m \mid m \in \mathbb{N}\},$$

risulta $n \in \{k_m \mid m \in \mathbb{N}\}$ oppure $m \in \{h_m \mid m \in \mathbb{N}\}$, quindi $n = k_m$ oppure $n = h_m$, per un opportuno $m \in \mathbb{N}$. Nel primo caso si ha

$$k_m = n > n_U = \max\left\{k_{i_U}, h_{j_U}\right\} \geq k_{i_U},$$

quindi $m > i_U$, perché la successione $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è strettamente crescente; pertanto risulta $a_n = a_{k_m} \in U$. Analoga conclusione nel secondo caso.

Abbiamo così dimostrato che $\forall U \in \mathscr{I}_\ell$ esiste $n_U \in \mathbb{N}$ tale che se $n > n_U$ allora $a_n \in U$, quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$. ■

2.5.7 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora esiste una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monotòna.

Dimostrazione. Nel corso di questa dimostrazione chiamiamo picco ogni $n\in\mathbb{N}$ tale che, se $m>n$, allora si ha $a_m\le a_n$; cioè a_n è maggiore o uguale a ogni termine che segue.

Se l'insieme dei picchi è infinito, elenchiamoli in ordine crescente: $k_0<k_1<k_2<\cdots$. Allora, per la definizione di picco, $\forall n\in\mathbb{N}$ risulta $a_{k_{n+1}}\le a_{k_n}$; pertanto la sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

Se invece l'insieme dei picchi è finito o vuoto, allora esiste $k_0\in\mathbb{N}$ maggiore di ogni picco. Poiché k_0 non è un picco, esiste $k_1>k_0$ tale che $a_{k_1}>a_{k_0}$. Anche k_1 non è un picco (perché maggiore di k_0), quindi esiste $k_2>k_1$ tale che $a_{k_2}>a_{k_1}$. Ripetendo il ragionamento si costruisce una sottosuccessione strettamente crescente. ■

2.5.8 Esempio. Studiamo i picchi e le sottosuccessioni monotòne di alcune delle successioni introdotte nell'esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}=\big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Si ha $r_0=1/5<1/3=r_1$, quindi esiste un termine di indice maggiore di 0 che non è minore o uguale a r_0; perciò 0 non è un picco. Analogamente, poiché $r_1<r_2$, 1 non è un picco. Si ha $r_2>0$ e, per $n\ge 3$, $r_n<0$, quindi 2 è un picco. Infine, per $n\ge 3$, si ha $r_n=-1/(2n-5)<-1/(2n-3)=r_{n+1}$, quindi n non è un picco. Pertanto l'unico picco di $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è 2.

Seguendo la dimostrazione del teorema 2.5.7, poiché l'insieme dei picchi è finito, è possibile estrarre una sottosuccessione crescente. Per questo scegliamo k_0 maggiore di ogni picco, ad esempio $k_0=3$. Poiché 3 non è un picco esiste un indice k_1 maggiore di k_0 e tale che $r_{k_1}>r_{k_0}$. Possiamo scegliere $k_1=4$. Poiché se $n\ge 3$ si ha $a_{n+1}>a_n$, il ragionamento può essere ripetuto scegliendo ogni volta $k_{n+1}=k_n+1$, quindi in generale $k_n=n+3$. Pertanto la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha la sottosuccessione crescente $(r_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}=(r_{n+3})_{n\in\mathbb{N}}=\big(1/(-n-1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}=\big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ogni termine è minore o uguale a 1, pertanto se $v_n=1$, cioè se n è pari, allora n è un picco. Se invece n è dispari, allora $v_n=-1$, mentre $v_{n+1}=1>v_n$, pertanto n non è un picco. Quindi l'insieme dei picchi è l'insieme dei numeri pari, che è infinito.

Per quanto stabilito nella dimostrazione del teorema 2.5.7, la sottosuccessione di $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ottenuta prendendo come indici i picchi è decrescente. Pertanto abbiamo la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}=(1)_{n\in\mathbb{N}}$. La sottosuccessione è costante, quindi è anche decrescente.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}=\big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Ogni termine di indice pari è positivo, mentre ogni termine di indice dispari è negativo. Quindi, se n è dispari, allora $w_n<0<w_{n+1}$, quindi n non è un picco. Se n è pari, allora w_n è maggiore di ogni termine di indice dispari. Inoltre risulta

$$w_n=\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}>1+\frac{1}{n+3}=\frac{n+4}{n+3}=w_{n+2}.$$

Perciò ciascun termine di indice pari è maggiore anche di ogni termine che ha indice pari più grande. Quindi ogni n pari è un picco.

Siamo nella stessa situazione vista per la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, i picchi sono tutti e soli i numeri pari, pertanto la sottosuccessione $(w_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+2)/(2n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

Consideriamo la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Qualunque sia n pari, risulta $z_n = n < n+2 = z_{n+2}$, quindi n non è un picco. Se n è dispari, allora si ha $z_n < 0 < z_{n+1}$, quindi, anche in questo caso, n non è un picco. Pertanto $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha picchi.

Come visto nella dimostrazione del teorema 2.5.7, per costruire una sottosuccessione crescente di $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ scegliamo $k_0 = 0$. Successivamente scegliamo $k_1 > 0$ tale che $z_{k_1} > z_0$; possiamo scegliere $k_1 = 2$. Proseguendo, si può sempre scegliere $k_n = 2n$. Abbiamo quindi la sottosuccessione crescente $(z_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$. ◀

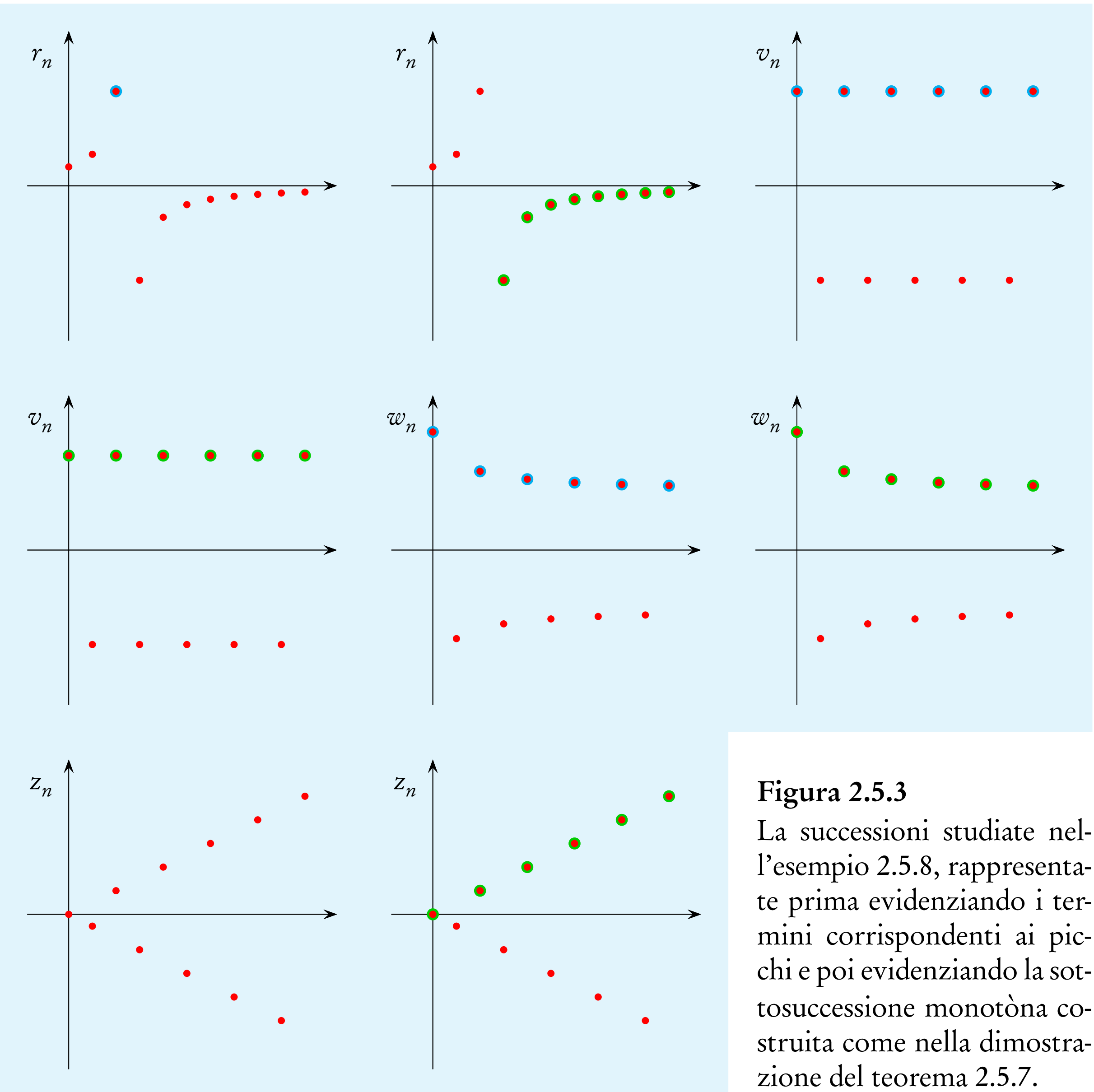


Figura 2.5.3
La successioni studiate nell'esempio 2.5.8, rappresentate prima evidenziando i termini corrispondenti ai picchi e poi evidenziando la sottosuccessione monotòna costruita come nella dimostrazione del teorema 2.5.7.

Il teorema che segue è di fondamentale importanza, lo utilizzeremo per provare vari teoremi dell'analisi.

2.5.9 Teorema (di Bolzano-Weierstrass[5])

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se essa è limitata allora esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente.

Dimostrazione. Supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitata. Per il teorema 2.5.7 esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monotòna, che, per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.5.2, ha limite. Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, anche $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, quindi, per il teorema 2.2.19, il limite non può essere né $+\infty$, né $-\infty$, pertanto la sottosuccessione è convergente. ■

2.5.10 Esempio. Studiamo il limite delle sottosuccessioni monotòne costruite, con la procedura utilizzata per dimostrare il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.5.9, nell'esempio 2.5.8.

Consideriamo la successione $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(5-2n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell'esempio 2.5.8 abbiamo provato che la sottosuccessione $(r_{n+3})_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(-2n-1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Nell'esempio 2.2.3 abbiamo provato che $r_n \to 0$. Pertanto, per il teorema sul limite delle sottosuccessioni 2.5.5, si ha anche $r_{n+3} \to 0$.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell'esempio 2.1.3 abbiamo provato che tale successione è limitata; nell'esempio 2.5.8 abbiamo provato che la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (1)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente (ed è anche costante). Ovviamente tale successione ha limite 1.

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell'esempio 2.1.3 abbiamo provato che tale successione è limitata; nell'esempio 2.5.8 abbiamo provato che la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = \big((2n+2)/(2n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente. Quindi, per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.5.2, tale successione è regolare; poiché è limitata il limite è reale. Si ha

$$w_{2n} = \frac{2n+2}{2n+1} = 1 + \frac{1}{2n+1}\,.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$ (v. esempio 2.2.13), per i teoremi sul limite della somma 2.3.1, sul limite del prodotto 2.3.2 e sul limite del reciproco 2.3.4, si ha $w_{2n} \to 1$.

Consideriamo la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell'esempio 2.5.8 abbiamo provato che la sottosuccessione $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}} = (2n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente. Tale successione è superiormente illimitata, quindi, per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.5.2, tende a $+\infty$. ◀

[5] Il teorema prende il nome da Bernard Bolzano (Praga, 1781 - Praga, 1848) e da Karl Weierstrass (Ostenfelde, Germania, 1815 - Berlino, 1897).

Bolzano contribuì a rendere rigorosi i fondamenti dell'analisi matematica.

Weierstrass diede molti contributi a vari settori dell'analisi, soprattutto alla teoria delle funzioni di variabile complessa.

Bolzano pubblicò il teorema in un articolo del 1817, che rimase quasi sconosciuto, Weierstrass lo riscoprì nel 1874.

2.5.3 Successioni di Cauchy

Studiamo un'altra condizione che consente di stabilire se una successione è convergente anche non conoscendo a priori il suo limite.

Definizione di successione di Cauchy[6]

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Diciamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una **successione di Cauchy** (o che verifica la **condizione di Cauchy**) quando

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}\colon\ \forall n,m\in\mathbb{N},\quad n,m>n_\varepsilon \implies |a_n-a_m|<\varepsilon\,.$$

2.5.11 Esempio. Consideriamo la successione $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}=\big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.1; dimostriamo che è una successione di Cauchy.

Siano $n,m\in\mathbb{N}$. Se $n>m$, allora si ha $|a_n-a_m|=(1/m)-(1/n)<1/m$; se invece $n>m$, si ha $|a_n-a_m|=(1/n)-(1/m)<1/n$. In ogni caso risulta $|a_n-a_m|<1/\min\{n,m\}$. Pertanto, fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, se $n,m\in\mathbb{N}$ sono tali che $n,m>1/\varepsilon$, risulta

$$|a_n-a_m|<\frac{1}{\min\{n,m\}}<\frac{1}{1/\varepsilon}=\varepsilon\,.$$

Quindi è verificata la condizione di Cauchy.

Consideriamo la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.2; dimostriamo che è una successione di Cauchy.

Osserviamo che $c_0=1>0$ e se $c_n>0$ allora $c_{n+1}=2/(c_n+2)>0$. Per induzione tutti i termini risultano positivi. Sia $n\in\mathbb{N}^*$; per la definizione di c_n si ha

$$|c_{n+1}-c_n|=\left|\frac{2}{c_n+2}-\frac{2}{c_{n-1}+2}\right|=\left|\frac{2c_{n-1}-2c_n}{(c_n+2)(c_{n-1}+2)}\right|=\frac{2|c_n-c_{n-1}|}{(c_n+2)(c_{n-1}+2)}<\frac{|c_n-c_{n-1}|}{2}\,.$$

Quindi si ha

$$|c_{n+1}-c_n|<\frac{1}{2}|c_n-c_{n-1}|<\frac{1}{2^2}|c_{n-1}-c_{n-2}|<\dots<\frac{1}{2^n}|c_1-c_0|=\frac{1}{2^n}\frac{1}{3}\,.$$

Pertanto, se $n,m\in\mathbb{N}$, con $n>m$, allora risulta

$$|c_n-c_m|=\left|\sum_{k=m}^{n-1}(c_{k+1}-c_k)\right|\le\sum_{k=m}^{n-1}|c_{k+1}-c_k|\le\sum_{k=m}^{n-1}\frac{1}{2^k}\frac{1}{3}=\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^{m+j}}\frac{1}{3}=\frac{1}{2^m}\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^j}\,.$$

Per il teorema 1.4.6 si ha

$$\sum_{j=0}^{n-m-1}\frac{1}{2^j}=\sum_{j=0}^{n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^j 1^{m-n-j-1}=\frac{1-(1/2)^{n-m}}{1-(1/2)}<\frac{1}{1-(1/2)}=2;$$

pertanto $|c_n-c_m|<(2/3)(1/2^m)$.

[6] La condizione prende il nome da Augustin-Louis Cauchy (Parigi, 1789 - Sceaux, Francia, 1857), che la introdusse in un trattato di analisi del 1821. Cauchy diede grandi contributi allo studio dell'analisi, dove introdusse un maggior rigore rispetto a quanto era abituale a quei tempi.

Poiché $1/2^m \to 0$, per $m \to +\infty$ (v. esempio 2.3.5), $(2/3)(1/2^m) \to 0$, pertanto, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, esiste $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che, se $m > n_\varepsilon$, allora si ha $(2/3)(1/2^m) < \varepsilon$, quindi, se $n > m$, allora $|c_n - c_m| < \varepsilon$. Una disuguaglianza analoga vale scambiando m con n, quindi $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy.

Consideriamo la successione $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, introdotta nell'esempio 2.1.2; dimostriamo che non verifica la condizione di Cauchy.

Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$d_{n+2} = -d_{n+1} + n + 1 = -(-d_n + n) + n + 1 = d_n + 1,$$

risulta $|d_{n+2} - d_n| = d_{n+2} - d_n = 1$. Pertanto, se si sceglie $\varepsilon \le 1$, possiamo trovare due termini di indice arbitrariamente grande che distano tra loro più di ε; quindi $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non verifica la condizione di Cauchy. ◀

Proviamo che la condizione di Cauchy è necessaria e sufficiente per la convergenza di una successione in $\mathbb{R}$.

La dimostrazione della necessità è banale. La dimostrazione della sufficienza è invece più complessa e la spezziamo in più teoremi. Proviamo che ogni successione di Cauchy è limitata, quindi per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.5.9 ha una sottosuccessione convergente, e che ogni successione di Cauchy che ha una sottosuccessione convergente è convergente.

2.5.12 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente allora è di Cauchy.

Dimostrazione. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_n$, per definizione si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\varepsilon \implies |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Pertanto, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se n e m sono maggiori di n_ε si ha

$$|a_n - a_m| = \big|(a_n - \ell) + (\ell - a_m)\big| \le |a_n - \ell| + |\ell - a_m| < 2\varepsilon;$$

quindi è verificata la definizione di successione di Cauchy. ■

2.5.13 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy allora è limitata.

Dimostrazione. Supponiamo che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia una successione di Cauchy, cioè tale che

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \colon \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > n_\varepsilon \implies |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

Scelto $\varepsilon = 1$, se $n > n_1$ si ha $|a_n - a_{n_1+1}| < 1$, cioè $a_{n_1+1} - 1 < a_n < a_{n_1+1} + 1$. Allora $\min\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, a_{n_1+1} - 1\}$ e $\max\{a_1, a_2, \dots, a_{n_1}, a_{n_1+1} + 1\}$ sono rispettivamente un minorante e un maggiorante dell'insieme dei termini della successione, che è quindi limitata. ■

2.5.14 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy e ha una sottosuccessione convergente, allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Sia $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione convergente. Posto $\ell = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$, proviamo che $a_n \to \ell$.

Poiché $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\, \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\, \forall n, m \in \mathbb{N}, \quad n, m > n_\varepsilon \implies |a_n - a_m| < \varepsilon\,.$$

Poiché $a_{k_n} \to \ell$ si ha:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\, \exists j_\varepsilon \in \mathbb{N}\colon\, \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > j_\varepsilon \implies |a_{k_n} - \ell| < \varepsilon\,.$$

Scelto $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, sia $n > \max\{n_\varepsilon, j_\varepsilon\}$; poiché $k_n \geq n$, si ha anche $k_n > \max\{n_\varepsilon, j_\varepsilon\}$, quindi

$$|a_n - \ell| = \left|(a_n - a_{k_n}) + (a_{k_n} - \ell)\right| \leq |a_n - a_{k_n}| + |a_{k_n} - \ell| < 2\varepsilon\,.$$

Quindi $a_n \to \ell$. ■

2.5.15 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy allora è convergente.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 2.5.13 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.5.9, ha una sottosuccessione convergente; perciò, per il teorema 2.5.14, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. ■

2.5.16 Esempio. Nell'esempio 2.5.11 abbiamo visto che la successione $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definita per ricorrenza nell'esempio 2.1.2 da

$$\begin{cases} c_0 = 1\,, \\ c_{n+1} = \dfrac{2}{c_n + 2}\,, \quad \text{per } n \in \mathbb{N}\,, \end{cases}$$

è di Cauchy. Per il teorema 2.5.15 tale successione ha limite reale, indichiamolo con ℓ. Ovviamente anche le successioni $(c_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ e $\left(2/(c_n+2)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti e hanno limite ℓ e $2/(\ell+2)$, rispettivamente. Quindi $\ell = 2/(\ell+2)$, che equivale a $\ell^2 + 2\ell - 2 = 0$. Questa uguaglianza è verificata se

$$\ell = -1 \pm \sqrt{1^2 + 2} = -1 \pm \sqrt{3}\,.$$

Poiché $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è a termini positivi (v. esempio 2.5.11) il limite non può essere negativo, pertanto $c_n \to -1 + \sqrt{3}$. ◀

2.5.4 Massimo limite e minimo limite

Introduciamo due concetti che sono utili per avere informazioni sulle successioni che non sono regolari. Per definire tali concetti è necessario il seguente teorema.

2.5.17 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ inferiormente limitata. Posto, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\alpha_n = \inf\{a_m \mid m \geq n\},$$
la successione $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente.

II) Supponiamo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ superiormente limitata. Posto, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\beta_n = \sup\{a_m \mid m \geq n\},$$
la successione $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente.

Le ipotesi di limitatezza richieste assicurano che α_n e β_n sono numeri reali.

Dimostrazione. I) Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\{a_m \mid m \geq n+1\} \subseteq \{a_m \mid m \geq n\}$, risulta
$$\alpha_{n+1} = \inf\{a_m \mid m \geq n+1\} \geq \inf\{a_m \mid m \geq n\} = \alpha_n .$$

II) La dimostrazione è simile a quella dell'affermazione I. ■

Per il teorema sul limite delle successioni monotòne 2.5.2 ogni successione monotòna è regolare, quindi è giustificata la definizione seguente.

Definizione di massimo limite e di minimo limite

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente limitata chiamiamo **massimo limite** (o anche **limite superiore**) di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il numero reale esteso
$$\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_m \mid m \geq n\}.$$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è superiormente illimitata poniamo $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente limitata chiamiamo **minimo limite** (o anche **limite inferiore**) di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ il numero reale esteso
$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_m \mid m \geq n\}.$$

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è inferiormente illimitata poniamo $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$.

Quando si usano i termini “limite superiore” e “limite inferiore” si usano le notazioni $\limsup_{n\to+\infty}$ e $\liminf_{n\to+\infty}$.

2.5.18 Esempio. Determiniamo massimo limite e minimo limite di alcune delle successioni introdotte nell’esempio 2.1.1.

Consideriamo la successione $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Poiché definitivamente esistono termini della successione uguali a 1 e termini della successione uguali a -1, si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{a_m \mid m \geq n\} = \{-1, 1\}$, pertanto

$$\begin{aligned}
\max\lim_{n\to+\infty}(-1)^n &= \lim_{n\to+\infty} \sup\{-1,1\} = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1,\\
\min\lim_{n\to+\infty}(-1)^n &= \lim_{n\to+\infty} \inf\{-1,1\} = \lim_{n\to+\infty} (-1) = -1.
\end{aligned}$$

Consideriamo la successione $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n(n+2)/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nell’esempio 2.1.3 abbiamo osservato che, se n è dispari, allora $w_n < 0$ e $w_n < w_{n+2}$; se invece n è pari, allora $w_n > 0$. Quindi, se n è dispari, allora, qualunque sia $m \geq n$, risulta $w_n < w_m$, pertanto, con le notazioni del teorema 2.5.17, si ha $\alpha_n = \inf\{w_m \mid m \geq n\} = w_n$. Se invece n è pari, allora $w_n > 0 > w_{n+1}$ e, poiché $n+1$ è dispari, $w_{n+1} < w_m$, qualunque sia $m > n+1$; pertanto $\alpha_n = \inf\{w_m \mid m \geq n\} = w_{n+1}$. Quindi risulta

$$\alpha_n = \begin{cases} w_{n+1} = -\dfrac{n+3}{n+2}, & \text{se } n \text{ è pari,}\\[2ex] w_n = -\dfrac{n+2}{n+1}, & \text{se } n \text{ è dispari.}\end{cases}$$

Si ha

$$-\frac{n+3}{n+2} = -1 - \frac{1}{n+2}, \qquad -\frac{n+2}{n+1} = -1 - \frac{1}{n+1}$$

ed è facile verificare che $-1 - 1/(n+1) < -1 - 1/(n+2)$, quindi risulta, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$-1 - \frac{1}{n+1} \leq \alpha_n \leq -1 - \frac{1}{n+2}.$$

Poiché la prima e l’ultima successione hanno limite -1, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 $\alpha_n \to -1$, pertanto $\min\lim_{n\to+\infty} w_n = -1$.

In modo analogo si prova che $\max\lim_{n\to+\infty} w_n = 1$.

Consideriamo la successione $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((-1)^n n\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Nell’esempio 2.1.3 abbiamo stabilito che $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata sia inferiormente che superiormente. Pertanto

$$\min\lim_{n\to+\infty} z_n = -\infty, \qquad \max\lim_{n\to+\infty} w_n = +\infty. \qquad \blacktriangleleft$$

Studiamo le proprietà di massimo limite e minimo limite.

2.5.19 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

Dimostrazione. Se la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è illimitata, allora $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$ oppure $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, quindi la tesi è verificata. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata allora, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $\inf\{a_m \mid m\ge n\} \le \sup\{a_m \mid m\ge n\}$, pertanto, per il teorema del confronto 2.2.17,

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty}\inf\{a_m \mid m\ge n\} \le \lim_{n\to+\infty}\sup\{a_m \mid m\ge n\} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,. \qquad \blacksquare$$

2.5.20 Teorema

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$ e $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ una sua sottosuccessione regolare. Allora

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n \le \lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo la disuguaglianza relativa al massimo limite, quella relativa al minimo limite si prova in modo analogo.

Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, allora evidentemente $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \le \max\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Se $\max\lim_{n\to+\infty} a_n < +\infty$, poiché $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $k_n \ge n$ (v. teorema 2.5.4), risulta $a_{k_n} \le \sup\{a_m \mid m\ge n\}$, pertanto, per il teorema del confronto 2.2.17, si ha

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} \le \lim_{n\to+\infty}\sup\{a_m \mid m\ge n\} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,. \qquad \blacksquare$$

2.5.21 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$. Allora esistono $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(a_{h_n})_{n\in\mathbb{N}}$, sottosuccessioni di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che

$$\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n\,, \qquad \lim_{n\to+\infty} a_{h_n} = \min\lim_{n\to+\infty} a_n\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo l'affermazione relativa al massimo limite, quella relativa al minimo limite si dimostra in modo analogo.

Consideriamo anzitutto il caso $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ superiormente illimitata. Allora $\{a_n \mid n>m\}$ è superiormente illimitato qualunque sia $m\in\mathbb{N}$, perché eliminando un numero finito di elementi da un insieme superiormente illimitato si ottiene un insieme che è ancora superiormente illimitato. Il numero 0 non è maggiorante di $\{a_n \mid n\in\mathbb{N}\}$, quindi $\exists k_0\in\mathbb{N}$ tale che $a_{k_0} > 0$. Analogamente 1 non è maggiorante di $\{a_n \mid n > k_0\}$, quindi esiste $k_1 > k_0$ tale che $a_{k_1} > 1$. Proseguendo, scelto k_n, esiste $k_{n+1} > k_n$ e tale che $a_{k_{n+1}} > n+1$. In questo modo si costruisce una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $a_{k_n} > n$, quindi $a_{k_n} \to +\infty$.

Consideriamo il caso $\max\lim_{n\to+\infty} a_n \to -\infty$. Per $n \in \mathbb{N}$ si ha $a_n \le \sup\{a_m \mid m \ge n\}$, inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} \sup\{a_m \mid m \ge n\} = \max\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty,$$

pertanto, per il teorema 2.2.14, affermazione II, $a_n \to -\infty$.

Infine sia $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell \in \mathbb{R}$. Con le notazioni del teorema 2.5.17, la successione $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente e $\beta_n \to \ell$, quindi risulta $\beta_n \ge \ell$ qualunque sia $n \in \mathbb{N}$. In particolare $\beta_0 > \ell - 1$, quindi, per la caratterizzazione dell'estremo superiore 1.2.42, esiste k_0 tale che $a_{k_0} > \ell - 1$. Evidentemente $a_{k_0} \le \sup\{a_m \mid m \ge k_0\} = \beta_{k_0}$. Analogamente $\beta_{k_0+1} > \ell - (1/2)$, quindi esiste $k_1 \ge k_0 + 1 > k_0$, tale che $a_{k_1} > \ell - (1/2)$. Risulta inoltre $a_{k_1} \le \beta_{k_1}$. Proseguendo si costruisce una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$\ell - \frac{1}{n+1} < a_{k_n} \le \beta_{k_n}.$$

Poiché $\lim_{n\to+\infty} \ell - \big(1/(n+1)\big) = \ell$ e, per il teorema sul limite delle sottosuccessioni 2.5.5, $\lim_{n\to+\infty} \beta_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \ell$, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \ell$.
■

2.5.22 Teorema

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}$.

I) Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare allora

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n.$$

II) Se

$$\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n,$$

allora $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n.$$

Dimostrazione. I) Per il teorema sul limite delle sottosuccessioni 2.5.5, ogni sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ è regolare e si ha $\lim_{n\to+\infty} a_{k_n} = \lim_{n\to+\infty} a_n$. Per il teorema 2.5.21 esiste una sottosuccessione che tende a $\max\lim_{n\to+\infty} a_n$, quindi $\max\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

Per motivi analoghi anche $\min\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} a_n$.

II) Poniamo $\ell = \min\lim_{n\to+\infty} a_n = \max\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Supponiamo $\ell \in \mathbb{R}$. Poiché $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\inf\{a_m \mid m \ge n\} \le a_n \le \sup\{a_m \mid m \ge n\},$$

per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 $\lim_{n\to+\infty} a_n = \ell$.

Se $\ell = +\infty$ o $\ell = -\infty$ la dimostrazione è analoga. ■

3

Limiti e continuità per funzioni reali di variabile reale

3.1 Topologia dell'insieme dei numeri reali

In questo capitolo iniziamo lo studio delle funzioni da sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$. Tali funzioni sono dette anche **funzioni reali di variabile reale**. Prima di affrontare questo studio è opportuno introdurre alcuni concetti relativi ai sottoinsiemi di $\mathbb{R}$; sono i concetti di base di un ampio capitolo della matematica chiamato "topologia".

Fissato un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$, distinguiamo i punti di $\mathbb{R}$ a seconda della loro "vicinanza" ad A o a $\complement A$.

Definizione di punto interno, punto esterno, punto di frontiera

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.
Diciamo che c è **punto interno** ad A quando $\exists U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \subseteq A$.
Diciamo che c è **punto esterno** ad A quando $\exists U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \cap A = \varnothing$.
Diciamo che c è **punto di frontiera** per A quando non è né punto interno né punto esterno ad A.

I punti interni ad A sono quelli "lontani" da $\complement A$, i punti esterni sono quelli "lontani" da A, i punti di frontiera sono "vicini" sia ad A che a $\complement A$.

Da queste definizioni segue immediatamente che i punti interni ad A appartengono ad A e quelli esterni non appartengono ad A. Inoltre si ha $U \subseteq A$ se e solo se $U \cap \complement A = \varnothing$, quindi i punti interni ad A sono quelli esterni a $\complement A$ e viceversa i punti esterni ad A sono quelli interni a $\complement A$.

Definizione di interno, frontiera, chiusura di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Chiamiamo **interno** di A e indichiamo con $\operatorname{int} A$ l'insieme dei punti interni ad A.
Chiamiamo **frontiera** di A e indichiamo con ∂A l'insieme dei punti di frontiera per A.
Chiamiamo **chiusura** di A e indichiamo con $\overline{A}$ l'insieme $\operatorname{int} A \cup \partial A$.

Poiché ogni numero reale è interno o esterno o di frontiera per un insieme, $\mathbb{R}$ è l'unione dei tre insiemi, a due a due disgiunti, $\operatorname{int} A$, $\operatorname{int}(\complement A)$ e ∂A.

Si verifica facilmente, negando la definizione di punto interno e di punto esterno, che vale il seguente teorema.

3.1.1 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$; $c \in \partial A$ se e solo se

$$\forall U \in \mathscr{I}_c, \quad (U \cap A \neq \varnothing) \wedge (U \cap \complement A \neq \varnothing).$$

3.1.2 Osservazione. Poiché $\complement(\complement A) = A$ da questo teorema segue immediatamente che un punto è di frontiera per A se e solo se è di frontiera per $\complement A$, cioè $\partial A = \partial(\complement A)$.

Inoltre

$$\overline{A} \cap \overline{\complement A} = \left(\operatorname{int} A \cup \partial A\right) \cap \left(\operatorname{int}(\complement A) \cup \partial(\complement A)\right) = \left(\operatorname{int} A \cup \partial A\right) \cap \left(\operatorname{int}(\complement A) \cup \partial A\right) = \partial A. \qquad ◀$$

3.1.3 Esempio. Poiché ogni intorno di un numero reale è incluso in $\mathbb{R}$, ogni punto di $\mathbb{R}$ è interno ad $\mathbb{R}$. Quindi $\mathbb{R}$ non ha né punti di frontiera né punti esterni.

Poiché $\varnothing$ ha intersezione vuota con qualunque insieme, ogni numero reale è esterno a $\varnothing$. Quindi $\varnothing$ non ha né punti interni né punti di frontiera.

L'insieme $\mathbb{Z}$ non ha punti interni. Infatti non esistono intervalli inclusi in $\mathbb{Z}$, quindi nessun punto ha un intorno incluso in $\mathbb{Z}$. Da qui segue che ogni punto di $\mathbb{Z}$ è di frontiera. Infine ogni punto di $\complement\mathbb{Z}$ è esterno a $\mathbb{Z}$. Infatti se $c \notin \mathbb{Z}$, allora $[c] < c < [c]+1$ e non esistono interi compresi tra $[c]$ e $[c]+1$. Posto $\delta = \min\{c-[c], [c]+1-c\}$, risulta $[c] \leq c-\delta$ e $c+\delta \leq [c]+1$, pertanto

$$]c-\delta, c+\delta[\ \subseteq\ ][c], [c]+1[\ \subseteq \complement\mathbb{Z}.$$

Quindi c è esterno a $\mathbb{Z}$.

Abbiamo quindi $\operatorname{int}\mathbb{Z} = \varnothing$, $\partial\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ e $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$.

Ogni punto di $\mathbb{R}$ è di frontiera per $\mathbb{Q}$. Infatti, se $c \in \mathbb{R}$, allora, per il teorema 1.4.8, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, esistono $x \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ compresi tra $c-\delta$ e $c+\delta$; pertanto risulta $]c-\delta, c+\delta[\ \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing$ e $]c-\delta, c+\delta[\ \cap \complement\mathbb{Q} \neq \varnothing$. Quindi, per il teorema 3.1.1, c è un punto di frontiera per $\mathbb{Q}$. Poiché tutti gli elementi di $\mathbb{R}$ sono di frontiera, $\mathbb{Q}$ non ha né punti interni, né punti esterni

Abbiamo quindi $\operatorname{int}\mathbb{Q} = \varnothing$, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$ e $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. ◀

3.1.4 Esempio. Siano

$$A_1 = \{0\}, \qquad A_2 =]1,2[, \qquad A_3 = [1,2], \qquad A_4 =]0,1[\, \cup\,]1,2[,$$

$$A_5 = \{0\} \cup [1,2], \qquad A_6 =]0,+\infty[, \qquad A_7 = [0,+\infty[, \qquad A_8 = \left\{ \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Il punto 0 è di frontiera per A_1. Infatti non è interno ad A_1, perché qualunque intorno di 0 contiene numeri diversi da 0, quindi non è incluso in A_1; inoltre non è esterno ad A_1, perché appartiene all'insieme.

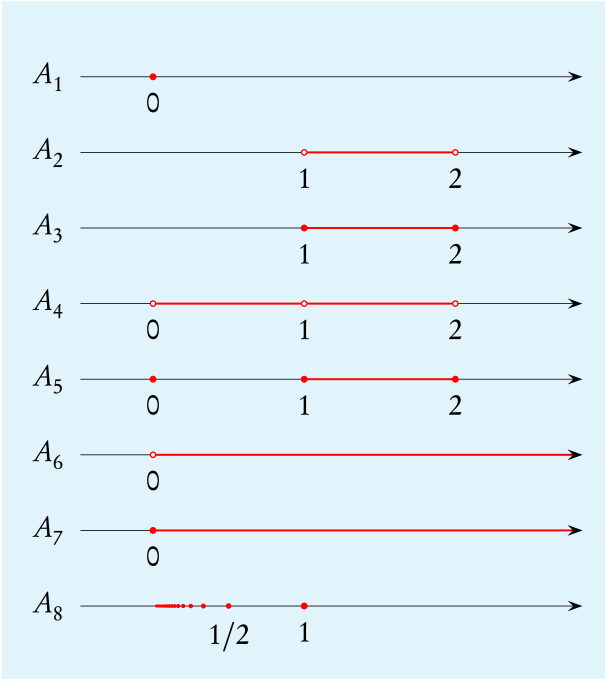


Figura 3.1.1
Gli insiemi studiati nell'esempio 3.1.4

Se $c \notin A_1$, allora c è esterno ad A_1. Infatti $0 \notin \left]c-|c|, c+|c|\right[$, quindi c ha un intorno incluso in $\complement A_1$.

Quindi si ha $\operatorname{int} A_1 = \varnothing$, $\partial A_1 = A_1$ e $\overline{A}_1 = A_1$.

Se $c \in]1,2[$, allora c è interno ad A_2. Infatti, posto $\delta = \min\{c-1, 2-c\}$, risulta $]c-\delta, c+\delta[\subseteq]1,2[$.

Il punto 1 è di frontiera per A_2. Infatti ogni intorno di 1 contiene numeri minori di 1, quindi non è incluso in A_2, e numeri compresi tra 1 e 2, quindi non è incluso in $\complement A_2$. Per motivi analoghi 2 è di frontiera per A_2.

Se $c \in]2,+\infty[$ allora c è esterno ad A_2, perché $\left]c-(c-2), c+(c-2)\right[=]2, 2c-2[$ è un intorno di c disgiunto da A_2. Analogamente se $c \in]-\infty, 1[$, allora c è esterno ad A_2, perché $\left]c-(1-c), c+(1-c)\right[=]2c-1, 1[$ è un intorno di c disgiunto da A_2.

Quindi si ha $\operatorname{int} A_2 =]1,2[$, $\partial A_2 = \{1,2\}$ e $\overline{A}_2 = [1,2]$.

Ragionando come per A_2, si prova che $\operatorname{int} A_3 =]1,2[$, $\partial A_3 = \{1,2\}$ e $\overline{A}_3 = [1,2]$.

Poiché $A_2 \subseteq A_4$, i punti interni ad A_2 sono interni ad A_4, quindi se $c \in]1,2[$, allora è interno ad A_4. Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per A_2 si prova che se $c \in]0,1[$, allora c è interno ad A_4.

I punti 0, 1 e 2 sono di frontiera per A_4. Infatti ciascuno di essi non appartiene ad A_4, quindi non è interno, e si prova facilmente che ogni intorno di uno di tali punti interseca A_4, quindi non sono punti esterni.

Se $c \in]2,+\infty[$ allora c è esterno ad A_4, perché $\left]c-(c-2), c+(c-2)\right[=]2, 2c-2[$ è un intorno di c disgiunto da A_4. Analogamente se $c \in]-\infty, 0[$, allora c è esterno ad A_4, perché $\left]c-(-c), c+(-c)\right[=]2c, 0[$ è un intorno di c disgiunto da A_4.

Quindi si ha $\operatorname{int} A_4 =]0,1[\cup]1,2[$, $\partial A_4 = \{0,1,2\}$ e $\overline{A}_4 = [0,2]$.

Poiché $A_2 \subseteq A_5$, i punti interni ad A_2 sono interni ad A_5, quindi se $c \in]1,2[$, allora c è interno ad A_5.

I punti 0, 1 e 2 sono di frontiera per A_5, perché essi appartengono ad A_5, quindi non sono esterni, e si verifica facilmente che ogni loro intorno non è contenuto in A_5, quindi non sono interni.

Con ragionamenti analoghi a quelli fatti per gli insiemi precedenti, si prova che ogni punto di $]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]2,+\infty[$ è esterno ad A_5.

Quindi si ha $\operatorname{int}A_5 =]1,2[$, $\partial A_5 = \{0,1,2\}$ e $\overline{A}_5 = \{0\}\cup[1,2]$.

Se $c \in]0,+\infty[$, allora $]c-c,c+c[\subseteq]0,+\infty[$, quindi c è interno ad A_6. Ogni intorno di 0 contiene sia numeri positivi che numeri negativi, quindi ha intersezione non vuota sia con A_6 che con il suo complementare; perciò 0 è punto di frontiera per A_6.

Se $c \in]-\infty,0[$, allora $\big]c-(-c),c+(-c)\big[\cap]0,+\infty[=\varnothing$, quindi c è esterno ad A_6.

Quindi si ha $\operatorname{int}A_6 =]0,+\infty[$, $\partial A_6 = \{0\}$ e $\overline{A}_6 = [0,+\infty[$.

Ragionando come per A_6, si prova che $\operatorname{int}A_7 =]0,+\infty[$, $\partial A_7 = \{0\}$ e $\overline{A}_7 = [0,+\infty[$.

L'insieme A_8 non contiene intervalli, quindi non può contenere un intorno di un punto; pertanto A_8 non ha punti interni. Quindi ogni punto di A_8 è di frontiera.

Il punto 0 è di frontiera per A_8. Infatti la successione $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge a 0 (v. esempio 2.2.12), quindi, $\forall\delta \in \mathbb{R}^+$, definitivamente si ha $1/n \in]-\delta,\delta[$, pertanto ogni intorno di 0 ha intersezione non vuota con A_8. Poiché $0 \notin A_8$, ogni intorno di 0 ha anche intersezione non vuota con $\complement A_8$, pertanto, per il teorema 3.1.1, 0 è punto di frontiera.

Se $c \in]1,+\infty[$, allora è esterno ad A_8, perché

$$\big]c-(c-1),c+(c-1)\big[=]1,2c-1[$$

è un intorno di c disgiunto da A_8. Se $c \in]-\infty,0[$, allora è esterno ad A_8, perché

$$\big]c-(-c),c+(-c)\big[=]2c,0[$$

è un intorno di c disgiunto da A_8. Se $c \in]0,1[\setminus A_8$, allora esiste $n \in \mathbb{N}^*$ tale che si ha $1/(n+1) < c < 1/n$. Posto $\delta = \min\big\{c-1/(n+1),(1/n)-c\big\}$, risulta

$$]c-\delta,c+\delta[\subseteq \big]1/n,1/(n+1)\big[\subseteq \complement A_8 .$$

Pertanto c è esterno ad A_8.

Quindi si ha $\operatorname{int}A_8 = \varnothing$, $\partial A_8 = A_8\cup\{0\}$ e $\overline{A}_8 = A_8\cup\{0\}$. ◀

Dalle definizioni si ottiene immediatamente il seguente teorema.

3.1.5 Teorema

Sia $A\subseteq\mathbb{R}$. Allora:

I) $\operatorname{int}A \subseteq A \subseteq \overline{A}$;

II) $\overline{A} = A\cup\partial A$.

Anche il teorema seguente è una semplice conseguenza delle definizioni.

3.1.6 Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

I) Se $A \subseteq B$ allora $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int} B$;

II) Se $A \subseteq B$ allora ogni punto esterno a B è esterno ad A;

III) $\operatorname{int}(A \cap B) = \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

Dimostrazione. I, II) Sono immediata conseguenza della definizione.
III) Per l'affermazione I si ha $\operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} A$ e $\operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} B$, pertanto risulta $\operatorname{int}(A \cap B) \subseteq \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$.

Viceversa se $c \in \operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B$, allora esistono $U_A, U_B \in \mathscr{I}_c$ tali che $U_A \subseteq A$ e $U_B \subseteq B$. Pertanto risulta $U_A \cap U_B \in \mathscr{I}_c$ e $U_A \cap U_B \subseteq A \cap B$; quindi $c \in \operatorname{int}(A \cap B)$. Perciò si ha $\operatorname{int} A \cap \operatorname{int} B \subseteq \operatorname{int}(A \cap B)$. ■

I punti interni, esterni e di frontiera e la chiusura di un insieme possono essere caratterizzati mediante le successioni convergenti, come risulta dal seguente teorema.

3.1.7 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

I) Il punto c appartiene ad $\overline{A}$ se e solo se esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A convergente a c.

II) Il punto c è interno ad A se e solo se qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ convergente a c, definitivamente $a_n \in A$.

III) Il punto c è esterno ad A se e solo se qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ convergente a c, definitivamente $a_n \notin A$.

IV) Il punto c è di frontiera per A se e solo se esistono $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\complement A$ convergenti a c.

L'affermazione I significa che $\overline{A}$ è l'insieme dei punti che sono limite di successioni in A.

Dimostrazione. I) Se $c \in \overline{A}$ allora c non è interno a $\complement A$, quindi $\forall U \in \mathscr{I}_c$ non si ha $U \subseteq \complement A$, pertanto $U \cap A \neq \varnothing$. Quindi, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $\left]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)\right[\cap A \neq \varnothing$, perciò esiste $a_n \in A$ tale che $c - 1/(n+1) < a_n < c + 1/(n+1)$. Poiché

$$\lim_{n\to+\infty}\left(c - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(c + \frac{1}{n+1}\right) = c,$$

per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 $a_n \to c$.

Viceversa, se $c \notin \overline{A}$ allora c è interno a $\complement A$, quindi esiste $U \in \mathscr{I}_c$ incluso in $\complement A$. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a c, allora definitivamente $a_n \in U$, quindi $a_n \in \complement A$. Pertanto non esistono successioni in A convergenti a c.

II) Se c è interno ad A, allora esiste $U \in \mathscr{I}_c$ incluso in A. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione convergente a c, allora definitivamente $a_n \in U$, quindi definitivamente $a_n \in A$.

Viceversa, se c non è interno ad A, allora $c \in \overline{\complement A}$, quindi, per l'affermazione I, esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\complement A$ convergente a c. Pertanto non è vero che, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}$ convergente a c, definitivamente si ha $a_n \in A$.

III) Segue dall'affermazione II, perché i punti esterni ad A sono quelli interni a $\complement A$.

IV) Per l'osservazione 3.1.2, $c \in \partial A$ se e solo se $c \in \overline{A} \cap \overline{\complement A}$. Per l'affermazione I, questo equivale al fatto che esistano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\complement A$ convergenti a c. ■

Definizione di insieme aperto, chiuso

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.
Diciamo che A è **aperto** quando $A = \operatorname{int} A$.
Diciamo che A è **chiuso** quando $A = \overline{A}$.

Sappiamo che $\operatorname{int} A \cap \partial A = \varnothing$ e che $\operatorname{int} A \subseteq A \subseteq A \cup \partial A = \overline{A}$, pertanto è facile verificare che vale la seguente caratterizzazione degli aperti e dei chiusi.

3.1.8 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

I) L'insieme A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \varnothing$.

II) L'insieme A è chiuso se e solo se $\partial A \subseteq A$.

Si verifica facilmente che gli intervalli che abbiamo chiamato aperti sono insiemi aperti secondo questa definizione, mentre gli intervalli che abbiamo chiamato chiusi sono chiusi secondo questa definizione.

3.1.9 Osservazione. L'insieme $\mathbb{R}$ è aperto, perché ogni punto è interno, ed è chiuso, perché, non avendo punti di frontiera, coincide con l'unione dell'interno con la frontiera.

Anche $\varnothing$ è sia aperto che chiuso, perché non ha né punti interni né punti di frontiera, quindi coincide sia con il suo interno che con la sua chiusura.

Gli insiemi $\varnothing$ e $\mathbb{R}$ sono gli unici sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ che sono sia aperti che chiusi. Infatti se A è sia aperto che chiuso, allora, per il teorema 3.1.8, ∂A è incluso in A, ma è disgiunto da A, quindi $\partial A = \varnothing$. Gli unici insiemi che hanno frontiera vuota sono $\mathbb{R}$ e $\varnothing$.

Infatti, sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto e diverso da $\mathbb{R}$. Allora esistono $a \in A$ e $b \in \mathbb{R} \setminus A$. Supponiamo $a < b$, in caso contrario la dimostrazione è analoga. Posto $C = \{x \in A \mid x < b\}$, si ha $a \in C$, quindi $C \neq \varnothing$, e b è un maggiorante di C, quindi C è superiormente limitato. Posto $c = \sup C$, proviamo che risulta $c \in \partial A$. Infatti, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, si ha $c - \delta < \sup C$, quindi esiste un elemento di C compreso tra $c - \delta$ e c, ma $C \subseteq A$, quindi esiste un elemento di A appartenente a $]c-\delta, c[\, \subseteq\,]c-\delta, c+\delta[$, quindi ogni intorno di c interseca A. Inoltre, se $c < b$, allora ogni elemento di $]c, b]$ non appartiene ad A, e, $\forall \delta \in \mathbb{R}^+$, $]c-\delta, c+\delta[$

interseca tale intervallo, quindi non è incluso in A. Se invece $c = b$, allora ogni intorno di c contiene b che non appartiene ad A, quindi tale intorno non è incluso in A. Pertanto c non è né interno né esterno ad A, quindi è di frontiera. ◀

3.1.10 Esempio. Ricordando l'esempio 3.1.3, $\mathbb{Z}$ è chiuso, $\mathbb{Q}$ non è né aperto né chiuso.

Determiniamo quali degli insiemi introdotti nell'esempio 3.1.4 sono aperti o chiusi. Ricordando ciò che abbiamo già provato, gli insiemi $A_2 =]1,2[$, $A_4 =]0,1[\cup]1,2[$ e $A_6 =]0,+\infty[$ sono aperti, gli insiemi $A_1 = \{0\}$, $A_3 = [1,2]$, $A_5 = \{0\} \cup [1,2]$ e $A_7 = [0,+\infty[$ sono chiusi e l'insieme $A_8 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ non è né aperto né chiuso. ◀

3.1.11 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$.

I) A è aperto se e solo se $\complement A$ è chiuso.

II) A è chiuso se e solo se $\complement A$ è aperto.

Dimostrazione. I) Ricordiamo che $\partial A = \partial(\complement A)$ (v. osservazione 3.1.2). Per il teorema 3.1.8, A è aperto se e solo se $A \cap \partial A = \varnothing$, cioè $\partial A = \partial(\complement A) \subseteq \complement A$ e questo equivale al fatto che $\complement A$ sia chiuso.

II) Segue subito da I, applicata a $\complement A$. ■

La proprietà di essere aperto e quella di essere chiuso si conservano per unioni e intersezioni. Per la precisione valgono i seguenti teoremi.

3.1.12 Teorema

Sia $\{A_i \mid i \in I\}$ una famiglia di insiemi.

I) Se $\forall i \in I$, A_i è aperto, allora $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

II) Se $\forall i \in I$, A_i è chiuso, allora $\bigcap_{i \in I} A_i$ è chiuso.

Dimostrazione. I) Sia $c \in \bigcup_{i \in I} A_i$, allora esiste $k \in I$ tale che $c \in A_k$. Poiché A_k è aperto, esiste $U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \subseteq A_k$, quindi $U \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$, perciò c è interno a $\bigcup_{i \in I} A_i$.

Pertanto ogni punto di $\bigcup_{i \in I} A_i$ è interno, perciò $\bigcup_{i \in I} A_i$ è aperto.

II) Si ha $\complement\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} \complement A_i$. Per il teorema 3.1.11, $\forall i \in I$, $\complement A_i$ è aperto, quindi, per l'affermazione I, $\bigcup_{i \in I} \complement A_i$ è aperto, pertanto, nuovamente per il teorema 3.1.11, $\bigcap_{i \in I} A_i$ è chiuso. ■

3.1.13 Teorema

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$.

I) Se A e B sono aperti, allora $A \cap B$ è aperto.

II) Se A e B sono chiusi, allora $A \cup B$ è chiuso.

Dimostrazione. I) Sia $c \in A \cap B$. Poiché A e B sono aperti, c è interno ad A e a B, quindi $\exists U_A, U_B \in \mathscr{I}_c$ tali che $U_A \subseteq A$ e $U_B \subseteq B$. Posto $U = U_A \cap U_B$ risulta $U \subseteq U_A \subseteq A$ e $U \subseteq U_B \subseteq B$, pertanto $U \subseteq A \cap B$, quindi c è interno ad $A \cap B$.

Poiché ogni punto di $A \cap B$ è interno, $A \cap B$ è aperto.

II) Si ha $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$. Per il teorema 3.1.11 $\complement A$ e $\complement B$ sono aperti, quindi, per l'affermazione I, $\complement A \cap \complement B$ è aperto, pertanto, nuovamente per il teorema 3.1.11, $A \cup B$ è chiuso. ■

Da questo teorema segue che se A, B e C sono tre insiemi aperti, allora $A \cap B$ è aperto e quindi anche $(A \cap B) \cap C$ è aperto; quest'ultimo è l'intersezione dei tra insiemi. Ripetendo il ragionamento si prova che l'intersezione di un numero finito di insiemi aperti è aperta.

In modo analogo si ha che l'unione di un numero finito di insiemi chiusi è chiusa.

3.1.14 Osservazione. Tra i teoremi 3.1.12 e 3.1.13 c'è una differenza fondamentale: nel primo si considerano unioni e intersezioni di una famiglia di insiemi anche infinita, nel secondo unioni e intersezioni di due insiemi. Come osservato sopra, dal fatto che una proprietà si conserva per unione o intersezione di due insiemi segue che si conserva per unione o intersezione di un numero finito di insiemi, ma non si può trarre la stessa conclusione per famiglie infinite di insiemi. In particolare il teorema 3.1.13 è falso per intersezioni e unioni di famiglie infinite.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^*$ l'insieme $]-1/n, 1/n[$ è aperto. Si ha

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}^*}]-1/n, 1/n[= \{0\},$$

perché se x appartiene tale intersezione, risulta, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x \leq 1/n$, quindi $x \leq 0$, e $x \geq -1/n$, quindi $x \geq 0$. L'insieme $\{0\}$ ha interno vuoto (v. esempio 3.1.4), quindi non è aperto. Quindi una famiglia di insiemi aperti $]-1/n, 1/n[$ ha intersezione che non è aperta.

Considerando il complementare di questi insiemi, abbiamo la famiglia di insiemi chiusi $]-\infty, -1/n] \cup [1/n, +\infty[$, per $n \in \mathbb{N}^*$, la cui unione è $\mathbb{R}^*$ che non è chiuso. ◀

3.1.15 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora:

I) $\operatorname{int} A$ è aperto;

II) $\overline{A}$ è chiuso.

Dimostrazione. I) Dobbiamo provare che $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$. Poiché $\operatorname{int} A \subseteq A$, per il teorema 3.1.6, affermazione I, si ha $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) \subseteq \operatorname{int} A$; resta da dimostrare che $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$.

Se $c \in \operatorname{int} A$, allora esiste $\delta \in \mathbb{R}^+$ tale che $]c-\delta, c+\delta[\subseteq A$. Se $x \in]c-\delta, c+\delta[$, allora, posto $\eta = \min\{(c+\delta)-x, x-(c-\delta)\}$ si ha

$$x - \eta \geq x - \big(x - (c-\delta)\big) = c - \delta,$$
$$x + \eta \leq x + \big((c+\delta) - x\big) = c + \delta,$$

quindi
$$]x-\eta, x+\eta[\subseteq]c-\delta, c+\delta[\subseteq A;$$
pertanto $x \in \operatorname{int} A$. Perciò $]c-\delta, c+\delta[\subseteq \operatorname{int} A$, ma tale intervallo è un intorno di c, pertanto $c \in \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$. Quindi $\operatorname{int} A \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{int} A)$.

II) Poiché $\overline{A} = \operatorname{int} A \cup \partial A$, $\complement\overline{A}$ è costituito dai punti esterni ad A, quindi $\complement\overline{A} = \operatorname{int}(\complement A)$, che è aperto per quanto appena dimostrato. Pertanto, per il teorema 3.1.11, $\overline{A}$ è chiuso. ■

Definizione di insieme compatto

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è **compatto** quando ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A ha una sottosuccessione convergente a un elemento di A.

Gli insiemi compatti possono essere caratterizzati sulla base di concetti già definiti.

3.1.16 Teorema (caratterizzazione degli insiemi compatti)

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Sono equivalenti:

I) A è compatto;

II) A è chiuso e limitato.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Dimostriamo che se A non è chiuso oppure non è limitato, allora non è compatto.

Supponiamo che A non sia superiormente limitato. Allora $\forall n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento di A, che indichiamo con a_n, tale che $a_n > n$. Per il teorema 2.2.14, affermazione I, $a_n \to +\infty$, quindi, per il teorema 2.5.5, ogni sua sottosuccessione diverge, cioè $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti a un elemento di A. Pertanto A non è compatto.

La dimostrazione è analoga se A è inferiormente illimitato.

Supponiamo ora che A non sia chiuso, cioè che esista $c \in \overline{A} \setminus A$. Poiché $c \in \overline{A}$, per il teorema 3.1.7, affermazione I, esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A convergente a c. Ogni sottosuccessione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a c che non appartiene ad A, quindi $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha sottosuccessioni convergenti a un elemento di A. Pertanto A non è compatto.

II $\Longrightarrow$ I) Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in A. Poiché A è limitato la successione è limitata, quindi, per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.5.9, esiste una sottosuccessione $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente; sia c il suo limite. Per il teorema 3.1.7, affermazione I, $c \in \overline{A} = A$. Pertanto A è compatto. ■

3.1.17 Esempio. Consideriamo gli insiemi studiati negli esempi 3.1.4 e 3.1.10.

Gli insiemi $A_1 = \{0\}$, $A_3 = [1,2]$ e $A_5 = \{0\} \cup [1,2]$ sono chiusi e limitati, quindi, per il teorema 3.1.16, sono compatti. L'insieme $A_7 = [0,+\infty[$ non è limitato, quindi non è compatto. Gli insiemi $A_2 =]1,2[$, $A_4 =]0,1[\cup]1,2[$, $A_6 =]0,+\infty[$ e $A_8 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ non sono chiusi, quindi non sono compatti. ◀

Nel seguito dovremo individuare punti di un insieme che sono “vicini” all’insieme privato del punto stesso. Risulta quindi utile la seguente definizione, che estendiamo ai punti di $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione di punto limite, punto di accumulazione, punto isolato, insieme derivato di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $c \in \overline{\mathbb{R}}$.
Diciamo che c è **punto limite** di A quando, $\forall U \in \mathscr{I}_c$, si ha $A \cap U \setminus \{c\} \neq \varnothing$.
Indichiamo con $PL(A)$ l’insieme dei punti limite di A.
Diciamo che c è **punto di accumulazione** per A quando c è un punto limite di A che appartiene a $\mathbb{R}$.
Chiamiamo **insieme derivato** di A e indichiamo con $D(A)$ l’insieme dei punti di accumulazione per A.
Diciamo che c è un **punto isolato** per A quando $c \in A \setminus D(A)$.

Dalle definizioni segue subito che è $D(A) = PL(A) \cap \mathbb{R}$.

3.1.18 Osservazione. Dato $A \subseteq \mathbb{R}$, si ha $+\infty \in PL(A)$ se e solo se, $\forall M \in \mathbb{R}$, risulta $A \cap \,]M, +\infty[\, \neq \varnothing$, cioè esiste un elemento di A maggiore di M. Quindi $+\infty \in PL(A)$ se e solo se A è superiormente illimitato.

Analogamente $-\infty \in PL(A)$ se e solo se A è inferiormente illimitato.

Per definizione, $c \in A$ è punto isolato per A se e solo se non è vero che

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \quad A \cap \,]c-\varepsilon, c+\varepsilon[\, \setminus \{c\} \neq \varnothing,$$

cioè

$$\exists \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ : \quad A \cap \,]c-\overline{\varepsilon}, c+\overline{\varepsilon}[\, \setminus \{c\} = \varnothing;$$

si ha $A \cap \,]c-\overline{\varepsilon}, c+\overline{\varepsilon}[\, \setminus \{c\} = \varnothing$ se e solo se $A \cap \,]c-\overline{\varepsilon}, c+\overline{\varepsilon}[\, = \{c\}$, quindi c è punto isolato per A se e solo se

$$\exists \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ : \quad A \cap \,]c-\overline{\varepsilon}, c+\overline{\varepsilon}[\, = \{c\}.$$ ◀

Il teorema seguente mette in relazione il concetto di punto di accumulazione con quello di punto interno, esterno e di frontiera.

3.1.19 Teorema

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Allora

$$\operatorname{int} A \subseteq D(A) \subseteq \overline{A}.$$

Dimostrazione. Se $c \in \operatorname{int} A$, allora esiste $U \in \mathscr{I}_c$ tale che $U \subseteq A$, cioè $U \cap A = U$. Qualunque sia $V \in \mathscr{I}_c$ si ha

$$A \cap V \setminus \{c\} \supseteq A \cap U \cap V \setminus \{c\} = U \cap V \setminus \{c\}.$$

Poiché $U \cap V$ è un intervallo, ha più di un elemento, quindi $U \cap V \setminus \{c\} \neq \varnothing$, pertanto anche $A \cap V \setminus \{c\} \neq \varnothing$; perciò $c \in D(A)$.

Se $c \in D(A)$, allora $\forall U \in \mathscr{I}_c$ sia ha $A \cap U \setminus \{c\} \neq \varnothing$, quindi $A \cap U \neq \varnothing$, pertanto c non è esterno ad A, perciò $c \in \overline{A}$. ■

3.1.20 Esempio. Determiniamo il derivato degli insiemi introdotti nell'esempio 3.1.4.

Ogni punto diverso da 0 è esterno ad $A_1 = \{0\}$, quindi, per il teorema 3.1.19, non può essere di accumulazione. Se $U \in \mathscr{I}_0$ allora $A_1 \cap U \setminus \{0\} = \{0\} \setminus \{0\} = \varnothing$.

Pertanto $D(A_1) = \varnothing$ e 0 è un punto isolato per A_1.

L'insieme $A_2 =]1,2[$ coincide con il suo interno, quindi tutti i suoi punti sono di accumulazione. Ogni intorno di 1 contiene dei punti compresi tra 1 e 2, quindi 1 è un punto di accumulazione. Analogamente 2 è un punto di accumulazione. Infine, se $x \notin [1,2]$, allora x è esterno ad A_2, quindi non è punto di accumulazione.

Pertanto $D(A_2) = [1,2]$.

Ragionando come fatto per A_2 si prova che $D(A_3) = D\big([1,2]\big) = [1,2]$.

Tutti i punti di $A_4 =]0,1[\cup]1,2[$ sono interni, quindi sono punti di accumulazione. Si verifica facilmente che 0, 1 e 2 sono punti di accumulazione. Se $x \notin [0,2]$ allora è punto esterno ad A_4, quindi non è di accumulazione.

Pertanto $D(A_4) = [0,2]$.

L'insieme $A_5 = \{0\} \cup [1,2]$ contiene A_2, quindi $D(A_2) = [1,2] \subseteq D(A_5)$. Il punto 0 non è di accumulazione per A_5, perché il suo intorno $]-1/2, 1/2[$ interseca A_5 solo in 0. Infine ogni punto che non appartiene ad A_5 è esterno, quindi non è punto di accumulazione.

Pertanto $D(A_5) = [1,2]$ e 0 è un punto isolato per A_5.

L'insieme $A_6 =]0,+\infty[$ coincide con il suo interno, quindi tutti i suoi punti sono di accumulazione. Ogni intorno di 0 contiene numeri positivi, cioè appartenenti ad A_6, quindi 0 è un punto di accumulazione. Infine, se $x \notin [0,+\infty[$, allora x è esterno A_6, quindi non è punto di accumulazione.

Pertanto $D(A_6) = [0,+\infty[$.

Ragionando come fatto per A_6 si prova che $D(A_7) = D\big([0,+\infty[\big) = [0,+\infty[$.

Sia $x \in A_8 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$, e sia $n \in \mathbb{N}^*$ tale che $x = 1/n$. Se $n = 1$, allora

$$A_8 \cap \left]x - \frac{1}{2}, x + \frac{1}{2}\right[= A_8 \cap \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[= \{1\},$$

pertanto 1 non è punto di accumulazione. Se $n > 1$, allora $1/(n+1) < x < 1(n-1)$ e x è l'unico elemento di A_8 compreso tra tali numeri. Pertanto, se

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right\} = \min\left\{\frac{1}{n(n+1)}, \frac{1}{n(n-1)}\right\} = \frac{1}{n(n+1)},$$

risulta $A_8 \cap]x-\delta, x+\delta[= \{x\}$, pertanto x non è punto di accumulazione per A_8. Qualunque sia $\delta \in \mathbb{R}^+$, se $n > 1/\delta$, allora si ha $1/n < \delta$, quindi $1/n \in]-\delta, \delta[$, pertanto $A_8 \cap]-\delta, \delta[\setminus \{0\} \neq \varnothing$. Quindi 0 é punto di accumulazione per A_8.

Qualunque numero reale non appartenente ad $A_8 \cup \{0\}$ è esterno ad A_8, quindi non è un punto di accumulazione.

Pertanto $D(A_8) = \{0\}$ e tutti i punti di A_8 sono isolati. ◀

I punti limite possono essere caratterizzati anche mediante le successioni, come mostra il seguente teorema.

3.1.21 Teorema

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$ e $c\in\overline{\mathbb{R}}$. Risulta $c\in PL(A)$ se e solo se esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{c\}$ che ha limite c.

Dimostrazione. Supponiamo $c\in PL(A)$ e mostriamo che esiste una successione in $A\setminus\{c\}$ che ha limite c.

Se $c\in\mathbb{R}$, dalla definizione di punto di accumulazione segue che c non è esterno ad $A\setminus\{c\}$, cioè $c\in\overline{A\setminus\{c\}}$ quindi, per il teorema 3.1.7, affermazione I, esiste una successione in $A\setminus\{c\}$ convergente a c.

Se $c=+\infty$, allora, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $]n,+\infty[\cap A\neq\varnothing$, pertanto esiste $a_n\in A$ tale che $a_n>n$. Per il teorema 2.2.14, affermazione I, $a_n\to+\infty$. Abbiamo quindi una successione in $A=A\setminus\{c\}$ che ha limite c.

Se $c=-\infty$ la dimostrazione è analoga, considerando gli intorni del tipo $]-\infty,-n[$.

Viceversa, sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A\setminus\{c\}$ tale che $a_n\to c$. Per la definizione di limite si ha

$$\forall U\in\mathscr{I}_c,\ \exists n_U\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_U\implies a_n\in U.$$

Pertanto, $\forall U\in\mathscr{I}_c$, si ha $a_{n_U+1}\in U$; poiché ogni termine della successione appartiene ad $A\setminus\{c\}$, si ha anche $a_{n_U+1}\in U\cap A\setminus\{c\}$, quindi $U\cap A\setminus\{c\}\neq\varnothing$; pertanto $c\in PL(A)$. ■

3.2 Estremi e limitatezza di funzioni

Le definizioni che seguono sono del tutto analoghe a quelle date per le successioni di numeri reali; invece dell'insieme dei termini, si considera l'immagine della funzione.

Definizione di funzione superiormente limitata, superiormente illimitata e di estremo superiore di una funzione

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$ e $f\colon A\to\mathbb{R}$.
Diciamo che f è **superiormente limitata** quando $Im(f)$ è superiormente limitata. In tal caso chiamiamo **estremo superiore** di f e indichiamo con $\sup f$ l'estremo superiore di $Im(f)$.
Diciamo che f è **superiormente illimitata** quando $Im(f)$ è superiormente illimitata. In tal caso scriviamo $\sup f=+\infty$.

Definizione di funzione inferiormente limitata, inferiormente illimitata e di estremo inferiore di una funzione

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$ e $f\colon A\to\mathbb{R}$.
Diciamo che f è **inferiormente limitata** quando $Im(f)$ è inferiormente limitata. In tal caso chiamiamo **estremo inferiore** di f e indichiamo con $\inf f$ l'estremo inferiore di $Im(f)$.
Diciamo che f è **inferiormente illimitata** quando $Im(f)$ è inferiormente illimitata. In tal caso scriviamo $\inf f=-\infty$.

Definizione di funzione limitata

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **limitata** quando $Im(f)$ è limitata.

Osserviamo che da queste definizioni segue immediatamente che una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è superiormente limitata se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) \leq M$, mentre è inferiormente limitata se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) \geq M$.

3.2.1 Esempio. Consideriamo le funzioni:

$$\begin{aligned} &f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_1(x) = x^2 - 1; \\ &f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}; \\ &f_3 :]-1, 1[\to \mathbb{R}, && f_3(x) = \frac{x}{1-x^2}. \end{aligned}$$

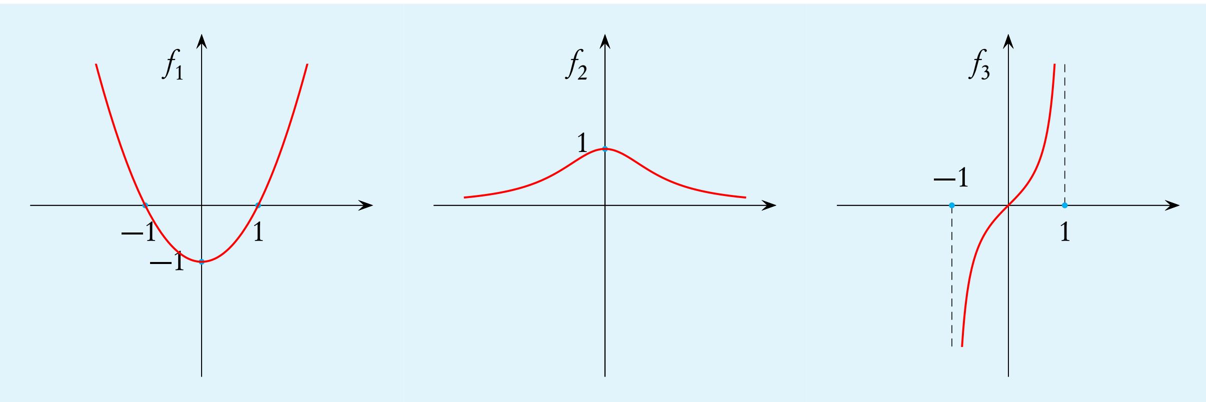


Figura 3.2.1
Le funzioni definite nell'esempio 3.2.1.

Per $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_1(x) = x^2 - 1 \geq -1$, quindi f_1 è inferiormente limitata. Inoltre, poiché $f_1(0) = -1$, è evidente che -1 è il minimo dell'immagine di f_1.

Se $x > 1$, allora $x^2 > x$, quindi $f_1(x) > x - 1$. Pertanto, se $y > 0$, allora $f_1(y+1) > y$, quindi y non è maggiorante dell'immagine di f_1, pertanto f_1 è superiormente illimitata.

Il fatto che f_1 è superiormente illimitata può essere provato anche osservando che la successione $\big(f_1(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = (n^2 - 1)_{n\in\mathbb{N}}$ ha limite $+\infty$, quindi, per il teorema 2.2.19 è superiormente illimitata. Poiché $\big\{f_1(n) \bigm| n \in \mathbb{N}\big\} \subseteq Im(f_1)$, anche $Im(f_1)$ è superiormente illimitato.

Evidentemente, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) > 0$, quindi f_2 è inferiormente limitata e 0 è un minorante di $Im(f_2)$. Inoltre la successione $\big(f_2(n)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big(1/(n^2+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a 0, pertanto, qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, ε non è un minorante della successione, quindi non è neppure un minorante di $Im(f_2)$. Pertanto $\inf f_2 = 0$.

Per $x \in \mathbb{R}$ si ha $x^2 + 1 \geq 1$, quindi $f_2(x) = 1/(x^2+1) \leq 1$. Pertanto f_2 è superiormente limitata, inoltre $1 = f_2(0) = \max Im(f_2)$.

Si ha

$$f_3\left(\frac{n}{n+1}\right)=\frac{n/(n+1)}{1-n^2/(n+1)^2}=\frac{n(n+1)}{(n+1)^2-n^2}=\frac{n(n+1)}{2n+1}\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty\,.$$

Pertanto, per il teorema 2.2.19, $\{f_3(n(n+1))\mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente illimitato. Poiché $Im(f_3)$ contiene tale insieme, è anch'esso superiormente illimitato, quindi $\sup f_3=+\infty$.

Considerando la successione $\big(f_3(-n/(n+1))\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e ragionando in modo analogo, si dimostra che $\inf f_3=-\infty$. ◀

3.3 Limiti di funzioni

3.3.1 Definizioni

Estendiamo il concetto di limite alle funzioni reali di variabile reale.

Nella sezione 2.2 abbiamo definito il limite di una successione per $n\to+\infty$, distinguendo il caso di limite reale o $+\infty$ o $-\infty$, abbiamo poi unificato le definizioni utilizzando gli intorni di un punto di $\overline{\mathbb{R}}$; si ha $a_n\to\ell\in\overline{\mathbb{R}}$ se e solo se

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists n_U\in\mathbb{N}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n>n_U\implies a_n\in U\,.$$

La condizione $n>n_U$ equivale a $n\in\,]n_U,+\infty[$ e questo insieme è un intorno di $+\infty$. Quindi, se è verificata la definizione di limite, allora esiste $V\in\mathscr{I}_{+\infty}$ tale che, per $n\in\mathbb{N}$, risulta $n\in V\implies a_n\in U$. Viceversa, se esiste $V\in\mathscr{I}_{+\infty}$ tale che, per $n\in\mathbb{N}$, risulta $n\in V\implies a_n\in U$, allora è $V=\,]M,+\infty[$, per un $M\in\mathbb{R}$; scelto un numero naturale n_U maggiore o uguale a M si ha $n>n_U\implies n>M\implies a_n\in U$. Pertanto la definizione di limite è equivalente a

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U\in\mathscr{I}_{+\infty}\colon\ \forall n\in\mathbb{N},\quad n\in V_U\implies a_n\in U\,.$$

Questa definizione può essere immediatamente estesa alle funzioni reali di variabile reale. Occorre però tenere presente che, data una funzione $f:A\to\mathbb{R}$, ha senso chiedersi come si comporta $f(x)$ per $x\to+\infty$ solo se la funzione è definita per valori di x arbitrariamente "grandi", cioè se A è superiormente illimitato. Come visto nell'osservazione 3.1.18 ciò equivale al fatto che sia $+\infty\in PL(A)$, cioè che ogni intorno di $+\infty$ abbia intersezione non vuota con A. Sotto questa condizione su A, possiamo allora dire che, per $x\to+\infty$, $f(x)$ ha limite $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$, quando

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U\in\mathscr{I}_{+\infty}\colon\ \forall x\in A,\quad x\in V_U\implies f(x)\in U\,.$$

La definizione può essere facilmente modificata in modo da tenere conto del comportamento di $f(x)$ quando x si "avvicina" a un numero reale c o a $-\infty$, basta chiedere l'esistenza di un intorno di c o di $-\infty$, anziché di un intorno di $+\infty$. Nel caso del numero reale c risulta utile considerare il comportamento della funzione nei punti vicini, ma diversi da c, pertanto nella definizione si considerano solo gli elementi di $A\setminus\{c\}$.

Perché la definizione abbia qualche interesse è necessario che, qualunque sia $V \in \mathscr{I}_c$, esistano in V elementi di $A \setminus \{c\}$; in caso contrario, scegliendo come V_U un intorno di c che ha intersezione vuota con $A \setminus \{c\}$, l'implicazione $x \in V_U \implies f(x) \in U$ è sempre verificata, portando a concludere che qualunque elemento di $\overline{\mathbb{R}}$ è limite di $f(x)$. Nel dare la definizione di limite per $x \to c$ è quindi necessario supporre che c sia un punto limite del dominio di f.

Diamo quindi la seguente definizione.

Definizione di limite di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Diciamo che $f(x)$ ha **limite** ℓ per x che tende a c e scriviamo $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ (o anche $f(x) \to \ell$ per $x \to c$) quando

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c\colon\ \forall x \in A \setminus \{c\},\quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

La definizione di limite si può scrivere anche in un'altra forma, che cambia a seconda che c e ℓ siano reali o no. Esplicitando la definizione di intorno, abbiamo quanto segue.

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+\colon\ \forall x \in A \setminus \{c\},\quad x \in]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$, si ha $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+\colon\ \forall x \in A \setminus \{c\},\quad x \in]c-\delta_M, c+\delta_M[\implies f(x) > M.$$

Se $c \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$, si ha $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta_M \in \mathbb{R}^+\colon\ \forall x \in A \setminus \{c\},\quad x \in]c-\delta_M, c+\delta_M[\implies f(x) < M.$$

Se $c = +\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists K_\varepsilon \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in A,\quad x \in]K_\varepsilon, +\infty[\implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Se $c = +\infty$ e $\ell = +\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists K_M \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in A,\quad x \in]K_M, +\infty[\implies f(x) > M.$$

Se $c = +\infty$ e $\ell = -\infty$, si ha $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists K_M \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in A,\quad x \in]K_M, +\infty[\implies f(x) < M.$$

Se $c = -\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell$ se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists K_\varepsilon \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in A,\quad x \in]-\infty, K_\varepsilon[\implies |f(x)-\ell| < \varepsilon.$$

Se $c = -\infty$ e $\ell = +\infty$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists K_M \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in A,\quad x \in]-\infty, K_M[\implies f(x) > M.$$

Se $c = -\infty$ e $\ell = -\infty$, si ha $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ se e solo se

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists K_M \in \mathbb{R}\colon\ \forall x \in A,\quad x \in]-\infty, K_M[\implies f(x) < M.$$

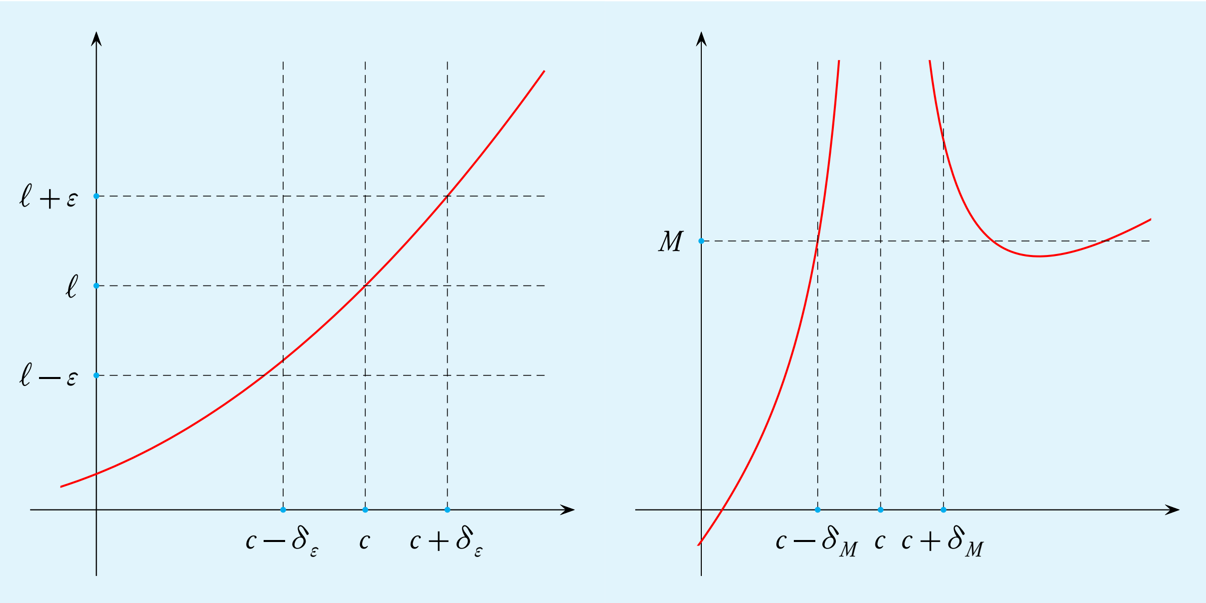


Figura 3.3.1
Illustrazione delle definizioni di $\lim_{x\to c} f(x)=\ell\in\mathbb{R}$ a sinistra e $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ a destra. A sinistra, se x è compreso tra $c-\delta_\varepsilon$ e $c+\delta_\varepsilon$, allora $f(x)$ è compreso tra $\ell-\varepsilon$ e $\ell+\varepsilon$. A destra, se x è compreso tra $c-\delta_M$ e $c+\delta_M$, allora $f(x)$ è maggiore di M.

Osserviamo che nel caso $\ell\in\mathbb{R}$ la condizione $|f(x)-\ell|<\varepsilon$ è tanto più restrittiva quanto più ε è piccolo: se essa è verificata per un certo valore di ε allora è verificata anche per ogni valore più grande. Nella definizione di limite uguale a $+\infty$, se la condizione $f(x)>M$ è verificata per un certo M allora è verificata per tutti gli M più piccoli; ad esempio se la condizione è verificata per ogni $M\in\mathbb{R}^+$ allora è verificata per ogni $M\in\mathbb{R}$. Nel caso di limite uguale a $-\infty$ si ha analogamente che è sufficiente chiedere che sia verificata la condizione per ogni $M\in\mathbb{R}^-$.

Analogamente, quando $c=+\infty$, se si può scegliere un certo valore di K_ε allora anche ogni valore più grande verifica la condizione; in particolare nella definizione si può richiedere che sia $K_\varepsilon>0$. Se invece $c=-\infty$ allora nella definizione si può richiedere che sia $K_\varepsilon<0$.

Per indicare che una funzione ha limite utilizziamo una terminologia analoga a quella introdotta per le successioni.

Definizione di funzione convergente, divergente, regolare, oscillante

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(A)$.
Diciamo che $f(x)$ è **convergente** per x che tende a c quando esiste reale $\lim_{x\to c} f(x)$.
Diciamo che $f(x)$ è **divergente** per x che tende a c quando $f(x)$ ha limite $+\infty$ oppure $-\infty$ per x che tende a c; in particolare diciamo che $f(x)$ è **divergente positivamente** nel primo caso, **divergente negativamente** nel secondo caso.
Diciamo che $f(x)$ è **regolare** per x che tende a c quando è convergente oppure divergente.
Diciamo che $f(x)$ è **oscillante** per x che tende a c quando non è regolare.

Un particolare esempio di funzioni convergenti sono le funzioni costanti, cioè quelle che a ogni elemento del dominio fanno corrispondere lo stesso valore. È ovvio infatti che se f è tale che, $\forall x \in \mathscr{D}(f)$, si ha $f(x)=m$ allora $\lim_{x\to c} f(x)=m$ qualunque sia $c\in PL(\mathscr{D}(f))$.

3.3.1 Esempio. Consideriamo le funzioni:

$$f_4\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \qquad f_4(x)=\frac{1}{x};$$
$$f_5\colon [0,+\infty[\,\to \mathbb{R}, \qquad f_6(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x};$$
$$f_6\colon [0,1[\,\cup\,]1,+\infty[\,\to \mathbb{R}, \qquad f_5(x)=\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}.$$

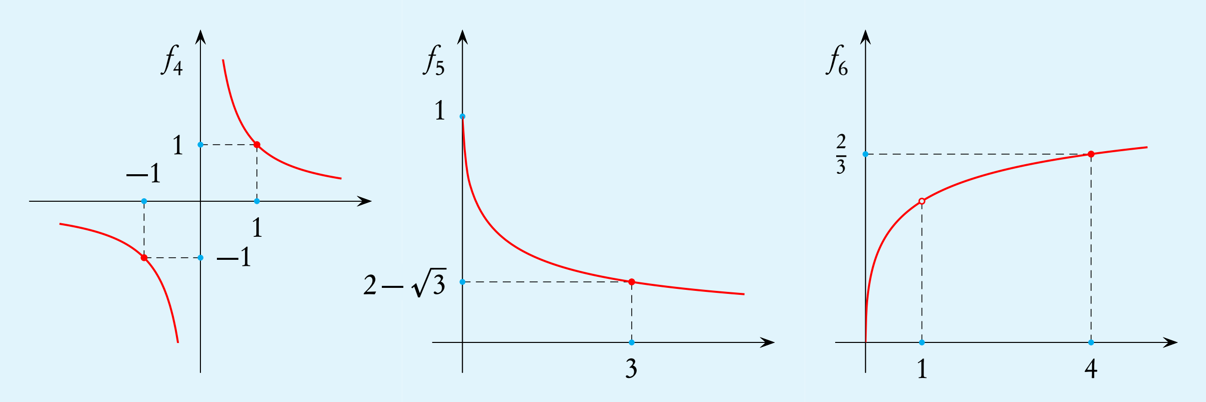


Figura 3.3.2
Le funzioni definite nell'esempio 3.3.1.

Studiamone alcuni limiti.

Proviamo che $\lim_{x\to-\infty} f_4(x) = 0$. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, si ha $|f_4(x)-0| < \varepsilon$ se e solo se $|1/x|<\varepsilon$, che equivale a $|x|>1/\varepsilon$, cioè $x>1/\varepsilon$ o $x<-1/\varepsilon$. Pertanto, se $x<-1/\varepsilon$, allora $|f_4(x)-0|<\varepsilon$, quindi $f_4(x)\to 0$, per $x\to-\infty$.

Da ciò segue che anche per $x>1/\varepsilon$ si ha $|f_4(x)-0|<\varepsilon$, quindi risulta $f_4(x)\to 0$, per $x\to+\infty$.

La funzione f_4 è superiormente e inferiormente illimitata in ogni intorno di 0. Infatti siano $\delta, M \in \mathbb{R}^+$. Se $x\in \big]0,\min\{\delta,1/M\}\big[$, allora $x\in\,]-\delta,\delta[\,\setminus\{0\}$ e $f_4(x)=1/x>M$, pertanto $f_4\big(]-\delta,\delta[\,\setminus\{0\}\big)$ è superiormente illimitato. In modo analogo si dimostra che tale insieme è inferiormente illimitato. Pertanto, per il teorema 3.3.10, f_4 non ha limite per $x\to 0$.

Dimostriamo che $f_5(x)\to 0$ per $x\to+\infty$. Sia $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$. Poiché, $\forall x\in[0,+\infty[$, si ha $\sqrt{x+1}>\sqrt{x}$, risulta $|f_5(x)|<\varepsilon$ se e solo se $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\varepsilon$. Ciò equivale a

$$\sqrt{x+1}<\sqrt{x}+\varepsilon,$$
$$x+1<x+2\varepsilon\sqrt{x}+\varepsilon^2,$$
$$1-\varepsilon^2<2\varepsilon\sqrt{x}.$$

Se $\varepsilon > 1$ la disequazione è verificata per $x \in [0,+\infty[$, mentre se $\varepsilon \leq 1$ è verificata per $x \in \left](1-\varepsilon^2)/\varepsilon,+\infty\right[$. Pertanto $f_5(x) \to 0$, per $x \to +\infty$.

Proviamo che $f_6(x) \to 1/2$ per $x \to 1$.

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, studiamo la disequazione $\left|f_6(x)-(1/2)\right| < \varepsilon$. Tale disequazione equivale al sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} - \dfrac{1}{2} < \varepsilon\,, \\ \dfrac{x-\sqrt{x}}{x-1} - \dfrac{1}{2} > -\varepsilon\,, \end{cases}$$

e quindi equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{2\left(x-\sqrt{x}\right)-(x-1)-2\varepsilon(x-1)}{2(x-1)} < 0\,, \\ \dfrac{2\left(x-\sqrt{x}\right)-(x-1)+2\varepsilon(x-1)}{2(x-1)} > 0\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{(1-2\varepsilon)x-2\sqrt{x}+1+2\varepsilon}{2(x-1)} < 0\,, \\ \dfrac{(1+2\varepsilon)x-2\sqrt{x}+1-2\varepsilon}{2(x-1)} > 0\,. \end{cases}$$

Studiamo il segno del numeratore di ciascuna delle due frazioni. Ponendo $y=\sqrt{x}$, dobbiamo studiare il segno dei seguenti trinomi di secondo grado:

$$(1-2\varepsilon)y^2-2y+1+2\varepsilon\,, \qquad (1+2\varepsilon)y^2-2y+1-2\varepsilon\,.$$

Per studiare il segno del primo occorre distinguere a seconda che il coefficiente $1-2\varepsilon$ sia positivo, nullo o negativo; tale coefficiente è positivo per $\varepsilon < 1/2$, quindi è sufficiente studiare questo caso. Il primo trinomio si annulla per

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-(1-2\varepsilon)(1+2\varepsilon)}}{1-2\varepsilon} = \frac{1 \pm \sqrt{4\varepsilon^2}}{1-2\varepsilon} = \frac{1 \pm 2\varepsilon}{1-2\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\,, \\ 1\,. \end{cases}$$

Il secondo trinomio si annulla per

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{1^2-(1+2\varepsilon)(1-2\varepsilon)}}{1+2\varepsilon} = \frac{1 \pm \sqrt{4\varepsilon^2}}{1+2\varepsilon} = \frac{1 \pm 2\varepsilon}{1+2\varepsilon} = \begin{cases} 1\,, \\ \dfrac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\,. \end{cases}$$

Pertanto

$$(1-2\varepsilon)y^2-2y+1+2\varepsilon = (1-2\varepsilon)(y-1)\left(y-\frac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right),$$

$$(1+2\varepsilon)y^2-2y+1-2\varepsilon = (1+2\varepsilon)(y-1)\left(y-\frac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right).$$

Pertanto il sistema equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{1-2\varepsilon}{2}\,\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}\right)<0, \\[2ex] \dfrac{1+2\varepsilon}{2}\,\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}\left(\sqrt{x}-\dfrac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)>0. \end{cases}$$

Poiché, $\forall x \in [0,1[\cup]1,+\infty[$, si ha $\big(\sqrt{x}-1\big)/(x-1)>0$, il sistema equivale a

$$\begin{cases} \sqrt{x}<\dfrac{1+2\varepsilon}{1-2\varepsilon}, \\[2ex] \sqrt{x}>\dfrac{1-2\varepsilon}{1+2\varepsilon}. \end{cases}$$

che è verificato per

$$\frac{(1-2\varepsilon)^2}{(1+2\varepsilon)^2}<x<\frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1-2\varepsilon)^2}.$$

Pertanto, posto

$$\delta=\min\left\{1-\frac{(1-2\varepsilon)^2}{(1+2\varepsilon)^2},\frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1-2\varepsilon)^2}-1\right\},$$

se $x\in\mathscr{D}(f_6)$ è tale che $x\in\,]1-\delta,1+\delta[$, allora $\big|f_6(x)-(1/2)\big|<\varepsilon$.

Quindi $\lim_{x\to 1} f_6(x)=1/2$.

Proviamo che $\lim_{x\to+\infty} f_6(x)=1$.

Fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, studiamo la disequazione $\big|f_6(x)-1\big|<\varepsilon$. poiché studiamo il limite per $x\to+\infty$, per semplificare la risoluzione, possiamo considerare $x>1$, per cui risulta $x-\sqrt{x}<x-1$, perciò $f_6(x)<1$. Quindi la disequazione equivale a

$$1-\frac{x-\sqrt{x}}{x-1}<\varepsilon,$$

$$\frac{(\varepsilon-1)(x-1)+\big(x-\sqrt{x}\big)}{x-1}>0,$$

$$\varepsilon x-\sqrt{x}+1-\varepsilon>0.$$

Posto $y=\sqrt{x}$, la disequazione diventa $\varepsilon y^2-y+1-\varepsilon>0$. Il trinomio di secondo grado $\varepsilon y^2-y+1-\varepsilon$ ha coefficiente di y^2 positivo, quindi esiste K (che possiamo scegliere positivo) tale che per $y>K$ il trinomio è positivo; pertanto se $x>K^2$ allora $\varepsilon x-\sqrt{x}+1-\varepsilon>0$.

Questo prova che $f_6(x)\to 1$, per $x\to+\infty$. ◀

Il concetto di limite di funzione è strettamente collegato a quello di limite di successione.

Innanzitutto una successione di numeri reali è una funzione da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}$, quindi essa è anche una funzione reale di variabile reale; poiché $PL(\mathbb{N})=\{+\infty\}$ per una tale funzione è definito il limite quando l'argomento tende a $+\infty$. Si verifica facilmente che in tale caso il concetto di limite di funzione coincide con il concetto di limite di successione.

Inoltre i limiti di funzioni sono legati ai limiti di successioni dal teorema seguente, che in molti casi consente di dedurre facilmente da un teorema relativo ai limiti di successioni un teorema analogo per i limiti di funzioni.

3.3.2 Teorema (di relazione tra limite di funzione e limite di successione)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$;

II) per ogni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $A \setminus \{c\}$ che tende a c si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$.

Dimostrazione. I $\implies$ II) Supponiamo che sia $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ we consideriamo una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{c\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$.

Per la definizione di limite si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c \colon\ \forall x \in A \setminus \{c\},\quad x \in V_U \implies f(x) \in U,$$

mentre per la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$ si ha

$$\forall W \in \mathscr{I}_c,\ \exists n_W \in \mathbb{N} \colon\ \forall n \in \mathbb{N},\quad n > n_W \implies a_n \in W.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, poniamo $W = V_U$. Se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $n > n_{V_U}$ allora si ha $a_n \in V_U \cap A \setminus \{c\}$, quindi $f(a_n) \in U$. Perciò

$$n > n_{V_U} \implies f(a_n) \in U,$$

quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$ e vale l'affermazione II.

II $\implies$ I) Dimostriamo che se l'affermazione I è falsa allora è falsa anche la II; cioè proviamo che, se non si ha $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$, allora esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{c\}$ tale che $a_n \to c$, ma non si ha $f(a_n) \to \ell$.

Se non si ha $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ allora

$$\exists \overline{U} \in \mathscr{I}_\ell \colon\ \forall V \in \mathscr{I}_c,\ \exists x \in A \setminus \{c\} \colon\quad x \in V \wedge f(x) \notin \overline{U}.$$

Se $c \in \mathbb{R}$ allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[\ \in \mathscr{I}_c$, pertanto esiste un elemento di $A \cap]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[\setminus \{c\}$, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) \notin \overline{U}$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così costruita ha termini in $A\setminus\{c\}$; inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$c - \frac{1}{n+1} < a_n < c + \frac{1}{n+1},$$

quindi, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$. D'altra parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) \notin \overline{U}$, quindi la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non può avere limite ℓ. Perciò l'affermazione II non è verificata.

Se invece $c = +\infty$ si procede in modo analogo considerando, anziché gli intorni del tipo $\big]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)\big[$, gli intorni di $+\infty$ del tipo $]n, +\infty[$.

Infine se $c = -\infty$ si procede in modo analogo al caso $c = +\infty$. ■

3.3.3 Osservazione. Da questo teorema segue che se esiste $\lim_{x\to c} f(x)$, allora date due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A\setminus\{c\}$ convergenti a c le successioni $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(f(b_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sono regolari e hanno lo stesso limite. Pertanto se due successioni di tale tipo hanno limite diverso, allora non esiste $\lim_{x\to c} f(x)$. ◀

3.3.4 Esempio. L'osservazione 3.3.3 può essere utilizzata per dare una dimostrazione diversa del fatto che non esiste $\lim_{x\to 0}(1/x)$, già dimostrato nell'esempio 3.3.1. Infatti le successioni $\big(1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(-1/(n+1)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ convergono a 0, ma

$$\frac{1}{1/(n+1)} = n+1 \to +\infty\,, \qquad \frac{1}{-1/(n+1)} = -n-1 \to -\infty\,.$$ ◀

3.3.2 Teoremi fondamentali sui limiti

Rivediamo ora i teoremi sui limiti di successioni, studiati nelle sezioni 2.2 e 2.3, adattandoli ai limiti di funzioni. In molti casi il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2 consente di dimostrare facilmente i teoremi che enunciamo.

Per utilizzare la notazione $\lim_{x\to c} f(x)$ senza ambiguità è necessario assicurarsi che una funzione non possa avere due limiti distinti per x che tende a uno stesso valore. Ciò è garantito dal teorema seguente.

3.3.5 Teorema (di unicità del limite)

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, $c\in PL(A)$ e $\ell, m\in\overline{\mathbb{R}}$. Se ℓ e m sono entrambi limite di $f(x)$ per $x\to c$, allora $\ell = m$.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A\setminus\{c\}$ che ha limite c (tale successione esiste per il teorema 3.1.21). Allora, per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ ha come limite sia ℓ che m, quindi, per il teorema di unicità del limite 2.2.20, si ha $\ell = m$. ■

Il concetto di limite di una funzione dipende solo dai valori che la funzione assume in punti del dominio vicini a c (e diversi da c stesso). In altre parole: se si modifica una funzione al di fuori di un intorno di c il limite per $x\to c$, se esiste, non cambia. Ciò si traduce nel teorema seguente.

3.3.6 Teorema

Siano $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$, $g\colon B\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(A)\cap PL(B)$. Supponiamo che esista $W\in\mathscr{I}_c$ tale che

a) $A\cap W\setminus\{c\} = B\cap W\setminus\{c\}$,

b) $\forall x\in A\cap W\setminus\{c\}$, si ha $f(x) = g(x)$.

Se $f(x)$ è regolare per $x\to c$, allora anche $g(x)$ è regolare per $x\to c$ e risulta $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x)$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f(x)$. Per la definizione di limite risulta

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c\colon\ \forall x \in A\setminus\{c\},\quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

Fissato $U \in \mathscr{I}_\ell$, si ha $A \cap V_U \cap W \setminus \{c\} = B \cap V_U \cap W \setminus \{c\}$, quindi

$$x \in B\cap V_U \cap W \setminus\{c\} \implies x \in A \cap V_U \setminus \{c\} \implies f(x) \in U;$$

inoltre

$$x \in B \cap V_U \cap W \setminus \{c\} \implies x \in B \cap W \setminus \{c\} \implies f(x) = g(x),$$

perciò

$$x \in B \cap V_U \cap W \setminus \{c\} \implies g(x) \in U;$$

poiché $V_U \cap W$ è un intorno di c risulta $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$. ■

Questo teorema assicura che i teoremi che seguono sono applicabili anche se le ipotesi sono verificate solo in un intorno del punto a cui tende la variabile, escluso il punto stesso, e non in tutto il dominio.

3.3.7 Teorema (del confronto)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$. Supponiamo che $f(x)$ e $g(x)$ siano regolari per $x \to c$. Se $\forall x \in A \setminus \{c\}$, si ha $f(x) \le g(x)$, allora $\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$.

Dimostrazione. Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in $A\setminus\{c\}$ che tende a c; si ha, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \le g(a_n)$. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2 risulta $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{x\to c} f(x)$ e $\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = \lim_{x\to c} g(x)$. Per il teorema del confronto per limiti di successioni 2.2.17 si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le \lim_{n\to+\infty} g(a_n)$, quindi $\lim_{x\to c} f(x) \le \lim_{x\to c} g(x)$. ■

3.3.8 Teorema (della permanenza del segno)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $m \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che $f(x)$ sia regolare per $x \to c$.

I) Se $\lim_{x\to c} f(x) > m$, allora esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che, $\forall x \in A \cap W \setminus \{c\}$, si ha $f(x) > m$.

II) Se $\lim_{x\to c} f(x) < m$, allora esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che, $\forall x \in A \cap W \setminus \{c\}$, si ha $f(x) < m$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f(x)$. Poiché $\ell > m$, si ha $\ell > -\infty$ e $m < +\infty$. Per la definizione di limite si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c\colon\ \forall x \in A\setminus\{c\},\quad x \in V_U \implies f(x) \in U.$$

Se $m = -\infty$ la tesi è verificata.

Consideriamo il caso $m \in \mathbb{R}$. Poniamo $U = \left]m, +\infty\right[$ se $\ell = +\infty$, mentre poniamo $U = \left]\ell-(\ell-m), \ell+(\ell-m)\right[$ se $\ell \in \mathbb{R}$. In ciascuno dei due casi $y \in U \implies y > m$; quindi

$$x \in A \cap V_U \setminus \{c\} \implies f(x) \in U \implies f(x) > m.$$

II) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ■

3.3.9 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : A \to \mathbb{R}$, $h : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

I) Se $f(x)$ e $h(x)$ sono convergenti per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x),$$

allora $g(x)$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x).$$

II) Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to c$, allora $g(x) \to +\infty$ per $x \to c$.

III) Se $h(x) \to -\infty$ per $x \to c$, allora $g(x) \to -\infty$ per $x \to c$.

Dimostrazione. I) Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} h(x)$. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $A \setminus \{c\}$ convergente a c si ha

$$\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim_{n\to+\infty} h(a_n) = \ell;$$

poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, sia $f(a_n) \leq g(a_n) \leq h(a_n)$, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11 risulta $\lim_{n\to+\infty} g(a_n) = \ell$. Pertanto, utilizzando nuovamente il teorema di relazione 3.3.2, si può concludere che $\lim_{x\to c} g(x) = \ell$.

II, III) La dimostrazione si ottiene con ovvie modifiche da quella dell'affermazione precedente. ■

3.3.10 Teorema (sulla limitatezza delle funzioni regolari)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ è convergente per $x \to c$, allora esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è limitato.

II) Se $f(x) \to +\infty$ per $x \to c$, allora, $\forall V \in \mathscr{I}_c$, $f(A \cap V)$ è superiormente illimitato ed esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è inferiormente limitato.

III) Se $f(x) \to -\infty$ per $x \to c$, allora, $\forall V \in \mathscr{I}_c$, $f(A \cap V)$ è inferiormente illimitato ed esiste $W \in \mathscr{I}_c$ tale che $f(A \cap W)$ è superiormente limitato.

DIMOSTRAZIONE. I) Poniamo $\ell=\lim_{x\to c} f(x)$. Scegliendo $U=]\ell-1,\ell+1[$ nella definizione di limite, si ha

$$x\in A\cap V_U\setminus\{c\}\implies \ell-1<f(x)<\ell+1.$$

Quindi $f(A\cap V_U\setminus\{c\})$ è limitato. Se $c\notin A$ tale insieme coincide con $f(A\cap V_U)$, che quindi è limitato; in caso contrario $f(A\cap V_U)=\{f(c)\}\cup f(A\cap V_U\setminus\{c\})$, che è limitato, perché unione di due insiemi limitati.

II) Poiché $c\in PL(A)$, per il teorema 3.1.21 esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $A\setminus\{c\}$ che ha limite c. Esiste $\overline{n}$ tale che per $n\geq\overline{n}$ si ha $a_n\in V$, quindi la sottosuccessione $(a_{\overline{n}+n})_{n\in\mathbb{N}}$, è una successione in $A\cap V\setminus\{c\}$ convergente a c. Per il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2, si ha $\lim_{n\to+\infty} f(a_{\overline{n}+n})=\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$, pertanto, per il teorema 2.2.19, affermazione II, $\{f(a_{\overline{n}+n})\mid n\in\mathbb{N}\}$ è superiormente illimitato. Perciò anche $f(A\cap V)$, che contiene tale insieme, è superiormente illimitato.

Scegliendo $U=]0,+\infty[$ nella definizione di limite, si ha

$$x\in A\cap V_U\setminus\{c\}\implies f(x)>0,$$

perciò, se $c\notin A$ allora 0 è un minorante di $f(A\cap V_U)$, mentre se $c\in A$ allora un minorante di $f(A\cap V_U)$ è $\min\{0,f(c)\}$. In ogni caso $f(A\cap W)$ è inferiormente limitata.

III) La dimostrazione è analoga a quella dell'affermazione precedente. ∎

3.3.11 Teorema (sul limite della restrizione)

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $B\subseteq A$, $f\colon A\to\mathbb{R}$ e $c\in PL(B)$. Se esiste $\lim_{x\to c} f(x)$ allora esiste $\lim_{x\to c} f|_B(x)$ e si ha

$$\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} f|_B(x).$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\ell=\lim_{x\to c} f(x)$. Per la definizione di limite si ha

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists V_U\in\mathscr{I}_c\colon\ \forall x\in A\setminus\{c\},\quad x\in V_U\implies f(x)\in U.$$

Poiché $B\subseteq A$ e, $\forall x\in B$, si ha $f|_B(x)=f(x)$, qualunque sia $U\in\mathscr{I}_\ell$, se $x\in B\cap V_U\setminus\{c\}$ allora si ha $f|_B(x)\in U$; perciò $\lim_{x\to c} f|_B(x)=\ell$. ∎

3.3.12 Teorema (sul limite della composizione)

Siano $A,B\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to B$, $g\colon B\to\mathbb{R}$, $c\in PL(A)$, $\ell\in PL(B)$ e $m\in\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che esistano $\lim_{x\to c} f(x)=\ell$ e $\lim_{y\to\ell} g(y)=m$ e che sia verificata una delle seguenti condizioni:

a) $\forall x\in A\setminus\{c\}$, si ha $f(x)\neq\ell$,

b) $\ell\in B$ e $g(\ell)=m$.

Allora esiste $\lim_{x\to c}(g\circ f)(x)$ e tale limite è uguale a m.

Dimostrazione. Per la definizione di limite si ha:

$$\forall U \in \mathscr{I}_m, \exists V_U \in \mathscr{I}_\ell \colon \forall y \in B \setminus \{\ell\}, \quad y \in V_U \implies g(y) \in U,$$
$$\forall W \in \mathscr{I}_\ell, \exists Z_W \in \mathscr{I}_c \colon \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in Z_W \implies f(x) \in W.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_m$, per $x \in A \cap Z_{V_U} \setminus \{c\}$ si ha $f(x) \in V_U$; poiché l'immagine di f è inclusa in B, è anche $f(x) \in B \cap V_U$.

Per poter proseguire nella dimostrazione bisogna utilizzare una delle condizioni a) e b).

Se vale a) allora si ha sempre $f(x) \neq \ell$, quindi

$$x \in A \cap Z_{V_U} \setminus \{c\} \implies f(x) \in B \cap V_U \setminus \{\ell\} \implies g\big(f(x)\big) \in U;$$

perciò risulta $\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = m$.

Se invece vale b) allora si ha

$$\begin{aligned} y \in B \cap V_U &\implies \big(y \in B \cap V_U \setminus \{\ell\} \vee y = \ell\big) \\ &\implies \big(g(y) \in U \vee g(y) = m\big) \\ &\implies g(y) \in U \cup \{m\} = U, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} x \in A \cap Z_{V_U} \setminus \{c\} &\implies f(x) \in B \cap V_U \\ &\implies g\big(f(x)\big) \in U. \end{aligned}$$

Anche in questo caso risulta $\lim_{x\to c} g\big(f(x)\big) = m$. ■

Osserviamo che se $\ell = \pm\infty$, allora è verificata l'ipotesi a), perché f assume valori reali.

3.3.13 Osservazione. Notiamo che il teorema sul limite della composizione, oltre alle ovvie richieste sull'esistenza dei limiti delle funzioni che si compongono, ha anche una ipotesi aggiuntiva. Come risulta evidente dalla dimostrazione, ciò è necessario perché, se ℓ appartiene al dominio di g, per studiare il limite della funzione composta sono necessarie informazioni su $g(\ell)$, che non seguono dalla conoscenza di $\lim_{y\to\ell} g(y)$.

Vediamo che se non è verificata nessuna delle due ipotesi aggiuntive, allora può non essere verificata la tesi del teorema. Siano

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = -1,$$
$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(y) = \begin{cases} 2y, & \text{se } y \neq -1, \\ -3, & \text{se } y = -1. \end{cases}$$

Risulta $\lim_{x\to 0} f(x) = -1$ e $\lim_{y\to -1} g(y) = -2$, ma

$$\lim_{x\to 0}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to 0} g\big(f(x)\big) = \lim_{x\to 0} g(-1) = \lim_{x\to 0}(-3) = -3.$$

Quindi, con le notazioni del teorema, $\lim_{x\to c}(g\circ f)(x) \neq m$. ◀

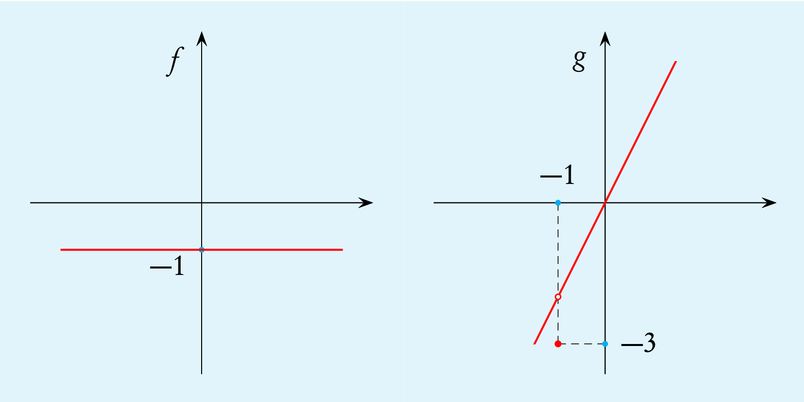


Figura 3.3.3
Le funzioni f e g introdotte nell'osservazione 3.3.13.

3.3.3 Limite sinistro e limite destro

Studiamo limiti di particolari restrizioni di una funzione che hanno un notevole interesse.

Definizione di limite sinistro e limite destro di una funzione

Siano $A\subseteq\mathbb{R}$, $f\colon A\to\mathbb{R}$ e $c\in\mathbb{R}$.
Se $c\in D\big(A\cap\,]-\infty,c[\big)$, diciamo che $f(x)$ ha **limite sinistro** ℓ per x che tende a c (o anche $f(x)$ ha **limite** ℓ per x che tende a c **da sinistra**) e scriviamo $\lim_{x\to c^-}f(x)=\ell$ quando $\lim_{x\to c}f|_{A\cap]-\infty,c[}(x)=\ell$.
Se $c\in D\big(A\cap\,]c,+\infty[\big)$, diciamo che $f(x)$ ha **limite destro** ℓ per x che tende a c (o anche $f(x)$ ha **limite** ℓ per x che tende a c **da destra**) e scriviamo $\lim_{x\to c^+}f(x)=\ell$ quando $\lim_{x\to c}f|_{A\cap]c,+\infty[}(x)=\ell$.

3.3.14 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_4\colon\mathbb{R}^*\to\mathbb{R},\qquad f_4(x)=\frac{1}{x},$$

già studiata nell'esempio 3.3.1. Studiamo i limiti sinistro e destro di tale funzione in 0.

Qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^*\cap\,]-\infty,0[\,=\mathbb{R}^-$ convergente a 0, per il teorema 2.3.4, affermazione III, risulta $f_4(a_n)=1/a_n\to-\infty$. Pertanto $\lim_{x\to 0^-}f_4(x)=-\infty$.

Qualunque sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in $\mathbb{R}^*\cap\,]0,+\infty[\,=\mathbb{R}^+$ convergente a 0, per il teorema 2.3.4, affermazione II, risulta $f_4(a_n)=1/a_n\to+\infty$. Pertanto $\lim_{x\to 0^+}f_4(x)=+\infty$. ◀

Dalla definizione segue che $\lim_{x\to c^-}f(x)=\ell$ se e solo se

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists\delta_U\in\mathbb{R}^+\colon\ \forall x\in A,\quad x\in\,]c-\delta_U,c[\implies f(x)\in U,$$

mentre $\lim_{x\to c^+}f(x)=\ell$ se e solo se

$$\forall U\in\mathscr{I}_\ell,\ \exists\delta_U\in\mathbb{R}^+\colon\ \forall x\in A,\quad x\in\,]c,c+\delta_U[\implies f(x)\in U.$$

Il limite sinistro e il limite destro rientrano nella definizione generale di limite per funzioni reali di variabile reale, perciò per essi sono validi tutti i teoremi sui limiti, sia quelli già enunciati che quelli che verranno enunciati in seguito.

Per il teorema sul limite di una restrizione 3.3.11 è evidente che se una funzione ha limite per $x \to c$, con $c \in \mathbb{R}$, allora essa ha anche limite sinistro e limite destro per $x \to c$, purché le corrispondenti definizioni abbiano senso; cioè se $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$ e $c \in D(A \cap]-\infty, c[)$ allora si ha anche $\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ e analogamente per il limite destro.

Se è possibile definire il limite sinistro di una funzione per $x \to c$, ma non il corrispondente limite destro, cioè se $c \in D\big(A \cap]-\infty, c[\big)$, ma $c \notin D\big(A \cap]c, +\infty[\big)$, allora $c \in D(A)$ e le definizioni di limite e di limite sinistro coincidono, in altri termini o esistono entrambi e sono uguali, oppure nessuno dei due esiste. Infatti, se $c \notin D\big(A \cap]c, +\infty[\big)$, allora per $\delta \in \mathbb{R}^+$ sufficientemente piccolo si ha $\big(A \cap]c, +\infty[\big) \cap]c-\delta, c+\delta[= \varnothing$, cioè $A \cap]c, c+\delta[= \varnothing$; pertanto, per tali δ si ha

$$A \cap]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\} = \big(A \cap]c-\delta, c[\big) \cup \big(A \cap]c, c+\delta[\big) = A \cap]c-\delta, c[.$$

In tal caso le due le condizioni $x \in A \cap]c-\delta, c+\delta[\setminus \{c\}$ e $x \in A \cap]c-\delta, c[$ coincidono, quindi la definizione di limite coincide con quella di limite sinistro.

Analogamente se non è definito il limite sinistro allora la definizione di limite e di limite destro coincidono.

Nel caso che abbiano senso sia il limite destro che il limite sinistro si ha il teorema seguente.

3.3.15 Teorema (di relazione tra limiti unilateri e limite bilatero)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$, $c \in D(A \cap]-\infty, c[) \cap D(A \cap]c, +\infty[)$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti.

I) $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$.

II) $\lim_{x\to c^-} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) È una ovvia conseguenza del teorema sul limite di una restrizione 3.3.11, perché limite sinistro e limite destro sono limiti di restrizioni.

II $\Longrightarrow$ I) Supponiamo che sia $\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$.

Per la definizione di limite si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \rho_U \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in A, \quad x \in]c-\rho_U, c[\implies f(x) \in U,$$
$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \sigma_U \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in A, \quad x \in]c, c+\sigma_U[\implies f(x) \in U.$$

Fissato $U \in \mathscr{I}_c$, poniamo $\delta_U = \min\{\rho_U, \sigma_U\}$. Si ha

$$]c-\delta_U, c+\delta_U[\setminus \{c\} =]c-\delta_U, c[\cup]c, c+\delta_U[\subseteq]c-\rho_U, c[\cup]c, c+\sigma_U[;$$

quindi, se $x \in A \cap]c-\delta_U, c+\delta_U[\setminus \{c\}$, allora $x \in A \cap]c-\rho_U, c[$ oppure $x \in A \cap]c, c+\sigma_U[$, in ciascuno dei due casi $f(x) \in U$. Pertanto $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. ■

3.3.4 Operazioni sui limiti

I teoremi che seguono sono del tutto analoghi ai teoremi relativi alle operazioni per i limiti di successioni (teoremi 2.3.1, 2.3.2, 2.3.4 e 2.3.6); essi sono dimostrabili a partire da tali teoremi, utilizzando il teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2.

3.3.16 Teorema (sul limite della somma)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono convergenti per $x \to c$ allora $f(x) + g(x)$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x).$$

II) Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e g è inferiormente limitata allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = +\infty.$$

III) Se $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$ e $g(x)$ ha limite diverso da $-\infty$ per $x \to c$ allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = +\infty.$$

IV) Se $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ e g è superiormente limitata allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = -\infty.$$

V) Se $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$ e $g(x)$ ha limite diverso da $+\infty$ per $x \to c$ allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)+g(x)\big) = -\infty.$$

Come nel caso delle successioni, questo teorema consente di calcolare il limite della somma di due funzioni quando si conosce il limite di ciascuno dei due addendi, con l'esclusione del caso in cui una delle due funzioni diverge a $+\infty$ e l'altra diverge a $-\infty$. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata**.

3.3.17 Teorema (sul limite del prodotto)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ e $g(x)$ sono convergenti per $x \to c$ allora $f(x)g(x)$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x) \lim_{x\to c} g(x).$$

II) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $\inf g\big(A \setminus \{c\}\big) > 0$ allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x).$$

III) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $g(x)$ ha limite maggiore di 0 per $x \to c$ allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = \lim_{x\to c} f(x).$$

IV) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $\sup g\big(A \setminus \{c\}\big) < 0$ allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = -\lim_{x\to c} f(x).$$

V) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ e $g(x)$ ha limite minore di 0 per $x \to c$ allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = -\lim_{x\to c} f(x).$$

VI) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e g è limitata allora

$$\lim_{x\to c}\big(f(x)g(x)\big) = 0.$$

Come nel caso delle successioni, questo teorema consente di calcolare il limite del prodotto di due funzioni quando si conosce il limite di ciascuno dei due fattori, con l'esclusione del caso in cui una delle funzioni diverge (positivamente o negativamente) e l'altra converge a 0. In tal caso diciamo che si ha un limite in **forma indeterminata**.

3.3.18 Teorema (sul limite del reciproco)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ è convergente per $x \to c$ e $\lim_{x\to c} f(x) \neq 0$ allora la funzione $1/f$ è convergente per $x \to c$ e

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\lim_{x\to c} f(x)}.$$

II) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, si ha $f(x) > 0$ allora

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = +\infty.$$

III) Se $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ e, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, si ha $f(x) < 0$ allora

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

IV) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ allora

$$\lim_{x\to c} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

3.3.19 Teorema (sul limite del valore assoluto)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$.

I) Se $f(x)$ è convergente per $x \to c$ allora la funzione $x \mapsto |f(x)|$ è convergente per $x \to c$ e
$$\lim_{x\to c} |f(x)| = \left|\lim_{x\to c} f(x)\right|.$$

II) Se $f(x)$ è divergente per $x \to c$ allora
$$\lim_{x\to c} |f(x)| = +\infty.$$

III) Se $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$ allora
$$\lim_{x\to c} f(x) = 0.$$

3.3.5 Simboli di Landau

Introduciamo i simboli di Landau per le funzioni, riprendendo quanto fatto nella sottosezione 2.4.2 per le successioni. Elenchiamo definizioni e teoremi analoghi a quelli visti nella sottosezione 2.4.2 per le successioni. Le dimostrazioni sono del tutto analoghe.

I simboli di Landau sono strettamente collegati al concetto di limite. Per un limite di funzione è necessario precisare a quale punto tende la variabile da cui dipende la funzione. Tale precisazione è indispensabile anche quando si utilizzano i simboli di Landau per le funzioni.

Definizione di funzione asintotica

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Diciamo che $f(x)$ è **asintotica** (o **equivalente**) a $g(x)$, per $x \to c$, quando esiste $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = 1$. In tal caso scriviamo $f(x) \sim g(x)$ per $x \to c$.

3.3.20 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$ e che sia $f(x) \sim g(x)$, per $x \to c$. Per $x \to c$ la funzione $f(x)$ è regolare se e solo se $g(x)$ è regolare e in tal caso si ha
$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x).$$

3.3.21 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, k: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$.

I) Se, per $x \to c$, $f(x) \sim h(x)$ e $g(x) \sim k(x)$, allora $f(x)g(x) \sim h(x)k(x)$.

II) Se, per $x \to c$, $h(x) \sim k(x)$, allora $1/h(x) \sim 1/k(x)$.

Definizione di funzione trascurabile

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Diciamo che $f(x)$ è **trascurabile** rispetto a $g(x)$, per $x \to c$, quando esiste $\lim_{x\to c} f(x)/g(x) = 0$. In tal caso scriviamo $f(x) = o(g(x))$, per $x \to c$.

3.3.22 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Per $x \to c$ risulta $f(x) \sim g(x)$ se e solo se $f(x) = g(x) + o(g(x))$.

3.3.23 Teorema (regole di calcolo per o piccolo)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, k : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $m \in \mathbb{R}^*$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$.

I) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $g(x) = o(h(x))$, allora $f(x) + g(x) = o(h(x))$.

II) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$, allora $mf(x) = o(h(x))$.

III) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$, allora $f(x)k(x) = o(h(x)k(x))$.

IV) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $g(x) = o(k(x))$, allora $f(x)g(x) = o(h(x)k(x))$.

V) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $h(x) = o(k(x))$, allora $f(x) = o(k(x))$.

VI) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $h(x) \sim k(x)$, allora $f(x) = o(k(x))$.

Definizione di funzione controllata

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $g(x) \neq 0$. Diciamo che $f(x)$ è **controllata** da $g(x)$, per $x \to c$, quando esiste $V \in \mathscr{I}_c$ tale che la funzione $x \mapsto f(x)/g(x)$ è limitata in $A \cap V \setminus \{c\}$. In tal caso scriviamo $f(x) = O(g(x))$, per $x \to c$.

3.3.24 Teorema (regole di calcolo per o grande)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, k : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $m \in \mathbb{R}^*$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$.

I) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$ e $g(x) = O(h(x))$, allora $f(x) + g(x) = O(h(x))$.

II) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$, allora $mf(x) = O(h(x))$.

III) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$, allora $f(x)k(x) = O(h(x)k(x))$.

IV) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$ e $g(x) = O(k(x))$, allora $f(x)g(x) = O(h(x)k(x))$.

V) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$ e $h(x) = O(k(x))$, allora $f(x) = O(k(x))$.

VI) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$ e $h(x) \sim k(x)$, allora $f(x) = O(k(x))$.

3.3.25 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g, h, k : A \to \mathbb{R}$, $c \in PL(A)$ e $m \in \mathbb{R}^*$; supponiamo che, $\forall x \in A \setminus \{c\}$, sia $h(x) \neq 0$ e $k(x) \neq 0$.

I) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $g(x) = O(h(x))$, allora $f(x) + g(x) = O(h(x))$.

II) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $g(x) = O(k(x))$, allora $f(x)g(x) = o(h(x)k(x))$.

III) Se, per $x \to c$, $f(x) = o(h(x))$ e $h(x) = O(k(x))$, allora $f(x) = o(k(x))$.

IV) Se, per $x \to c$, $f(x) = O(h(x))$ e $h(x) = o(k(x))$, allora $f(x) = o(k(x))$.

3.4 Condizioni per l'esistenza del limite

In questa sezione studiamo la monotonia e la condizione di Cauchy per le funzioni; queste proprietà, come nel caso delle successioni, assicurano l'esistenza di limiti.

3.4.1 Funzioni monotòne

Estendiamo alle funzioni il concetto di monotonia, già definito per le successioni. Ricordiamo che chiamiamo crescente una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tale che si ha $a_{n+1} \geq a_n$, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Questa definizione è motivata dal fatto che $n+1$ è il più piccolo naturale maggiore di n. In generale, se si considerano funzioni con dominio un arbitrario sottoinsieme di $\mathbb{R}$, non esiste un più piccolo elemento del dominio maggiore di un elemento fissato. In tal caso è ragionevole prendere in considerazione la condizione equivalente $\forall m, n \in \mathbb{N}$, $m < n \implies a_m \leq a_n$.

Risultano quindi naturali le seguenti definizioni.

Definizione di funzione crescente, decrescente, monotòna

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f è **crescente** quando

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \leq f(y).$$

Diciamo che f è **strettamente crescente** quando

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) < f(y).$$

Diciamo che f è **decrescente** quando

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) \geq f(y).$$

Diciamo che f è **strettamente decrescente** quando

$$\forall x, y \in A, \quad x < y \implies f(x) > f(y).$$

Diciamo che f è **monotòna** quando è crescente o decrescente.
Diciamo che f è **strettamente monotòna** quando è strettamente crescente o strettamente decrescente.

Ogni funzione strettamente crescente è anche crescente e ogni funzione strettamente decrescente è anche decrescente. Inoltre una funzione costante è sia crescente che decrescente.

In particolare se f ha come dominio l'insieme dei naturali, cioè se f è una successione, queste definizioni sono equivalenti alle corrispondenti definizioni date per le successioni.

3.4.1 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$. Se f è strettamente monotòna allora è iniettiva e f^{-1} è strettamente monotòna.

Dimostrazione. Supponiamo, ad esempio, f strettamente crescente.

Se $x, y \in A$ e $x \neq y$, allora o $x < y$, quindi $f(x) < f(y)$, o $x > y$, quindi $f(x) > f(y)$, pertanto $f(x) \neq f(y)$; quindi f è iniettiva.

Inoltre, siano $z, w \in f(A)$, con $z < w$. Non può essere $f^{-1}(z) \geq f^{-1}(w)$, perché sarebbe $f\left(f^{-1}(z)\right) \geq f\left(f^{-1}(w)\right)$, cioè $z \geq w$. Pertanto $f^{-1}(z) < f^{-1}(w)$. ■

3.4.2 Esempio. Consideriamo le seguenti funzioni:

$$
\begin{aligned}
&f_7: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_7(x) = x^3;\\
&f_8: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_8(x) = [x];\\
&f_9: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, && f_9(x) = \frac{1}{x}.
\end{aligned}
$$

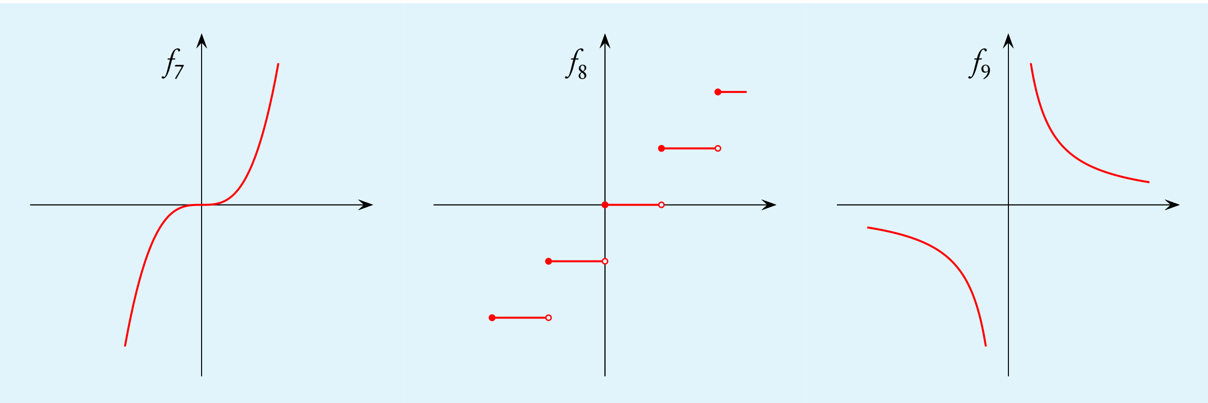


Figura 3.4.1
Le funzioni studiate nell'esempio 3.4.2.

La funzione f_7 è strettamente crescente. Infatti se $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, risulta

$$f_7(y) - f_7(x) = y^3 - x^3 = (y - x)(x^2 + xy + y^2).$$

Si ha

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2 = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geq 0;$$

Pertanto $f_7(y) - f_7(x)$ è prodotto di numeri non negativi, quindi è non negativo, perciò f_7 è crescente. Inoltre $\left(x + (1/2)y\right)^2 + (3/4)y^2 = 0$ se e solo se $x + (1/2)y = 0$ e $y = 0$, cioè

$x = y = 0$, ma ciò è impossibile, perché $x < y$. Pertanto $f_7(y) - f_7(x)$ è prodotto di numeri positivi, quindi è positivo, perciò f_7 è strettamente crescente.

Se $x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, allora $[x] \leq x < y$, quindi $[x]$ è un numero intero minore di y, pertanto è minore o uguale a $[x]$. Quindi f_8 è crescente.

La funzione non è strettamente crescente, perché si ha, ad esempio, $[1] = 1 = [3/2]$, pur essendo $1 < 3/2$.

La funzione f_9 non è monotona. Infatti $f_9(-1) = -1 < 1 = f_9(1)$, pertanto f_9 non è decrescente; inoltre $f_9(1) = 1 > 1/2 = f_9(2)$, quindi f_9 non è crescente.

Sappiamo che, dati due numeri positivi x e y, se $x < y$, allora $1/x > 1/y$, (v. teorema 1.2.24). Pertanto $f_9\big|_{\mathbb{R}^+}$ è strettamente decrescente.

Inoltre, se $x, y < 0$ e $x < y$, allora $-x > -y$ e $-x, -y > 0$, quindi $-1/x < -1/y$, perciò $1/x > 1/y$. Pertanto $f_9\big|_{\mathbb{R}^-}$ è strettamente decrescente. ◀

Sappiamo che ogni successione monotòna è regolare (v. teorema 2.5.2). C'è una differenza fondamentale da tenere presente se si vuole estendere alle funzioni tale teorema: per una successione ha senso solo il limite per $n \to +\infty$, mentre per le funzioni si può considerare il limite per x che tende a un qualunque punto limite del dominio.

Osserviamo inoltre che dall'esempio precedente risulta che una funzione monotòna può non avere limite per x che tende a un punto di accumulazione del dominio. Infatti la funzione f_8, cioè la funzione parte intera, è crescente, ma non esiste $\lim_{x\to 0}[x]$. Questo perché se $x \in]-1, 0[$, allora $[x] = -1$, pertanto $\lim_{x\to 0^-}[x] = -1$, mentre se $x \in]0, 1[$, allora $[x] = 0$, pertanto $\lim_{x\to 0^+}[x] = 0$.

Per evitare questo problema occorre considerare solo i limiti unilateri. Rientrano tra questi anche i limiti per $x \to +\infty$ o per $x \to -\infty$, che coinvolgono i valori della funzione solo "a sinistra", nel primo caso, o solo "a destra", nel secondo caso, del punto a cui tende x.

Abbiamo quindi il teorema seguente.

3.4.3 Teorema (sul limite delle funzioni monotòne)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$. Supponiamo f crescente.

I) Se A è superiormente illimitato allora esiste $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \sup f\,.$$

II) Se $c \in D\big(A \cap]c, +\infty[\big)$ allora esiste $\lim_{x\to c^+} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \inf f\big(A \cap]c, +\infty[\big).$$

III) Se $c \in D\big(A \cap]-\infty, c[\big)$ allora esiste $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big).$$

IV) Se A è inferiormente illimitato allora esiste $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ e si ha
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \inf f\,.$$

Dimostrazione. I) Supponiamo $\sup f = +\infty$; qualunque $M \in \mathbb{R}$ non è un maggiorante di $f(A)$, perciò $\exists a_M \in A$ tale che $f(a_M) > M$. Poiché f è crescente, se $x \in A \cap]a_M, +\infty[$, allora si ha $f(x) \geq f(a_M)$. Perciò

$$x \in A \cap]a_M, +\infty[\implies f(x) > M.$$

Per l'arbitrarietà di M è verificata la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Supponiamo ora $\sup f = \ell \in \mathbb{R}$. Qualunque sia $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, $\ell - \varepsilon$ non è un maggiorante di $f(A)$, quindi esiste $a_\varepsilon \in A$ tale che $f(a_\varepsilon) > \ell - \varepsilon$. Poiché f è crescente, se $x \in A \cap]a_\varepsilon, +\infty[$, allora si ha $f(x) \geq f(a_\varepsilon)$, quindi $x \in A \cap]a_\varepsilon, +\infty[\implies f(x) > \ell - \varepsilon$. Inoltre, $\forall x \in A$, si ha $f(x) \leq \sup f = \ell < \ell + \varepsilon$, pertanto

$$x \in A \cap]a_\varepsilon, +\infty[\implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon.$$

Perciò $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$.

II) Supponiamo $\inf f(A \cap]c, +\infty[) = -\infty$; qualunque $M \in \mathbb{R}$ non è un minorante di $f(A \cap]c, +\infty[)$, pertanto esiste $a_M \in A \cap]c, +\infty[$ tale che $f(a_M) < M$. Poiché f è crescente si ha

$$x \in A \cap]c, a_M[\implies f(x) \leq f(a_M) < M;$$

perciò $\lim_{x\to c^+} f(x) = -\infty$.

Se invece $\inf f(A \cap]c, +\infty[) = \ell \in \mathbb{R}$, allora, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$, il numero $\ell + \varepsilon$ non è un minorante di $f(A \cap]c, +\infty[)$, quindi esiste $a_\varepsilon \in A \cap]c, +\infty[$ tale che $f(a_\varepsilon) < \ell + \varepsilon$. Poiché f è crescente, se $x \in A \cap]c, a_\varepsilon[$ allora $f(x) \leq f(a_\varepsilon)$ da cui segue $f(x) < \ell + \varepsilon$. Inoltre se $x \in A \cap]c, +\infty[$ allora $f(x) \geq \ell > \ell - \varepsilon$, quindi

$$x \in A \cap]c, a_\varepsilon[\implies \ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon;$$

perciò $\lim_{x\to c^+} f(x) = \ell$.

III) La dimostrazione si ottiene con ovvie modifiche da quella dell'affermazione II.

IV) La dimostrazione si ottiene con ovvie modifiche da quella dell'affermazione I. ■

Un teorema analogo vale per funzioni decrescenti, l'unica differenza è che nell'enunciato gli estremi superiori e gli estremi inferiori vanno scambiati tra loro.

3.4.2 Condizione di Cauchy

La convergenza di una successione equivale al fatto che essa sia di Cauchy. Un fatto analogo vale per le funzioni.

Definizione di condizione di Cauchy per una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. Diciamo che f soddisfa la **condizione di Cauchy** per x che tende a c quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists V_\varepsilon \in \mathscr{I}_c : \forall x, y \in A \setminus \{c\}, \quad x, y \in V_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

3.4.4 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $c \in PL(A)$. La funzione f è convergente per $x \to c$ se e solo se soddisfa la condizione di Cauchy per $x \to c$.

Dimostrazione. Supponiamo che esista $\lim_{x\to c} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ e dimostriamo che f soddisfa la condizione di Cauchy per $x \to c$.

Si ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists V_\varepsilon \in \mathscr{I}_c \colon \forall x \in A \setminus \{c\}, \quad x \in V_\varepsilon \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon .$$
Quindi, fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se x e y appartengono ad $A \cap V_\varepsilon \setminus \{c\}$ si ha:
$$|f(x) - f(y)| = \left|\big(f(x) - \ell\big) + \big(\ell - f(y)\big)\right| \le |f(x) - \ell| + |\ell - f(y)| < 2\varepsilon ;$$
pertanto la condizione di Cauchy è verificata.

Viceversa supponiamo che f soddisfi la condizione di Cauchy per $x \to c$ e dimostriamo che f è convergente.

Poiché $c \in PL(A)$, per il teorema 3.1.21 esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $A \setminus \{c\}$ tale che $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$. Dimostriamo che $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. Per la condizione di Cauchy si ha
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists V_\varepsilon \in \mathscr{I}_c \colon \forall x, y \in A \setminus \{c\}, \quad x, y \in V_\varepsilon \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon ;$$
mentre, per la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$, si ha
$$\forall W \in \mathscr{I}_c, \exists n_W \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_W \implies a_n \in W .$$
Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, scelto $W = V_\varepsilon$, si ha
$$\begin{aligned} n, m > n_{V_\varepsilon} &\implies a_n, a_m \in V_\varepsilon \\ &\implies |f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon , \end{aligned}$$
quindi $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, pertanto, per il teorema 2.5.15, ha limite reale. Sia ℓ tale limite.

Dimostriamo che si ha $\lim_{x\to c} f(x) = \ell$. Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $x \in A \cap V_\varepsilon \setminus \{c\}$ allora, scelto $n > n_{V_\varepsilon}$, si ha $a_n \in V_\varepsilon$, pertanto per tali n si ha
$$|f(x) - \ell| = \left|\big(f(x) - f(a_n)\big) + \big(f(a_n) - \ell\big)\right| \le |f(x) - f(a_n)| + |f(a_n) - \ell| < 2\varepsilon . \qquad \blacksquare$$

3.5 Funzioni continue

3.5.1 Definizioni e proprietà fondamentali

Studiamo ora le funzioni che si comportano "bene" rispetto ai limiti. L'idea è di chiedere che, in un punto del dominio, che sia anche di accumulazione, esista il limite della funzione e questo coincida col valore della funzione in tale punto. Risulta però utile dare una definizione che abbia senso anche nei punti isolati del dominio.

Definizione di funzione continua in un punto

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Diciamo che f è **continua** in c quando

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)},\ \exists V_U \in \mathscr{I}_c\colon\ \forall x \in A, \quad x \in V_U \implies f(x) \in U\,.$$

Abbiamo definito la continuità di una funzione in un punto del dominio, ma solitamente una funzione è continua in più punti del dominio; si parla quindi anche di continuità in un insieme.

Definizione di funzione continua in un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq A$ e $f : A \to \mathbb{R}$.
Diciamo che f è **continua** in B quando è continua in ogni punto di B.
Diciamo che f è **continua** quando è continua in A.

È evidente che f è continua in c se e solo se

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+,\ \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+\colon\ \forall x \in A, \quad x \in \left]c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon\right[\implies \left|f(x) - f(c)\right| < \varepsilon\,.$$

Se $c \in A$ è un punto di accumulazione per A, allora f è continua in c se e solo se $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$. Infatti le due definizioni differiscono solo perché nel caso del limite la condizione $\left|f(x) - f(c)\right| < \varepsilon$ deve essere verificata per $x \in A \cap \left]c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon\right[\setminus \{c\}$, mentre nel caso della continuità deve essere verificata anche per $x = c$, ma per tale valore di x la condizione si riduce a $\left|f(c) - f(c)\right| < \varepsilon$ che è sempre verificata.

Se invece c è un punto isolato per A allora f è continua in c. Infatti in tal caso esiste $\overline{\delta} \in \mathbb{R}^+$ tale che $A \cap \left]c - \overline{\delta}, c + \overline{\delta}\right[= \{c\}$, quindi $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ si può scegliere $\delta_\varepsilon = \overline{\delta}$ e risulta

$$\begin{aligned} x \in A \cap \left]c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon\right[&\implies x = c \\ &\implies \left|f(x) - f(c)\right| = 0 < \varepsilon\,; \end{aligned}$$

perciò la definizione di continuità è verificata.

Riassumendo: una funzione è continua in ogni punto isolato del suo dominio, mentre è continua in un punto del dominio che sia anche di accumulazione se e solo se in tale punto il limite esiste e coincide con il valore della funzione.

Visto lo stretto collegamento tra limite e continuità, vale un teorema analogo al teorema di relazione tra limite di funzione e limite di successione 3.3.2.

3.5.1 Teorema (caratterizzazione della continuità)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) la funzione f è continua in c;

II) per ogni $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ successione in A convergente a c si ha $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(c)$.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Supponiamo che f sia continua in c e consideriamo una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $a_n \to c$.

Per la definizione di continuità si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_{f(c)}, \exists V_U \in \mathscr{I}_c \colon \forall x \in A, \quad x \in V_U \Longrightarrow f(x) \in U,$$

mentre per la definizione di $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$ si ha

$$\forall W \in \mathscr{I}_c, \exists n_W \in \mathbb{N} \colon \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_W \Longrightarrow a_n \in W.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, poniamo $W = V_U$. Se $n \in \mathbb{N}$ è tale che $n > n_{V_U}$ allora si ha $a_n \in V_U \cap A$, quindi $f(a_n) \in U$. Perciò

$$n > n_{V_U} \Longrightarrow f(a_n) \in U,$$

quindi è verificata la definizione di $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) = \ell$ e vale l'affermazione II.

II $\Longrightarrow$ I) Dimostriamo che se l'affermazione I è falsa allora è falsa anche la II; cioè proviamo che, se f non è continua in c allora esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A tale che $a_n \to c$, ma non si ha $f(a_n) \to f(c)$.

Se f non è continua in c allora si ha

$$\exists \overline{U} \in \mathscr{I}_{f(c)} \colon \forall V \in \mathscr{I}_c, \exists x \in A \colon \quad x \in V \wedge f(x) \notin \overline{U}.$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, si ha $]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[\in \mathscr{I}_c$, pertanto esiste un elemento di $A \cap]c - 1/(n+1), c + 1/(n+1)[$, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) \notin \overline{U}$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ così costruita ha termini in A; inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta

$$c - \frac{1}{n+1} < a_n < c + \frac{1}{n+1},$$

quindi, per il teorema dei due carabinieri 2.2.11, si ha $\lim_{n\to+\infty} a_n = c$. D'altra parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) \notin \overline{U}$, quindi la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non ha limite $f(c)$. Perciò l'affermazione II non è verificata. ■

I teoremi sui limiti possono essere applicati alle funzioni continue; tra le conseguenze si ha il teorema seguente.

3.5.2 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$, $g \colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Supponiamo f e g continue in c. Allora:

I) la funzione $f + g$ è continua in c;

II) la funzione fg è continua in c;

III) se inoltre, $\forall x \in A$, si ha $g(x) \neq 0$ allora la funzione f/g è continua in c.

3.5.3 Teorema (sulla continuità della composizione)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to B$, $g: B \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Se f è continua in c e g è continua in $f(c)$ allora $g \circ f$ è continua in c.

Dimostrazione. Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione in A convergente a c, allora, per il teorema 3.5.1, $f(a_n) \to f(c)$, quindi, nuovamente per tale teorema, $g\big(f(a_n)\big) \to g\big(f(c)\big)$. Perciò $g \circ f$ è continua in c. ■

3.5.4 Esempio. È evidente che ogni funzione costante è continua.

La funzione $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, cioè la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che $x \mapsto x$, è continua. Infatti se $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, se $x \in \left]c-\varepsilon, c+\varepsilon\right[$ si ha $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x) \in \left]c-\varepsilon, c+\varepsilon\right[$.

Poiché ogni funzione polinomiale è somma e prodotto di funzioni costanti e di $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$, per il teorema 3.5.2 è continua.

Ogni funzione razionale fratta è quoziente di due funzioni polinomiali, ristrette all'insieme dei numeri reali che non annullano il polinomio a denominatore. Per il teorema 3.5.2, affermazione III, ogni funzione razionale fratta è continua. ◀

3.5.2 Funzioni continue nel dominio

Studiamo alcune proprietà di cui godono le funzioni che sono continue in tutto il dominio.

3.5.5 Teorema (di Weierstrass[7])

Siano $K \subseteq \mathbb{R}$ e $f: K \to \mathbb{R}$. Se f è continua e K è compatto, allora f è limitata ed esistono massimo e minimo di f.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che se f è continua allora è superiormente limitata, successivamente proviamo che f ha massimo. In modo analogo si dimostra che f è inferiormente limitata e che ha minimo.

Per dimostrare che se f è continua allora è superiormente limitata, dimostriamo che, viceversa, se $\sup f = +\infty$ allora esiste un punto di K in cui f non è continua.

Se $\sup f = +\infty$, allora ogni $n \in \mathbb{N}$ non è maggiorante di $f(K)$, perciò esiste un elemento di K, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) > n$. Poiché la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ha termini in K è limitata, pertanto, per il teorema di Bolzano-Weierstrass 2.5.9, esiste una sottosuccessione convergente $\big(a_{k_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Sia $c = \lim_{n\to+\infty} a_{k_n}$. Per il teorema 3.1.7, affermazione I, $c \in \overline{K} = K$. Poiché, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_{k_n}) > k_n \geq n$, risulta $f(a_{k_n}) \to +\infty \neq f(c)$; quindi f non è continua in c.

Dimostriamo ora che, posto $M = \sup f$, risulta $M \in f(K)$. Per la caratterizzazione dell'estremo superiore 1.2.42, qualunque sia $n \in \mathbb{N}$ esiste un elemento di K, che indichiamo con a_n, tale che $f(a_n) > M - 1/(n+1)$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è limitata, perciò, per il

[7] Il teorema fu esposto dal già citato Karl Weierstrass (v. nota 5) nelle sue lezioni tenute a Berlino nel 1861.

teorema di Bolzano-Weierstrass 2.5.9, esiste una sottosuccessione convergente $\left(a_{k_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$; sia c il suo limite. Poiché f è continua in c si ha $f(a_{k_n}) \to f(c)$, d'altra parte, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha

$$M-(1/k_n) < f(a_{k_n}) \leq M\,,$$

quindi $f(a_{k_n}) \to M$; pertanto $M = f(c) \in f(K)$. ■

3.5.6 Osservazione. Osserviamo che una funzione continua in un insieme non compatto può essere illimitata o, pur essendo limitata, non avere massimo o non avere minimo.

Le funzioni f_1, f_2 e f_3, introdotte nell'esempio 3.2.1 sono polinomiali o razionali fratte, quindi continue per l'esempio 3.5.4. Il dominio di f_1 e f_2 è $\mathbb{R}$ che non è limitato, quindi non è compatto; il dominio di f_3 è $]-1,1[$ che non è chiuso, quindi non è compatto. Le funzioni f_1 e f_3 non sono limitate, f_2 è limitata, ma non ha minimo. ◀

3.5.7 Teorema (di Bolzano[8] o degli zeri)

Sia $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Se $f(a)f(b) < 0$ e f è continua allora esiste $c \in\,]a,b[$ tale che $f(c) = 0$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $f(a) < 0 < f(b)$, il caso $f(b) < 0 < f(a)$ si tratta in modo analogo.

Poniamo $a_0 = a$, $b_0 = b$ e $c_0 = (a+b)/2$, cioè c_0 è il punto medio dell'intervallo $[a,b]$. Se $f(c_0) = 0$, la tesi è verificata. Se $f(c_0) > 0$ poniamo $a_1 = a_0$ e $b_1 = c_0$, se invece $f(c_0) < 0$ poniamo $a_1 = c_0$ e $b_1 = b_0$. In entrambi i casi risulta $f(a_1) < 0 < f(b_1)$, $a_0 \leq a_1 < b_1 \leq b_0$ e $b_1 - a_1 = (b_0 - a_0)/2$.

Poniamo poi $c_1 = (a_1+b_1)/2$, cioè c_1 è il punto medio dell'intervallo $[a_1,b_1]$. Procedendo come prima, se $f(c_1) = 0$ la tesi è verificata. Se $f(c_1) > 0$ poniamo $a_2 = a_1$ e $b_2 = c_1$, se invece $f(c_1) < 0$ poniamo $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. In entrambi i casi risulta $f(a_2) < 0 < f(b_2)$, $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$ e $b_2 - a_2 = (b_1 - a_1)/2 = (b_0 - a_0)/2^2$.

Ripetiamo successivamente questa procedura. Se dopo un numero finito di passi la funzione si annulla nel punto medio dell'intervallo la tesi è verificata; altrimenti si prosegue costruendo due successioni $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tali che:

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $a_0 \leq a_n < b_n \leq b_0$;
2. la successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e la successione $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è decrescente;
3. $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $b_n - a_n = \dfrac{b_0 - a_0}{2^n}$;
4. $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f(a_n) < 0 < f(b_n)$.

La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è crescente e superiormente limitata, perché b_0 è un suo maggiorante; pertanto, per il teorema sul limite di successioni monotòne 2.5.2, è convergente. Sia c il suo

[8] Il teorema è stato dimostrato dal già citato Bernard Bolzano (v. nota 5) nel 1817.

limite che, per il teorema del confronto per le successioni 2.2.5, appartiene ad $[a,b]$. Si ha inoltre

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty}\left(a_n + \frac{b-a}{2^n}\right) = c\,.$$

Poiché f è continua in c, per il teorema del confronto 2.2.5, si ha

$$f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n) \le 0\,, \qquad f(c) = \lim_{n\to+\infty} f(b_n) \ge 0\,.$$

Pertanto $f(c)=0$. ■

Il teorema di Bolzano assicura che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato, se assume valore maggiore di 0 in un estremo dell'intervallo e valore minore di 0 nell'altro estremo, allora assume valore 0 in almeno un punto. Questo risultato vale anche se si considera un qualunque numero reale d al posto di 0. Da questa osservazione si ottiene facilmente il teorema seguente.

3.5.8 Teorema (dei valori intermedi)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f: I \to \mathbb{R}$. Se I è un intervallo e f è continua allora $f(I)$ è un intervallo, eventualmente degenere.

Dimostrazione. Proviamo che, se $a,b \in I$ sono tali che $f(a) < f(b)$, allora qualunque sia $d \in \left]f(a), f(b)\right[$ risulta $d \in f(I)$. Consideriamo il caso $a<b$, l'altro caso è analogo.

Sia $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ tale che $g(x) = f(x) - d$. Poiché f è continua anche g è continua; inoltre $g(a) = f(a) - d < 0$, mentre $g(b) = f(b) - d > 0$. Pertanto, per il teorema degli zeri, esiste $c \in \left]a,b\right[$ tale che $g(c)=0$, cioè $f(c)=d$, quindi $d \in f\big(\left]a,b\right[\big) \subseteq f(I)$. ■

3.5.9 Esempio. Utilizziamo il teorema dei valori intermedi per dimostrare nuovamente, in modo più semplice, il teorema sull'esistenza della radice n-sima 1.4.7.

Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Poniamo

$$g: [0,+\infty[\to \mathbb{R}\,, \qquad g(x) = x^n\,.$$

Si ha $g(0)=0$ e, $\forall x \in [0,+\infty[$, risulta $g(x) \ge 0$, quindi $0 = \min Im(g)$. Inoltre si ha $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty$, quindi, per il teorema 3.3.10, affermazione II, g è superiormente illimitata. Poiché g è continua e il suo dominio è un intervallo, per il teorema dei valori intermedi 3.5.8 l'immagine di g è un intervallo. Poiché l'immagine ha minimo 0 ed è superiormente illimitata, si ha $Im(g) = [0,+\infty[$. Pertanto, qualunque sia $a \in [0,+\infty[$, si ha $a \in Im(g)$, quindi esiste $x \in [0,+\infty[$ tale che $g(x)=a$, cioè $x^n = a$. ◀

Per le funzioni monotòne vale un teorema che, in un certo senso, è l'inverso di quello dei valori intermedi.

3.5.10 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Se f è monotòna e $f(A)$ è un intervallo allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $f: A \to \mathbb{R}$ crescente e dimostriamo che se f non è continua allora $f(A)$ non è un intervallo. Se f è decrescente la dimostrazione è analoga.

Sia $c \in A$ tale che f non è continua in c. Poiché una funzione è continua nei punti isolati del dominio, si ha $c \in D(A)$, quindi $c \in D\big(A \cap]-\infty, c[\big)$ oppure $c \in D\big(A \cap]c, +\infty[\big)$. Per il teorema sul limite delle funzioni monotòne 3.4.3, nel primo caso esiste $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e nel secondo caso esiste $\lim_{x\to c^+} f(x)$; poiché f non è continua in c, almeno uno di tali limiti è diverso da $f(c)$.

Supponiamo ad esempio che sia $c \in D\big(A \cap]-\infty, c[\big)$ e $\lim_{x\to c^-} f(x) \neq f(c)$. Poiché f è crescente, $\forall x \in A \cap]-\infty, c[$ si ha $f(x) \le f(c)$, quindi $\sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big) \le f(c)$. D'altra parte, per il teorema sul limite delle funzione monotòne 3.4.3, affermazione III, si ha $\sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big) = \lim_{x\to c^-} f(x) \neq f(c)$, quindi $\sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big) < f(c)$.

Qualunque sia $x \in A$, se $x < c$ allora $f(x) \le \sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big)$, se invece $x \ge c$ allora $f(x) \ge f(c)$, pertanto se y è compreso tra $\sup f\big(A \cap]-\infty, c[\big)$ e $f(c)$, allora $y \notin f(A)$. Scelto $\overline{x} \in A \cap]-\infty, c[$, tali y sono compresi tra $f(\overline{x})$ e $f(c)$, perciò $f(A)$ non è un intervallo. ■

Il seguente esempio mostra che una funzione iniettiva continua può avere inversa discontinua.

3.5.11 Esempio. Sia

$$f_{10}: [0,1] \cup]2,3] \to \mathbb{R}, \qquad f_{10}(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \in [0,1], \\ x-1, & \text{se } x \in]2,3]. \end{cases}$$

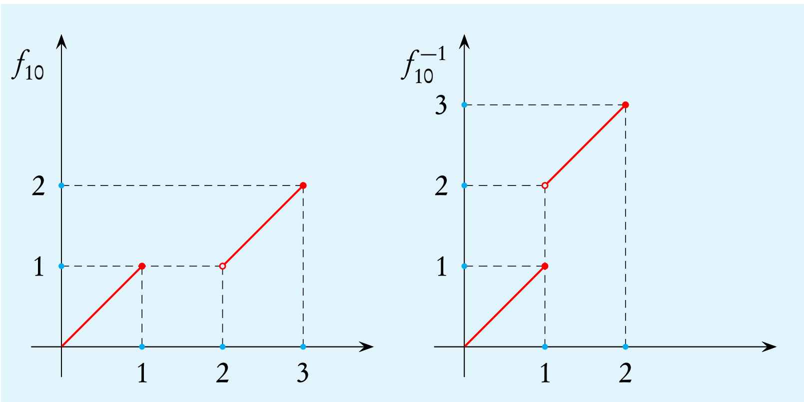


Figura 3.5.1
La funzione f_{10} studiata nell'esempio 3.5.11 e la sua inversa.

Studiamo la continuità e la monotonia di f_{10}.

Ogni punto di $[0,1]$ ha un intorno che non interseca $]2,3]$, pertanto per stabilire la continuità di f_{10} nei punti di $[0,1]$ è sufficiente studiare la continuità di $f_{10}|_{[0,1]}$. Tale funzione è polinomiale, quindi è continua, perciò f_{10} è continua in $[0,1]$. Analogamente ogni punto di $]2,3]$ ha un intorno che non interseca $[0,1]$, $f_{10}|_{]2,3]}$ è polinomiale e quindi continua; perciò f_{10} è continua anche in $]2,3]$. Quindi f_{10} è continua.

Siano $x, y \in [0,1] \cup]2,3]$, con $x < y$. Evidentemente se $x, y \in [0,1]$ o $x, y \in]2,3]$ si ha $f_{10}(x) < f_{10}(y)$. Se $x \in [0,1]$ e $y \in]2,3]$, allora $f_{10}(x) \leq 1 < f_{10}(y)$. Perciò f_{10} è strettamente crescente, quindi, per il teorema 3.4.1, è iniettiva.

Si verifica facilmente che $Im(f_{10}) = [0,2]$ e che

$$f_{10}^{-1} \colon [0,2] \to \mathbb{R}, \qquad f_{10}^{-1}(x) = \begin{cases} x\,, & \text{se } x \in [0,1]\,, \\ x+1\,, & \text{se } x \in]1,2]\,. \end{cases}$$

Pertanto risulta $\lim_{x \to 1^-} f_{10}^{-1}(x) = \lim_{x \to 1^-} x = 1$ e $\lim_{x \to 1^+} f_{10}^{-1}(x) = \lim_{x \to 1^+}(x+1) = 2$, quindi f_{10}^{-1} non è continua in 1. ◀

Per studiare la continuità dell'inversa di una funzione è utile il teorema seguente.

3.5.12 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f \colon I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, $a, b, c \in I$.

I) Se $a < b$, $a < c$ e $f(a) < f(b)$, allora $f(a) < f(c)$.

II) Se $a < b$, $c < b$ e $f(a) < f(b)$, allora $f(c) < f(b)$.

Dimostrazione. I) Dimostriamo il teorema per assurdo.

Supponiamo quindi che sia $f(c) \leq f(a)$. Poiché f è iniettiva, si ha $f(c) \neq f(a)$, quindi $f(c) < f(a)$. Poiché $f(c) < f(a) < f(b)$, per il teorema dei valori intermedi $f(a)$ appartiene all'immagine della restrizione di f all'intervallo di estremi c e b, cioè esiste d appartenente a tale intervallo tale che $f(d) = f(a)$; poiché a non appartiene all'intervallo di estremi c e b, si ha $a \neq d$. Ciò è assurdo perché f è iniettiva.

Pertanto $f(c) > f(a)$.

II) La dimostrazione è analoga a quella della prima affermazione. ■

Per il teorema 3.4.1, ogni funzione strettamente monotòna è iniettiva. Il viceversa è vero sotto ipotesi aggiuntive.

3.5.13 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f \colon I \to \mathbb{R}$. Se I è un intervallo e f è continua e iniettiva, allora f è strettamente monotòna.

Dimostrazione. Dimostriamo che se f non è strettamente decrescente, allora è strettamente crescente.

Se f non è strettamente decrescente, esistono $\alpha, \beta \in I$ tali che $\alpha < \beta$ e $f(\alpha) \leq f(\beta)$; poiché f è iniettiva non può valere l'uguaglianza, quindi $f(\alpha) < f(\beta)$.

Siano $x, y \in I$, tali che $x < y$.

Se $y > \alpha$ si può applicare il teorema 3.5.12, affermazione I, con $a = \alpha$, $b = \beta$ e $c = y$, pertanto $f(\alpha) < f(y)$; successivamente si può applicare il teorema 3.5.12, affermazione II, con $a = \alpha$, $b = y$ e $c = x$ quindi $f(x) < f(y)$.

Se invece $y \leq \alpha$ allora si ha $x < \alpha$, quindi si può applicare il teorema 3.5.12, affermazione II, con $a = \alpha$, $b = \beta$ e $c = x$, $f(x) < f(\beta)$; successivamente si può applicare il teorema 3.5.12, affermazione I, con $a = x$, $b = \beta$ e $c = y$, quindi $f(x) < f(y)$.

Pertanto f è strettamente crescente. ■

3.5.14 Teorema (sulla continuità della funzione inversa)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$.

I) Se f è strettamente monotòna allora f^{-1} è continua.

II) Se f è continua e iniettiva allora f^{-1} è continua.

DIMOSTRAZIONE. I) Per il teorema 3.4.1, f è iniettiva e f^{-1} è strettamente monotòna. L'immagine di f^{-1} è uguale al dominio di f, cioè a I, che è un intervallo. Quindi il teorema 3.5.10 assicura che f^{-1} è continua.

II) Per il teorema 3.5.13 f è strettamente monotòna, quindi, per l'affermazione I, f^{-1} è continua. ■

3.5.15 Esempio. Sia $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La funzione

$$g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = x^n,$$

è strettamente monotòna e il suo dominio è un intervallo. Pertanto, per il teorema 3.5.14, affermazione I, g^{-1} è continua. La funzione inversa è la funzione radice n-sima. ◀

3.5.3 Funzioni uniformemente continue

Introduciamo ora un concetto più restrittivo della continuità, che sarà utile per lo studio di alcune proprietà delle funzioni reali di variabile reale.

Definizione di funzione uniformemente continua

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **uniformemente continua** quando

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x, y \in A, \quad |x - y| < \delta_\varepsilon \implies \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon.$$

La relazione tra continuità e uniforme continuità è espressa dal teorema seguente.

3.5.16 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è uniformemente continua allora f è continua.

DIMOSTRAZIONE. Per definizione di uniforme continuità si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x, y \in A, \quad |x - y| < \delta_\varepsilon \implies \left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon.$$

Per ogni $c \in A$, ponendo $y = c$, da qui segue

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x \in A, \quad |x - c| < \delta_\varepsilon \implies \left|f(x) - f(c)\right| < \varepsilon.$$

perciò f è continua in c. ■

Come la continuità, anche la uniforme continuità può essere caratterizzata tramite i limiti di successioni.

3.5.17 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f: A \to \mathbb{R}$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) f è uniformemente continua;

II) qualunque siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in A tali che $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$ risulta $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n) - f(b_n)\big) = 0$.

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ II) Per definizione di uniforme continuità si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x, y \in A, \quad |x - y| < \delta_\varepsilon \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon,$$

e siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in A tali che $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$, cioè tali che

$$\forall \eta \in \mathbb{R}^+, \exists n_\eta \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, \quad n > n_\eta \implies |a_n - b_n| < \eta.$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $n > n_{\delta_\varepsilon}$, allora $|a_n - b_n| < \delta_\varepsilon$, quindi $\big|f(a_n) - f(b_n)\big| < \varepsilon$. Pertanto $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n) - f(b_n)\big) = 0$.

II $\Longrightarrow$ I) Dimostriamo che se f non è uniformemente continua, allora esistono due successioni in A, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tali che $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$, ma $f(a_n) - f(b_n)$ non converge a 0.

Se f non è uniformemente continua, allora

$$\exists \overline{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+ : \forall \delta \in \mathbb{R}^+, \exists x_\delta, y_\delta \in A : \quad |x_\delta - y_\delta| < \delta \wedge \big|f(x_\delta) - f(y_\delta)\big| \geq \overline{\varepsilon}.$$

In particolare, scegliendo $\delta = 1/(n+1)$, esistono due elementi di A, che indichiamo con a_n e b_n, tali che $|a_n - b_n| < 1/(n+1)$ e $\big|f(a_n) - f(b_n)\big| \geq \overline{\varepsilon}$. Pertanto $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$, ma non si ha $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n) - f(b_n)\big) = 0$. ■

3.5.18 Esempio. Utilizziamo il teorema 3.5.17 per studiare la uniforme continuità delle funzioni introdotte nell'esempio 3.1.4.

Tali funzioni sono polinomiali o razionali fratte, quindi, per l'esempio 3.5.4, esse sono continue.

Consideriamo la funzione

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_1(x) = x^2 - 1.$$

Posto, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = n + (1/n)$, $b_n = n$, risulta $a_n - b_n = 1/n \to 0$ e

$$f_1(a_n) - f_1(b_n) = \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - 1 - n^2 + 1 = 2 + \frac{1}{n^2} \to 2.$$

Quindi $f_1(a_n) - f_1(b_n)$ non tende a 0, perciò, per il teorema 3.5.17, f_1 non è uniformemente continua.

Consideriamo la funzione

$$f_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_2(x) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in $\mathbb{R}$ tali che $a_n - b_n \to 0$. Si ha

$$\begin{aligned}|f_2(a_n) - f_2(b_n)| &= \left|\frac{1}{a_n^2+1} - \frac{1}{b_n^2+1}\right| = \frac{|a_n^2 - b_n^2|}{(a_n^2+1)(b_n^2+1)} = \frac{|a_n - b_n||a_n + b_n|}{(a_n^2+1)(b_n^2+1)} \leq \\ &\leq \frac{|a_n - b_n|\big(|a_n| + |b_n|\big)}{(a_n^2+1)(b_n^2+1)} \leq |a_n - b_n|\left(\frac{|a_n|}{a_n^2+1} + \frac{|b_n|}{b_n^2+1}\right).\end{aligned}$$

Si ha

$$0 \leq \big(|a_n| - 1\big)^2 = |a_n|^2 - 2|a_n| + 1 = a_n^2 - 2|a_n| + 1,$$

pertanto $2|a_n| \leq a_n^2 + 1$ e una disuguaglianza analoga vale per b_n. Quindi risulta

$$|f_2(a_n) - f_2(b_n)| \leq |a_n - b_n|\left(\frac{|a_n|}{a_n^2+1} + \frac{|b_n|}{b_n^2+1}\right) \leq |a_n - b_n|\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = |a_n - b_n|.$$

Poiché $a_n - b_n \to 0$, da questa disuguaglianza segue che $f_2(a_n) - f_2(b_n) \to 0$. Pertanto f_2 è uniformemente continua.

Consideriamo la funzione

$$f_3 \colon]-1,1[\to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = \frac{x}{1-x^2}.$$

Posto, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1 - (1/2n)$, $b_n = 1 - (1/n)$, risulta $a_n - b_n = 1/(2n) \to 0$ e

$$\begin{aligned}f_3(a_n) - f_3(b_n) &= \frac{1-(1/2n)}{1-\big(1-(1/2n)\big)^2} - \frac{1-(1/n)}{1-\big(1-(1/n)\big)^2} = \\ &= \frac{1-(1/2n)}{(2/2n)-(1/2n)^2} - \frac{1-(1/n)}{(2/n)-(1/n)^2} = \frac{2n(2n-1)}{4n-1} - \frac{n(n-1)}{2n-1} = \\ &= \big(n + o(n)\big) - \left(\frac{1}{2}n + o(n)\right) = \frac{1}{2}n + o(n) \to +\infty.\end{aligned}$$

Pertanto f_3 non è uniformemente continua. ◀

3.5.19 Teorema

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A. Se f è uniformemente continua e $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente, allora $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente.

Osserviamo che nell'enunciato del teorema viene richiesto che $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente, senza precisare che il limite appartenga al dominio. Quindi la semplice continuità della funzione non assicura che $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ sia convergente.

DIMOSTRAZIONE. Per il teorema 2.5.12, una successione è convergente se e solo se è di Cauchy, pertanto è sufficiente dimostrare che se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, allora $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy.

Se f è uniformemente continua si ha

$$\forall\varepsilon\in\mathbb{R}^+,\ \exists\delta_\varepsilon\in\mathbb{R}^+ \colon\ \forall x,y\in A,\quad |x-y|<\delta_\varepsilon \implies \big|f(x)-f(y)\big|<\varepsilon\,,$$

mentre se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy allora si ha

$$\forall\eta\in\mathbb{R}^+,\ \exists n_\eta\in\mathbb{N}\colon\ \forall n,m\in\mathbb{N},\quad n,m>n_\eta \implies |a_n-a_m|<\eta\,.$$

Fissato $\varepsilon\in\mathbb{R}^+$, se $n,m\in\mathbb{N}$ sono tali che $n,m>n_{\delta_\varepsilon}$, allora $|a_n-a_m|<\delta_\varepsilon$, pertanto $\big|f(a_n)-f(a_m)\big|<\varepsilon$. Quindi la successione $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy. ■

Come mostra l'esempio 3.5.18, dalla continuità di una funzione non segue necessariamente la uniforme continuità; ciò risulta vero per domini particolari.

3.5.20 Teorema (di Heine-Cantor[9])

Siano $K\subseteq\mathbb{R}$ e $f\colon K\to\mathbb{R}$. Se f è continua e K è compatto, allora f è uniformemente continua.

DIMOSTRAZIONE. Dimostriamo che se f non è uniformemente continua allora esiste $c\in K$ tale che f non è continua in c.

Supponiamo quindi f non uniformemente continua, cioè

$$\exists\overline{\varepsilon}\in\mathbb{R}^+\colon\ \forall\delta\in\mathbb{R}^+,\ \exists x_\delta,y_\delta\in K\colon\quad |x_\delta-y_\delta|<\delta\ \wedge\ \big|f(x_\delta)-f(y_\delta)\big|\geq\overline{\varepsilon}\,.$$

In particolare, $\forall n\in\mathbb{N}$, scegliendo $\delta=1/(n+1)$, esistono due elementi di K, che indichiamo con a_n e b_n, tali che $|a_n-b_n|<1/(n+1)$ e $\big|f(a_n)-f(b_n)\big|\geq\overline{\varepsilon}$. Poiché K è compatto, esiste una sottosuccessione $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$, convergente a un elemento c di K. Inoltre si ha

$$|a_{k_n}-b_{k_n}|\leq\frac{1}{k_n}\to 0\,,$$

quindi $\lim_{n\to+\infty}(a_{k_n}-b_{k_n})=0$, pertanto si ha anche $\lim_{n\to+\infty}b_{k_n}=c$. Le successioni $(a_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ sono convergenti a c, ma, $\forall n\in\mathbb{N}$, si ha $\big|f(a_{k_n})-f(b_{k_n})\big|\geq\overline{\varepsilon}$, quindi $\big(f(a_{k_n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ e $\big(f(b_{k_n})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ non possono avere lo stesso limite; pertanto, per il teorema 3.5.1, f non è continua in c. ■

[9]Il teorema prende il nome da Heinrich Eduard Heine (Berlino, 1821 - Halle, Germania, 1881) e da Georg Cantor (San Pietroburgo 1845 - Halle, Germania, 1918).

Heine studiò varie questioni di analisi (tra cui la compattezza di insiemi) e diede la definizione di continuità uniforme.

Cantor, fu il fondatore della teoria degli insiemi e dello studio della loro cardinalità.

Heine enunciò e dimostrò il teorema in un articolo del 1872; nell'articolo Heine riconosce che Cantor aveva ispirato il suo lavoro. Il teorema era già stato enunciato, senza una dimostrazione valida, da Bolzano (vedi nota 5) negli anni 30 del XIX secolo e dimostrato da Johann Lejeune Dirichlet (Düren, Germania 1805 - Göttingen, Germania, 1859) nel 1854.

Le funzioni uniformemente continue possono essere prolungate in modo naturale a una funzione uniformemente continua definita nella chiusura del dominio.

3.5.21 Teorema (sulla prolungabilità delle funzioni uniformemente continue)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to \mathbb{R}$. Se f è uniformemente continua, allora esiste $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua e tale che $g|_A = f$.

Dimostrazione. Se $c \in \overline{A}$, per il teorema 3.1.7, affermazione I, esiste $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione in A convergente a c; per il teorema 3.5.19, $\big(f(a_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ è convergente. Se $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è un'altra successione in A convergente a c, allora $\lim_{n\to+\infty}(a_n - b_n) = 0$, quindi, per il teorema 3.5.17, $\lim_{n\to+\infty}\big(f(a_n) - f(b_n)\big) = 0$, cioè $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) = \lim_{n\to+\infty} f(a_n)$. Quindi $\lim_{n\to+\infty} f(a_n)$ dipende da c e non dalla successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente a c scelta. Indichiamo con $g(c)$ tale limite.

Abbiamo così definito una funzione $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$. Se $c \in A$, allora possiamo definire $g(c)$ mediante la successione che vale costantemente c e si ha

$$g(c) = \lim_{n\to+\infty} f(c) = f(c);$$

quindi $g|_A = f$.

Dimostriamo che g è uniformemente continua. Si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall x, y \in A, \quad |x - y| < \delta_\varepsilon \implies \big|f(x) - f(y)\big| < \varepsilon .$$

Fissiamo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Siano $x, y \in \overline{A}$ tali che $|x - y| < \delta_\varepsilon/3$ e siano $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successioni in A tali che $a_n \to x$ e $b_n \to y$. Per la definizione di g, si ha $f(a_n) \to g(x)$ e $f(b_n) \to g(y)$; pertanto, definitivamente, risulta $|a_n - x| < \delta_\varepsilon/3$, $|b_n - y| < \delta_\varepsilon/3$, $\big|f(a_n) - g(x)\big| < \varepsilon$ e $\big|f(b_n) - g(y)\big| < \varepsilon$. Da ciò segue

$$|a_n - b_n| \le |a_n - x| + |x - y| + |y - b_n| < \frac{\delta_\varepsilon}{3} + \frac{\delta_\varepsilon}{3} + \frac{\delta_\varepsilon}{3} = \delta_\varepsilon ;$$

quindi, per la uniforme continuità di f, si ha $\big|f(a_n) - f(b_n)\big| < \varepsilon$; pertanto, scegliendo n in modo opportuno,

$$\big|g(x) - g(y)\big| \le \big|g(x) - f(a_n)\big| + \big|f(a_n) - f(b_n)\big| + \big|f(b_n) - g(y)\big| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon .$$

Perciò g è uniformemente continua. ■

4
Calcolo differenziale per funzioni reali di variabile reale

4.1 Derivate

4.1.1 Definizioni e proprietà fondamentali

In questo capitolo definiamo e studiamo la derivata di una funzione. Si tratta di un concetto fondamentale che ha moltissime applicazioni. L'idea di partenza è di studiare la rapidità di variazione di una funzione vicino a un punto del suo dominio.

Un'informazione su quanto rapidamente varia una funzione f è fornita dal rapporto tra la variazione di f quando si incrementa di una certa quantità il punto in cui essa viene calcolata e l'incremento stesso. Se consideriamo un punto c e un incremento h positivo, tale rapporto è $\big(f(c+h)-f(c)\big)/h$. Ponendo $d=c+h$, il rapporto diventa

$$\frac{f(d)-f(c)}{d-c}.$$

Osserviamo che, scambiando tra loro c e d, il rapporto non cambia; è quindi indifferente considerare $d>c$ (come si ottiene se $d=c+h$ con $h>0$) oppure $d<c$.

Questo rapporto, che chiamiamo rapporto incrementale, ha un semplice significato geometrico. Determiniamo l'equazione di una retta del piano cartesiano che interseca il grafico di f in due punti. Una retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ ha equazione $y-f(c)=m(x-c)$, dove $m\in\mathbb{R}$ è il suo coefficiente angolare. Tale retta passa anche per $\big(d,f(d)\big)$ se risulta $f(d)-f(c)=m(d-c)$, cioè $m=\big(f(d)-f(c)\big)/(d-c)$. Quindi il rapporto incrementale è il coefficiente angolare della retta che interseca il grafico di f nei due punti che hanno ascissa c e d.

Il rapporto incrementale ha anche un significato fisico. Se f è la legge del moto di un punto che si muove su una retta, il rapporto incrementale è il rapporto tra uno spostamento del punto e il tempo impiegato per effettuare tale spostamento; si ha quindi la velocità media del punto nell'intervallo di tempo considerato. Precisiamo che si tratta della velocità media

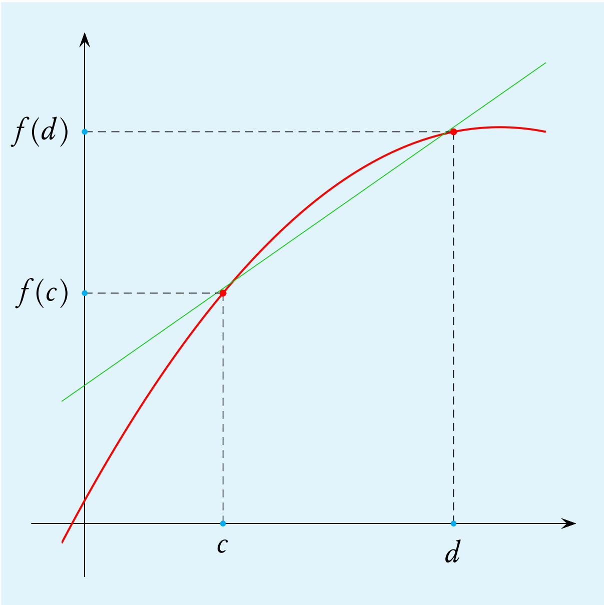


Figura 4.1.1
Il rapporto incrementale di f tra c e d è il coefficiente angolare della retta passante per i due punti $\big(c,f(c)\big)$ e $\big(d,f(d)\big)$.

con segno: è positiva se il punto si sposta nella direzione delle ascisse crescenti, negativa in caso contrario.

Formalizziamo questo concetto nella seguente definizione.

Definizione di rapporto incrementale di una funzione

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ e $c,d \in A$ tali che $c \neq d$. Chiamiamo **rapporto incrementale** di f tra c e d il numero reale

$$R_f(d,c) = \frac{f(d) - f(c)}{d - c}.$$

Evidentemente scambiando c e d il rapporto incrementale non cambia, cioè risulta $R_f(d,c) = R_f(c,d)$.

Riprendiamo il significato geometrico del rapporto incrementale. Se la funzione f non ha brusche variazioni, quando avviciniamo il punto d a c possiamo aspettarci che la retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ e $\big(d,f(d)\big)$ si "avvicini" alla porzione del grafico di f costituita dai punti che hanno ascissa compresa tra c e d. Risulta quindi naturale studiare il limite del rapporto incrementale per d che tende a c. Indicato con ℓ tale limite, se esiste reale, la retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ e $\big(d,f(d)\big)$ "tende" alla retta passante per $\big(c,f(c)\big)$ di coefficiente angolare ℓ. Tale retta è quella che approssima meglio il grafico di f vicino a $\big(c,f(c)\big)$, cioè è la retta tangente a tale grafico in $\big(c,f(c)\big)$.

Passando al significato fisico, se f è la legge del moto di un punto che si muove su una retta, abbiamo visto che il rapporto incrementale tra c e d è la velocità media del punto nell'intervallo di tempo considerato. Il limite per d che tende a c, se esiste, è la velocità all'istante c.

Formalizziamo questo concetto nella seguente definizione.

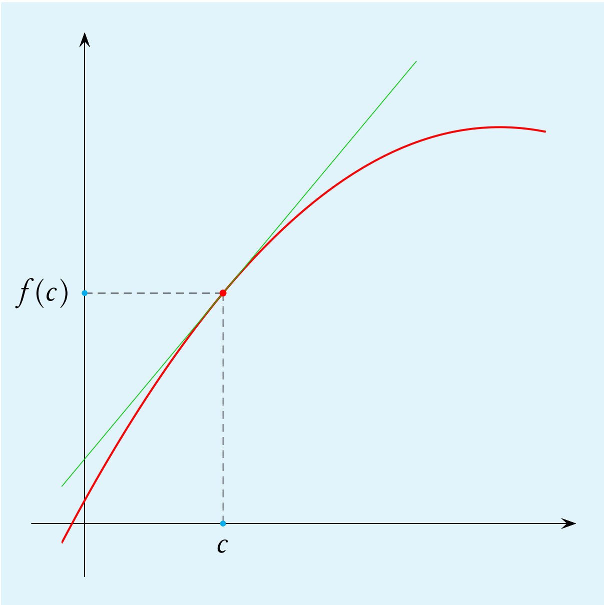


Figura 4.1.2
Il limite del rapporto incrementale di f è il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $\big(c, f(c)\big)$.

Definizione di funzione derivabile in un punto e di derivata

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Diciamo che f è **derivabile** in c quando esiste ed è reale

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} .$$

In tal caso chiamiamo **derivata** di f in c tale limite e lo indichiamo con $f'(c)$.

Per indicare la derivata di f in c si usano anche le notazioni

$$Df(c), \qquad \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=c}, \qquad \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=c} .$$

Osserviamo che abbiamo definito la derivata in c quando $c \in A \cap D(A)$; infatti è necessario che c sia un punto del dominio, perché in caso contrario non sarebbe definito il rapporto incrementale di cui facciamo il limite, ed è necessario che c sia un punto di accumulazione per il dominio, perché in caso contrario non sarebbe definito il limite.

Talvolta è utile definire la derivata esplicitando l'incremento della variabile da cui dipende la funzione, anziché il punto in cui essa viene calcolata: si ha quindi

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} R_f(c+h, c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} .$$

Osserviamo che il limite di una funzione dipende solo dai valori che essa assume in un intorno del punto a cui tende la variabile (teorema 3.3.6). Pertanto anche la derivata di una funzione in un punto dipende solo dai valori che essa assume in un intorno di tale punto.

Come la continuità, anche la derivabilità di una funzione è definita relativamente a un punto; solitamente una funzione è derivabile in più punti del dominio, si parla quindi anche di derivabilità in un insieme.

Definizione di funzione derivabile in un insieme

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $B \subseteq A \cap D(A)$.
Diciamo che f è **derivabile** in B quando $\forall c \in B$, f è derivabile in c.
Nel caso che sia $A \subseteq D(A)$ diciamo che f è **derivabile** quando è derivabile in A.

La condizione $A \subseteq D(A)$ è verificata, ad esempio, quando A è un intervallo oppure quando A è aperto.

Se f è derivabile risulta definita una funzione da A a $\mathbb{R}$ che a ogni $x \in A$ fa corrispondere $f'(x)$. Naturalmente indicheremo tale funzione con f'.

4.1.1 Esempio. Siano $\ell \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. Consideriamo le funzioni:

$$
\begin{aligned}
&f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_1(x) = \ell;\\
&f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_2(x) = x;\\
&f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_3(x) = x^k;\\
&f_4 : [0,+\infty[\to \mathbb{R}, && f_4(x) = \sqrt{x};\\
&f_5 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, && f_5(x) = |x|.
\end{aligned}
$$

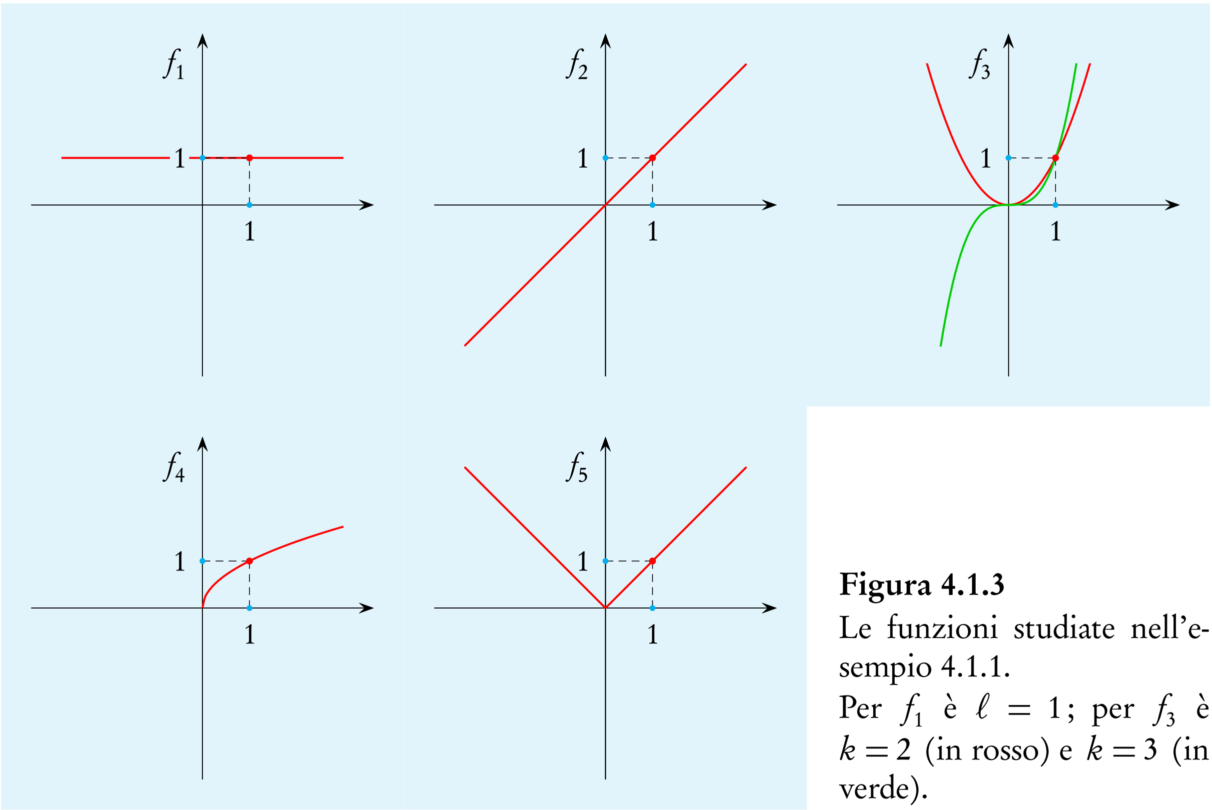


Figura 4.1.3
Le funzioni studiate nell'esempio 4.1.1.
Per f_1 è $\ell = 1$; per f_3 è $k = 2$ (in rosso) e $k = 3$ (in verde).

Sia $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_1}(x,c) = \frac{\ell - \ell}{x - c} = 0 \xrightarrow[x \to c]{} 0.$$

Pertanto f_1 è derivabile e, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha $f_1'(c) = 0$.

Sia $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_2}(x,c) = \frac{x-c}{x-c} = 1 \xrightarrow[x \to c]{} 1 .$$

Pertanto f_2 è derivabile e, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha $f_2'(c) = 1$.

Sia $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, utilizzando il teorema 1.4.6, si ha

$$R_{f_3}(x,c) = \frac{x^k - c^k}{x-c} = \frac{(x-c)\sum_{j=0}^{k-1} x^j c^{k-j-1}}{x-c} = \sum_{j=0}^{k-1} x^j c^{k-j-1} \xrightarrow[x \to c]{} \sum_{j=0}^{k-1} c^j c^{k-j-1} = k c^{k-1} .$$

Pertanto f_3 è derivabile e, $\forall c \in \mathbb{R}$, si ha $f_3'(c) = k c^{k-1}$.

Sia $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in [0, +\infty[\setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_4}(x,c) = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{c}}{x-c} = \frac{\left(\sqrt{x} - \sqrt{c}\right)\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)}{(x-c)\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)} = \frac{x-c}{(x-c)\left(\sqrt{x} + \sqrt{c}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{c}} \xrightarrow[x \to c]{} \begin{cases} +\infty , & \text{se } c = 0 , \\ \dfrac{1}{2\sqrt{c}} , & \text{se } c \in]0, +\infty[. \end{cases}$$

Pertanto f_4 è derivabile in $]0, +\infty[$ e, $\forall c \in]0, +\infty[$, si ha $f_4'(c) = 1/\left(2\sqrt{c}\right)$, mentre non è derivabile in 0.

Sia $c \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{c\}$, si ha

$$R_{f_5}(x,c) = \frac{|x| - |c|}{x-c} .$$

Se $c \in \mathbb{R}^+$, allora esiste un intorno di c incluso in $\mathbb{R}^+$; in tale intorno $|x| = x$, pertanto

$$\lim_{x \to c} R_{f_5}(x,c) = \lim_{x \to c} \frac{x-c}{x-c} = \lim_{x \to c} 1 = 1 .$$

Se $c \in \mathbb{R}^-$, allora esiste un intorno di c incluso in $\mathbb{R}^-$; in tale intorno $|x| = -x$, pertanto

$$\lim_{x \to c} R_{f_5}(x,c) = \lim_{x \to c} \frac{-x+c}{x-c} = \lim_{x \to c} (-1) = -1 .$$

Se $c = 0$ si ha

$$R_{f_5}(x,0) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 , & \text{se } x < 0 , \\ 1 , & \text{se } x > 0 . \end{cases}$$

Quindi per $x \to 0$ il limite sinistro del rapporto incrementale è -1, mentre il limite destro è 1; quindi il limite non esiste. Pertanto f_5 è derivabile in $\mathbb{R}^*$, mentre non è derivabile in 0.

Definiamo la funzione segno:

$$\operatorname{sgn}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & \text{se } x \in \mathbb{R}^-, \\ 0, & \text{se } x = 0, \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{R}^+. \end{cases}$$

Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f_5'(x) = \operatorname{sgn}(x)$. ◀

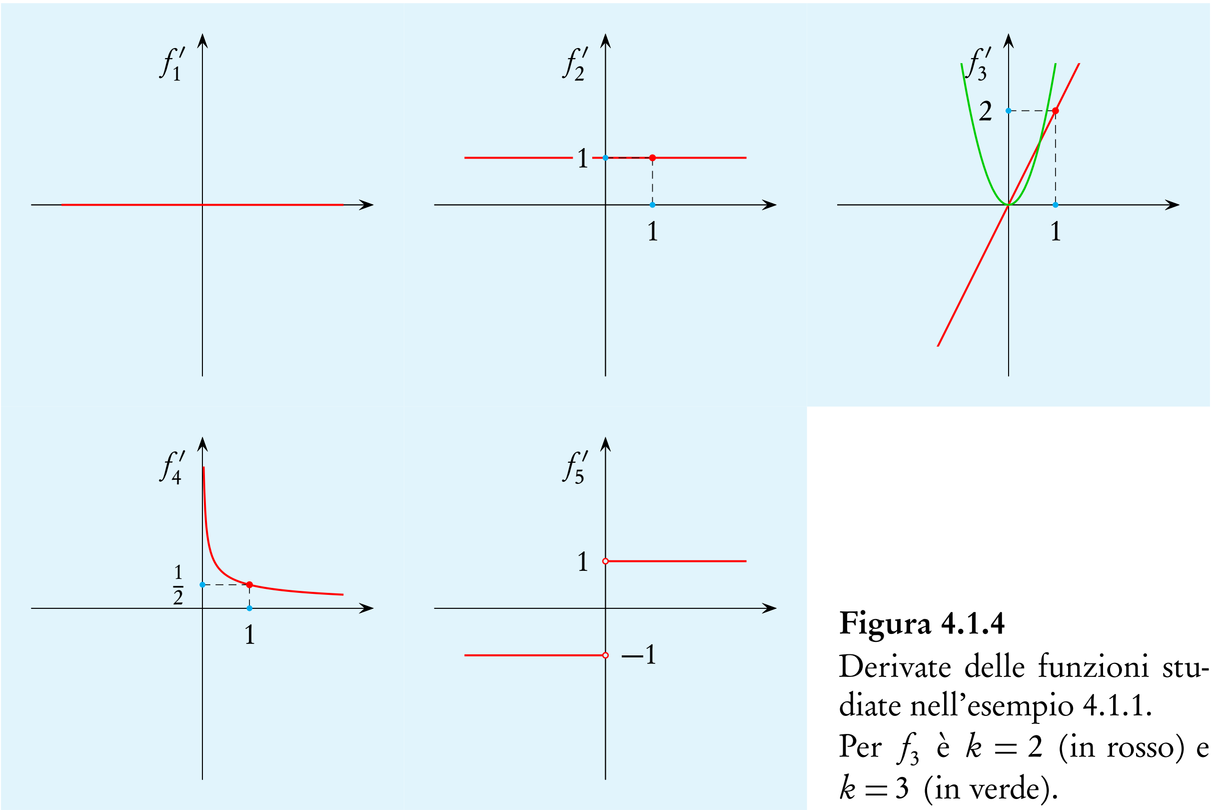


Figura 4.1.4
Derivate delle funzioni studiate nell'esempio 4.1.1. Per f_3 è $k = 2$ (in rosso) e $k = 3$ (in verde).

Introduciamo ora una caratterizzazione della derivabilità che risulta estremamente utile per provare varie proprietà della derivata.

4.1.2 Teorema (caratterizzazione della derivabilità)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Le seguenti affermazioni sono equivalenti:

I) f è derivabile in c;

II) esiste $\ell \in \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = f(c) + \ell(x-c) + o(x-c), \qquad \text{per } x \to c;$$

III) esiste $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che, $\forall x \in A$, si ha

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c).$$

Se tali affermazioni sono vere risulta inoltre $f'(c) = \ell = \varphi(c)$.

Ricordiamo che la notazione $g(x) = o\big(h(x)\big)$, per $x \to c$, indica che $g(x)/h(x) \to 0$, per $x \to c$. Quindi l'uguaglianza $f(x) = f(c) + \ell(x-c) + o(x-c)$, che può essere scritta nella forma $f(x)-f(c)-\ell(x-c) = o(x-c)$, significa che si ha

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)-\ell(x-c)}{x-c} = 0.$$

Dimostrazione. I $\Longrightarrow$ III) Supponiamo f derivabile in c. Sia $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ tale che

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}, & \text{se } x \in A \setminus \{c\}, \\ f'(c), & \text{se } x = c. \end{cases}$$

Per la definizione di derivata φ è continua in c. Se $x \in A \setminus \{c\}$ si ha

$$f(c) + \varphi(x)(x-c) = f(c) + \frac{f(x)-f(c)}{x-c}(x-c) = f(c) + f(x) - f(c) = f(x),$$

mentre se $x = c$ si ha

$$f(c) + \varphi(x)(x-c) = f(c) + f'(c)(c-c) = f(c),$$

quindi, $\forall x \in A$, si ha

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c).$$

Pertanto è verificata l'affermazione III con $\varphi(c) = f'(c)$.

III $\Longrightarrow$ II) Supponiamo che esista $\varphi\colon A \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c)$. Allora

$$f(x) = f(c) + \varphi(c)(x-c) + \big(\varphi(x)-\varphi(c)\big)(x-c) = f(c) + \varphi(c)(x-c) + o(x-c), \qquad \text{per } x \to c,$$

perché $\lim_{x\to c}\big(\varphi(x)-\varphi(c)\big) = 0$.

Pertanto è verificata l'affermazione II con $\ell = \varphi(c)$.

II $\Longrightarrow$ I) Supponiamo che sia $f(x) = f(c) + \ell(x-c) + o(x-c)$, per $x \to c$. Allora si ha

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{f(c)+\ell(x-c)+o(x-c)-f(c)}{x-c} = \ell + \frac{o(x-c)}{x-c} \xrightarrow[x\to c]{} \ell.$$

Pertanto è verificata l'affermazione I con $f'(c) = \ell$. ■

Per l'affermazione II, se f è derivabile in c, allora esiste un polinomio p, di grado al più 1, tale che la differenza $f(x) - p(x)$ è "piccola", nel senso che è $o(x-c)$, per $x \to c$. Tale polinomio è $p(x) = f(c) + f'(c)(x-c)$. Questo è l'unico polinomio di grado al più 1 che ha questa proprietà. Infatti se la differenza tra un polinomio e f è $o(x-c)$, per $x \to c$, allora la differenza si annulla in c, quindi il polinomio vale $f(c)$ in c, pertanto è del tipo $f(c) + \ell(x-c)$. Per l'affermazione II deve essere $\ell = f'(c)$.

Il grafico di tale polinomio è la retta di equazione $y = f(c) + f'(c)(x-c)$. Per i motivi visti sopra, questa retta è quella che approssima meglio il grafico di f vicino al punto $\big(c, f(c)\big)$.

Chiamiamo **retta tangente** al grafico di f nel punto $\big(c, f(c)\big)$ la retta di equazione

$$y = f(c) + f'(c)(x-c).$$

4.1.3 Teorema (di continuità delle funzioni derivabili)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Se f è derivabile in c allora f è continua in c.

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, esiste $\varphi : A \to \mathbb{R}$ continua in c e tale che, $\forall x \in A$, si ha $f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c)$; perciò f è somma di una funzione costante con una funzione continua in c, quindi è continua in c. ■

4.1.4 Esempio. Questo teorema non può essere invertito: esistono funzioni continue non derivabili. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo visto che le funzioni valore assoluto e radice quadrata, che sono continue, non sono derivabili in 0. ◀

4.1.2 Operazioni sulle derivate

Studiamo le regole che consentono di calcolare la derivata di una funzione ottenuta a partire da funzioni più semplici mediante operazioni algebriche.

4.1.5 Teorema (sull'algebra delle derivate)

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : A \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Supponiamo f e g derivabili in c. Allora:

I) $f + g$ è derivabile in c e si ha
$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c);$$

II) kf è derivabile in c e si ha
$$(kf)'(c) = kf'(c);$$

III) fg è derivabile in c e si ha
$$(fg)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c).$$

Se inoltre $\forall x \in A$, si ha $g(x) \neq 0$, allora:

IV) $1/g$ è derivabile in c e si ha
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{g'(c)}{\left(g(c)\right)^2}.$$

V) f/g è derivabile in c e si ha
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{\left(g(c)\right)^2}.$$

Dimostrazione. Nella dimostrazione utilizziamo la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, che garantisce che esistono $\varphi,\psi\colon A\to\mathbb{R}$ continue in c e tali che, $\forall x\in A$, risulta

$$\begin{aligned} f(x)&=f(c)+\varphi(x)(x-c),\\ g(x)&=g(c)+\psi(x)(x-c),\end{aligned}$$

e si ha $\varphi(c)=f'(c)$ e $\psi(c)=g'(c)$.

I) Per $x\in A$ si ha

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)&=f(c)+\varphi(x)(x-c)+g(c)+\psi(x)(x-c)=\\ &=f(c)+g(c)+\big(\varphi(x)+\psi(x)\big)(x-c);\end{aligned}$$

la funzione $\varphi+\psi$ è continua in c, perché somma di funzioni continue in c, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi $f+g$ è derivabile in c e la derivata è il valore della funzione $\varphi+\psi$ in c, cioè $(f+g)'(c)=\varphi(c)+\psi(c)=f'(c)+g'(c)$.

II) Per $x\in A$ si ha

$$kf(x)=k\big(f(c)+\varphi(x)(x-c)\big)=kf(c)+k\varphi(x)(x-c);$$

la funzione $k\varphi$ è continua in c, perché prodotto di una funzione continua in c per una costante, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi kf è derivabile in c e la derivata è il valore della funzione $k\varphi$ in c, cioè $(kf)'(c)=k\varphi(c)=kf'(c)$.

III) Per $x\in A$ si ha

$$\begin{aligned} f(x)g(x)&=\big(f(c)+\varphi(x)(x-c)\big)\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)=\\ &=f(c)g(c)+\varphi(x)(x-c)g(c)+f(c)\psi(x)(x-c)+\varphi(x)\psi(x)(x-c)^2=\\ &=f(c)g(c)+\big(\varphi(x)g(c)+f(c)\psi(x)+\varphi(x)\psi(x)(x-c)\big)(x-c);\end{aligned}$$

la funzione $x\mapsto\varphi(x)g(c)+f(c)\psi(x)+\varphi(x)\psi(x)(x-c)$ è continua in c, perché somma di funzioni continue in c, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi fg è derivabile in c e la derivata è il valore in c della funzione

$$x\mapsto\varphi(x)g(c)+f(c)\psi(x)+\varphi(x)\psi(x)(x-c),$$

cioè

$$(fg)'(c)=\varphi(c)g(c)+f(c)\psi(c)+\varphi(c)\psi(c)(c-c)=f'(c)g(c)+f(c)g'(c).$$

IV) Per $x\in A$ si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(x)}&=\frac{1}{g(c)+\psi(x)(x-c)}=\frac{1}{g(c)}+\frac{1}{g(c)+\psi(x)(x-c)}-\frac{1}{g(c)}=\\ &=\frac{1}{g(c)}+\frac{g(c)-\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)}{\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)g(c)}=\frac{1}{g(c)}-\frac{\psi(x)}{\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)g(c)}(x-c);\end{aligned}$$

la funzione
$$x \mapsto -\frac{\psi(x)}{\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)g(c)}$$
è continua in c, perché quoziente di funzioni continue in c, perciò è verificata l'affermazione III del teorema 4.1.2, quindi $1/g$ è derivabile in c e la derivata è il valore in c della funzione
$$x \mapsto -\frac{\psi(x)}{\big(g(c)+\psi(x)(x-c)\big)g(c)},$$
pertanto
$$\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = -\frac{\psi(c)}{\big(g(c)+\psi(c)(c-c)\big)g(c)} = -\frac{g'(c)}{\big(g(c)\big)^2}.$$

V) Poiché $f/g = f(1/g)$, la funzione f/g è prodotto di una funzione derivabile in c per la reciproca di una funzione derivabile in c, quindi, per le affermazioni III e IV, è derivabile in c e si ha
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = f'(c)\frac{1}{g(c)} + f(c)\left(\frac{1}{g}\right)'(c) = f'(c)\frac{1}{g(c)} - f(c)\frac{g'(c)}{\big(g(c)\big)^2} = \frac{f'(c)g(c)-f(c)g'(c)}{\big(g(c)\big)^2}. \blacksquare$$

4.1.6 Esempio. Consideriamo un polinomio p di grado $k \in \mathbb{N}^*$. Sia cioè
$$p(x) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j x^j,$$
con $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{R}$ e $\alpha_k \in \mathbb{R}^*$. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo provato che le funzioni costanti e le funzioni potenza a esponente intero positivo sono derivabili. Per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, affermazione II, ognuno degli addendi $x \mapsto \alpha_j x^j$ è derivabile, pertanto, per l'affermazione I, p è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha
$$p'(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{d\alpha_j x^j}{dx} = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j \frac{dx^j}{dx} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j j x^{j-1}.$$
Osserviamo che l'addendo che si ottiene per $j=0$ è una funzione costante, che ha derivata nulla. ◀

4.1.7 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N}^*$. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo stabilito che la funzione
$$f_3 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = x^k,$$
è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_3'(x) = kx^{k-1}$ (intendendo che se $k=1$ abbiamo la funzione costante 1). Per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, affermazione IV, applicato a $f_3|_{\mathbb{R}^*}$,

la funzione $x \mapsto x^{-k}$ è derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$\frac{dx^{-k}}{dx} = \frac{\frac{dx^k}{dx}}{(x^k)^2} = \frac{kx^{k-1}}{x^{2k}} = -kx^{-k-1}$$

Possiamo unificare questo risultato con ciò che si è stabilito nell'esempio 4.1.1 relativamente alla funzione f_3, affermando che se $k \in \mathbb{Z}^*$ allora la funzione $x \mapsto x^k$ è derivabile con derivata kx^{k-1}, per ogni x appartenente al dominio. ◀

4.1.3 Derivata di funzione composta e di funzione inversa

Studiamo ora la derivabilità della composizione di funzioni derivabili e dell'inversa di una funzione derivabile.

4.1.8 Teorema (sulla derivata della composizione)

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $c \in A \cap D(A)$. Supponiamo che sia $f(A) \subseteq B$ e $f(c) \in D(B)$. Se f è derivabile in c e g è derivabile in $f(c)$ allora $g \circ f$ è derivabile in c e

$$(g \circ f)'(c) = g'\big(f(c)\big)f'(c).$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, esistono $\varphi : A \to \mathbb{R}$ e $\psi : B \to \mathbb{R}$, continue rispettivamente in c e in $f(c)$, tali che

$$\begin{aligned} &\forall x \in A, \quad f(x) = f(c) + \varphi(x)(x - c), \\ &\forall y \in B, \quad g(y) = g\big(f(c)\big) + \psi(y)\big(y - f(c)\big); \end{aligned}$$

inoltre risulta $\varphi(c) = f'(c)$ e $\psi\big(f(c)\big) = g'\big(f(c)\big)$. Si ha, $\forall x \in A$,

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(c)\big) + \psi\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(c)\big) = g\big(f(c)\big) + \psi\big(f(x)\big)\varphi(x)(x - c);$$

la funzione f è derivabile in c, quindi è continua in c (teorema 4.1.3), pertanto la funzione $x \mapsto \psi\big(f(x)\big)\varphi(x)$ è prodotto di funzioni continue in c, perciò è continua in c, inoltre, per $x = c$, tale funzione vale $g'\big(f(c)\big)f'(c)$. Dalla caratterizzazione della derivabilità 4.1.2 segue che $g \circ f$ è derivabile in c con derivata $g'\big(f(c)\big)f'(c)$. ■

4.1.9 Teorema (sulla derivata della funzione inversa)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva e $c \in I$. Se f è derivabile in c e $f'(c) \neq 0$ allora f^{-1} è derivabile in $f(c)$ e

$$(f^{-1})'\big(f(c)\big) = \frac{1}{f'(c)}.$$

Dimostrazione. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, esiste $\varphi\colon I \to \mathbb{R}$, continua in c, tale che, $\forall x \in I$, si ha

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c),$$

e risulta $\varphi(c) = f'(c)$. Se $y \in f(I) = \mathscr{D}\big(f^{-1}\big)$ allora si ha

$$y = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(c) + \varphi\big(f^{-1}(y)\big)\big(f^{-1}(y) - c\big),$$

quindi

$$y - f(c) = \varphi\big(f^{-1}(y)\big)\big(f^{-1}(y) - c\big).$$

Se $y \neq f(c)$ il primo membro è diverso da 0, quindi ciascuno dei due fattori a secondo membro è diverso da 0, in particolare $\varphi\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$; se invece $y = f(c)$, allora

$$\varphi\big(f^{-1}(y)\big) = \varphi\big(f^{-1}\big(f(c)\big)\big) = \varphi(c) = f'(c) \neq 0.$$

Perciò $\forall y \in f(I)$ si ha $\varphi\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$. Quindi risulta

$$f^{-1}(y) - c = \frac{1}{\varphi\big(f^{-1}(y)\big)}\big(y - f(c)\big),$$

cioè

$$f^{-1}(y) = f^{-1}\big(f(c)\big) + \frac{1}{\varphi\big(f^{-1}(y)\big)}\big(y - f(c)\big).$$

Poiché f è continua in un intervallo ed è iniettiva, per il teorema 3.5.14, affermazione II, f^{-1} è continua, inoltre φ è continua in c, quindi la funzione $y \mapsto 1/\varphi\big(f^{-1}(y)\big)$ è continua in $f(c)$. Per la caratterizzazione della derivabilità 4.1.2, f^{-1} è derivabile in $f(c)$ con derivata

$$\frac{1}{\varphi\big(f^{-1}\big(f(c)\big)\big)} = \frac{1}{\varphi(c)} = \frac{1}{f'(c)}.$$ ■

La formula di derivazione di funzione inversa enunciata sopra può essere scritta in un'altra forma, più adatta a calcolare la derivata. Se $d \in f(I)$ e $f'\big(f^{-1}(d)\big) \neq 0$, allora

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(d)\big)}.$$

4.1.10 Osservazione. Per ogni $x \in A$, si ha $(f^{-1} \circ f)(x) = x$, pertanto, se f è derivabile in c e f^{-1} è derivabile in $f(c)$, per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, si ha $(f^{-1})'\big(f(c)\big)f'(c) = 1$, quindi deve essere $f'(c) \neq 0$ e risulta $(f^{-1})'\big(f(c)\big) = 1/f'(c)$.

Questa uguaglianza può essere ottenuta anche con considerazioni di natura geometrica. Se f è derivabile in c, allora la retta t_f tangente al grafico di f nel punto $\big(c, f(c)\big)$ ha coefficiente angolare $f'(c)$. Il grafico di f^{-1} si ottiene dal grafico di f scambiando ascisse con ordinate, il punto $\big(c, f(c)\big)$ diventa $\big(f(c), c\big)$ e, se f^{-1} è derivabile in $f(c)$, la retta tangente al suo grafico in tale punto si ottiene dalla retta t_f scambiando ascisse con ordinate e ha coefficiente angolare $(f^{-1})'\big(f(c)\big)$. Poiché questa retta non è parallela all'asse delle ordinate, t_f non può essere parallela all'asse delle ascisse, quindi deve essere $f'(c) \neq 0$. Inoltre scambiando ascisse con ordinate il coefficiente angolare di una retta diventa il reciproco, quindi $(f^{-1})'\big(f(c)\big) = 1/f'(c)$. ◀

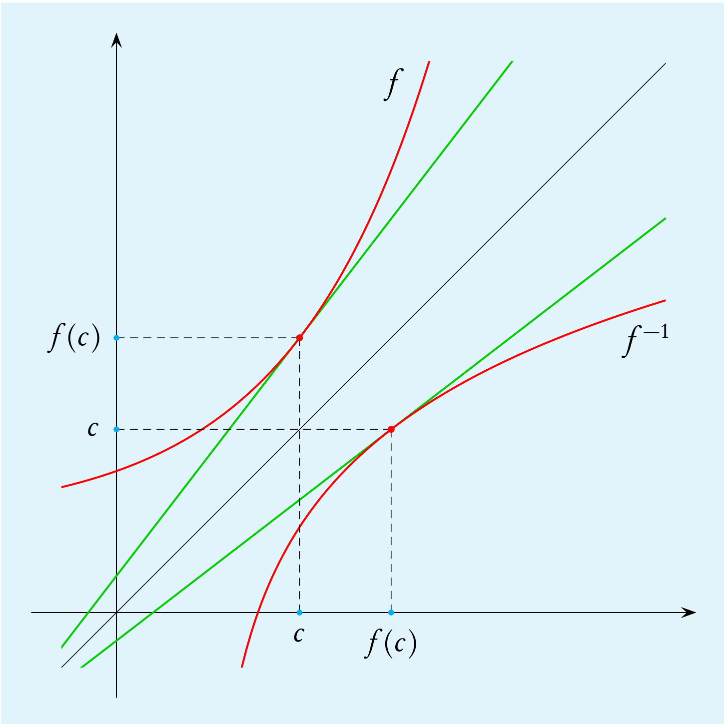


Figura 4.1.5
Il grafico di f^{-1} è il simmetrico rispetto alla retta $y = x$ (in nero) del grafico di f. La retta tangente al grafico di f^{-1} in $\big(f(c), c\big)$ è la simmetrica della retta tangente al grafico di f in $\big(c, f(c)\big)$.

4.1.11 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. La funzione radice k-sima è l'inversa della funzione

$$f_6 \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_6(x) = x^k.$$

Abbiamo visto nell'esempio 4.1.1 che la funzione potenza di esponente k è derivabile con derivata la funzione $x \mapsto kx^{k-1}$. La funzione f_6 è una restrizione della funzione potenza, quindi è anch'essa derivabile con la stessa derivata, che è diversa da 0 in tutti i punti del dominio escluso 0. Per il teorema sulla derivata della funzione inversa, f_6^{-1} è derivabile in tutti i punti d del dominio tali che $d \neq f_6(0) = 0$ e, $\forall d \in]0, +\infty[$, si ha

$$f_6^{-1}(d) = \frac{1}{f_6'\big(f_6^{-1}(d)\big)} = \frac{1}{f_6'\big(\sqrt[k]{d}\big)} = \frac{1}{k\big(\sqrt[k]{d}\big)^{k-1}} = \frac{1}{k}\big(\sqrt[k]{d}\big)^{1-k} = \frac{1}{k}\, d^{(1/k)-1}.$$

Per l'osservazione 4.1.10, f_6^{-1} non è derivabile in 0.

Sia $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}$, $q = j/k$, con $j \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Consideriamo la funzione potenza di esponente q, cioè

$$f_7 \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_7(x) = x^q.$$

Tale funzione è composizione della funzione $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ con la funzione $y \mapsto y^j$. Come stabilito sopra, la prima funzione è derivabile in $\mathbb{R}^+$, la seconda in tutto il dominio (vedi esempio 4.1.1). Pertanto, per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, la funzione $x \mapsto x^q$ è derivabile in $\mathbb{R}^+$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, si ha

$$f_7'(x) = \frac{d\left(\sqrt[k]{x}\right)^j}{dx} = j\left(\sqrt[k]{x}\right)^{j-1} \frac{1}{k} x^{(1/k)-1} = \frac{j}{k} x^{(j/k)-1} = q x^{q-1}.$$

Studiamo la derivabilità in 0. Il rapporto incrementale è

$$\frac{x^q - 0^q}{x - 0} = x^{q-1} \xrightarrow[x \to 0]{} \begin{cases} +\infty, & \text{se } 0 < q < 1, \\ 0, & \text{se } q > 1. \end{cases}$$

Pertanto f_7 è derivabile in 0 se e solo se $q > 1$ e in tal caso si ha $f_7'(0) = 0$.

Sia $q \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$, $q = j/k$, con $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ e $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Consideriamo la funzione potenza di esponente q, cioè

$$f_8 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x) = x^q.$$

Tale funzione è composizione della funzione $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ ristretta a $\mathbb{R}^+$ con la funzione $y \mapsto y^j$; queste funzioni sono derivabili. Pertanto, per il teorema sulla derivata della composizione 4.1.8, la funzione $x \mapsto x^q$ è derivabile e, con gli stessi calcoli visti per f_7, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, si ha $f_8'(x) = q x^{q-1}$.

Considerando anche ciò che si è stabilito negli esempi 4.1.1 e 4.1.7, possiamo concludere che la funzione $x \mapsto x^q$, dove $q \in \mathbb{Q}^*$, è derivabile in tutto il dominio se $q \notin]0, 1[$, mentre è derivabile nel dominio escluso 0 se $q \in]0, 1[$. In tutti i casi la derivata in x, appartenente all'insieme di derivabilità, è uguale a $q x^{q-1}$. ◀

4.1.4 Derivate di ordine superiore

Se una funzione è derivabile, risulta in maniera naturale definita la funzione derivata, che a ogni punto x del dominio di f fa corrispondere $f'(x)$. Possiamo chiederci se f' è derivabile. Risulta quindi naturale la seguente definizione.

Definizione di funzione derivabile 2 volte e di derivata seconda

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$, $f \colon A \to \mathbb{R}$ e $c \in A$. Supponiamo f derivabile in A. Diciamo che f è **derivabile 2 volte** in c quando f' è derivabile in c. In tal caso chiamiamo **derivata seconda** di f in c, la derivata di f' in c e la indichiamo con $f''(c)$.

Per indicare la derivata seconda di f in c si usano anche le notazioni

$$D^2 f(c), \qquad \left.\frac{d^2 f(x)}{dx^2}\right|_{x=c}.$$

Se f è derivabile 2 volte in ogni punto di A si può ripetere il procedimento definendo la derivata terza e successivamente la derivata quarta ecc. In generale possiamo quindi definire, per induzione, la derivata di ordine qualunque come segue.

Definizione di funzione derivabile n volte e di derivata n-sima

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$, $f\colon A \to \mathbb{R}$, $c \in A$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile n volte in A.
Diciamo che f è **derivabile $n+1$ volte** in c quando la funzione che a ogni punto di A fa corrispondere la derivata n-sima di f è a sua volta derivabile in c. In tal caso chiamiamo **derivata $n+1$-sima** di f in c tale derivata.
Diciamo che f è **derivabile $n+1$ volte** quando è derivabile $n+1$ volte in ogni punto di A.

La derivata n-sima della funzione f nel punto c si indica con $f^{(n)}(c)$ o anche con

$$D^n f(c), \qquad \left.\frac{d^n f(x)}{dx^n}\right|_{x=c}.$$

Si utilizza anche la scrittura $f^{(0)}$ per indicare la funzione f.

Notiamo che l'affermazione che una funzione è derivabile n volte non esclude che essa possa essere derivabile anche più di n volte.

Definizione di funzione indefinitamente derivabile

Siano $A \subseteq \mathbb{R}$ tale che $A \subseteq D(A)$ e $f\colon A \to \mathbb{R}$. Diciamo che f è **indefinitamente derivabile** quando, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, f è derivabile n volte in A.

Se una funzione $f\colon I \to \mathbb{R}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$, è derivabile n volte, con derivate continue, diciamo che f è una funzione di **classe** C^n. Se è indefinitamente derivabile, diciamo che f è una funzione di **classe** C^∞.

Osserviamo che, per il teorema sulla continuità delle funzioni derivabili 4.1.3, se una funzione è derivabile n volte, allora tutte le derivate di ordine minore di n sono continue. Se una funzione è indefinitamente derivabile, le derivate di qualunque ordine sono continue.

Indichiamo con $C^n(I,\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni di classe C^n da un intervallo I a $\mathbb{R}$; analogamente indichiamo con $C^\infty(I,\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni di classe C^∞ da un intervallo I a $\mathbb{R}$.

4.1.12 Esempio. Sia $k \in \mathbb{N}^*$. Nell'esempio 4.1.1 abbiamo provato che la funzione

$$f_3\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_3(x) = x^k,$$

è derivabile, con derivata $f_3'(x) = kx^{k-1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Tale funzione è a sua volta derivabile, perché prodotto di una costante per una funzione derivabile. Se $k=1$, allora f_3' è costante, quindi ha derivata nulla, pertanto f_3'' è la funzione identicamente nulla. Se $k>1$, allora $f_3''(x) = k(k-1)x^{k-2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Evidentemente f_3'' è a sua volta derivabile, quindi f_3 è derivabile 3 volte. Se $k=1$, allora f_3'' è la funzione nulla, quindi anche f_3''' è la funzione nulla. Se $k=2$, allora f_3'' vale costantemente 2, pertanto f_3''' è la funzione nulla. Se $k>2$, allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha $f_3'''(x) = k(k-1)(k-2)x^{k-3}$.

Ripetendo il ragionamento si prova che f_3 è indefinitamente derivabile; se $n \leq k$ risulta $f_3^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, mentre se $n > k$ allora $f_3^{(n)}$ è identicamente nulla.

Sia $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. Nell'esempio 4.1.7 abbiamo provato che la funzione $x \mapsto x^k$, di dominio $\mathbb{R}^*$, è derivabile e la funzione derivata è $x \mapsto kx^{k-1}$. Da questo segue immediatamente che tale funzione è indefinitamente derivabile e la derivata n-sima in $x \in \mathbb{R}^*$ è uguale a $k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$.

Sia $q \in \mathbb{Q}^+ \setminus \mathbb{Z}$. Nell'esempio 4.1.11 abbiamo provato che la funzione

$$f_7 \colon [0, +\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f_7(x) = x^q,$$

è derivabile se $q \notin]0,1[$, mentre è derivabile nel dominio escluso 0 se $q \in]0,1[$. Nei punti di derivabilità si ha $f_7'(x) = qx^{q-1}$. Tale funzione è derivabile se $q-1 \notin]0,1[$, cioè $q \notin]1,2[$, mentre è derivabile in $\mathbb{R}^+$, ma non in 0, se $q \in]1,2[$. Quindi se $q \notin]0,2[$, allora f_7 è derivabile 2 volte, mentre se $q \in]0,2[$, allora f_7 è derivabile 2 volte in $\mathbb{R}^+$. In ogni caso, nei punti di derivabilità si ha $f_7''(x) = q(q-1)x^{q-2}$.

Ripetendo il ragionamento si prova che f_7 è indefinitamente derivabile in $\mathbb{R}^+$; per x in tale insieme risulta $f_7^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$. Inoltre se $n < q$, allora f_7 è derivabile n volte in 0. Se si ha $n < q$ e $n+1 > q$, allora $f_7^{(n)}(x) = q(q-1)\dots(q-n+1)x^{q-n}$ e questa funzione non è derivabile in 0, perché $q-n < 1$. Pertanto f_7 non è derivabile $n+1$ volte in 0. Osserviamo che, poiché q non è intero, la condizione $n < q < n+1$ equivale a $n = [q]$.

Sia $q \in \mathbb{Q}^- \setminus \mathbb{Z}$. Nell'esempio 4.1.11 abbiamo provato che la funzione

$$f_8 \colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \qquad f_8(x) = x^q,$$

è derivabile e la funzione derivata è $x \mapsto qx^{q-1}$. Da questo segue immediatamente che tale funzione è indefinitamente derivabile e, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, si ha $f_8^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n}$.
◀

4.2 Funzioni derivabili in un intervallo

Studiamo alcune proprietà delle funzioni che sono derivabili in tutti i punti di un intervallo, esclusi eventualmente gli estremi.

4.2.1 Teorema (di Rolle[10])

Sia $f \colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$, derivabile in $]a,b[$ e $f(a) = f(b)$ allora esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$.

[10] Il teorema prende il nome da Michel Rolle (Ambert, Francia, 1652 - Parigi, 1719). Fu un autodidatta e lavorò vari anni come impiegato. Successivamente entrò a far parte dell'Accademia Reale delle Scienze francese. Oltre al libro in cui compare questo teorema, pubblicato ne 1691, pubblicò un trattato di algebra.

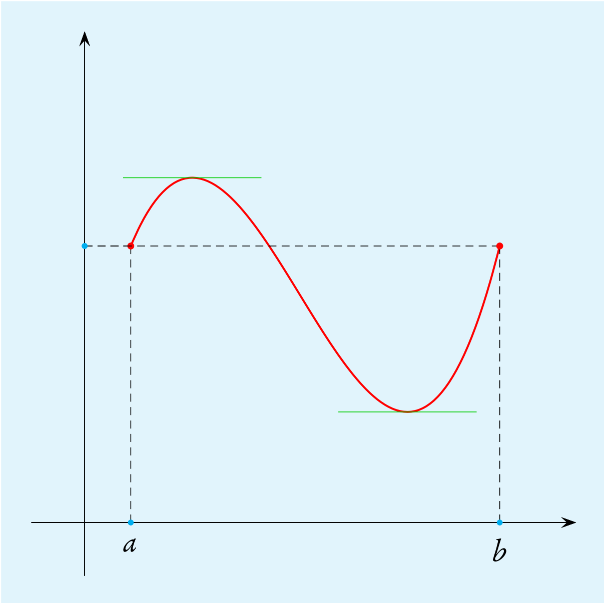


Figura 4.2.1
Per il teorema di Rolle, se f assume gli stessi valori in a e in b, vi è almeno un punto del grafico che ha tangente parallela all'asse delle ascisse.

Dimostrazione. La funzione f è continua in un intervallo chiuso e limitato, che, per il teorema 3.1.16 è compatto, quindi, per il teorema di Weierstrass 3.5.5, esistono massimo e minimo di f, che indichiamo, rispettivamente, con M e m. È verificata almeno una tra le condizioni seguenti:

a) $M > f(a) = f(b)$,
b) $m < f(a) = f(b)$,
c) $M = m = f(a) = f(b)$.

Nel caso che sia verificata la a), esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = M$; poiché $M \neq f(a)$ e $M \neq f(b)$, si ha $c \neq a$ e $c \neq b$, quindi $c \in \,]a,b[$. Qualunque sia $x \in [a,b]$ si ha $f(x) \leq f(c)$. Allora per $x \in [a,c[$ si ha $f(x) - f(c) \leq 0$ e $x - c < 0$, quindi $R_f(x,c) \geq 0$; pertanto, per il teorema del confronto 3.3.8, si ha $\lim_{x\to c^-} R_f(x,c) \geq 0$, quindi

$$f'(c) = \lim_{x\to c} R_f(x,c) = \lim_{x\to c^-} R_f(x,c) \geq 0.$$

D'altra parte $\forall x \in \,]c,b]$ risulta $f(x) - f(c) \leq 0$ e $x - c > 0$ quindi $R_f(x,c) \leq 0$, da cui, analogamente, segue $f'(c) \leq 0$. Poiché si ha sia $f'(c) \geq 0$ che $f'(c) \leq 0$ risulta $f'(c) = 0$.

Nel caso che sia verificata la b), esiste $c \in [a,b]$ tale che $f(c) = m$, procedendo come nel caso a) si ottiene che $c \in \,]a,b[$ e $f'(c) = 0$.

Nel caso che sia verificata la c), massimo e minimo di f sono uguali tra di loro, quindi f è costante, pertanto ha derivata nulla in ogni punto del dominio. ■

4.2.2 Teorema (di Cauchy[11])

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Se f e g sono continue in $[a,b]$ e derivabili in $]a,b[$ allora esiste $c \in \,]a,b[$ tale che

$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

DIMOSTRAZIONE. Poniamo

$$h\colon [a,b] \to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \big(f(b)-f(a)\big)g(x) - \big(g(b)-g(a)\big)f(x).$$

La funzione h è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$, perché f e g godono delle stesse proprietà. Inoltre si ha

$$\begin{aligned}h(a) &= \big(f(b)-f(a)\big)g(a) - \big(g(b)-g(a)\big)f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a),\\ h(b) &= \big(f(b)-f(a)\big)g(b) - \big(g(b)-g(a)\big)f(b) = -f(a)g(b) + g(a)f(b),\end{aligned}$$

quindi $h(a) = h(b)$. Pertanto h soddisfa le ipotesi del teorema di Rolle 4.2.1, perciò esiste $c \in]a,b[$ tale che $h'(c) = 0$. Poiché

$$h'(c) = \big(f(b)-f(a)\big)g'(c) - \big(g(b)-g(a)\big)f'(c),$$

si ha

$$\big(f(b)-f(a)\big)g'(c) = \big(g(b)-g(a)\big)f'(c).$$

■

Se g' non si annulla, allora risulta $g(a) \neq g(b)$. Infatti, se fosse $g(a) = g(b)$, per il teorema di Rolle 4.2.1 dovrebbe esistere un punto in cui la derivata si annulla. In questo caso la tesi del teorema di Cauchy può essere scritta nella forma

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

4.2.3 Osservazione. Il teorema di Cauchy ha una interpretazione fisica. Consideriamo un punto materiale che si sposta nel piano al variare del tempo, in modo che all'istante t si trovi nel punto $\big(g(t), f(t)\big)$.

Al tempo t la componente lungo l'asse delle ascisse della velocità è $g'(t)$, mentre la componente lungo l'asse delle ordinate è $f'(t)$. Pertanto la velocità vettoriale è $\big(g'(t), f'(t)\big)$.

Se la posizione del punto nell'istante iniziale a coincide con quella nell'istante finale b, cioè $f(b) - f(a) = 0$ e $g(b) - g(a) = 0$, allora per qualunque $c \in]a,b[$ è verificata la tesi del teorema di Cauchy.

Se esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = g'(c) = 0$, cioè c'è un istante in cui il punto ha velocità nulla, allora la tesi del teorema di Cauchy è verificata per tale c.

Consideriamo ora il caso che la posizione finale sia diversa da quella iniziale e la velocità non sia mai nulla.

Se $g(a) \neq g(b)$, allora $\big(f(b)-f(a)\big)/\big(g(b)-g(a)\big)$ è il coefficiente angolare della retta passante per la posizione iniziale e la posizione finale del punto, mentre $f'(c)/g'(c)$ è il coefficiente angolare della retta che contiene il vettore velocità; pertanto le due rette sono parallele. Quindi esiste un istante in cui la velocità è parallela allo spostamento del punto tra l'istante a e l'istante b. Un risultato analogo si ottiene anche se $g(a) = g(b)$, mentre $f(a) \neq f(b)$.

[11] Il teorema prende il nome dal già citato Augustin-Louis Cauchy (v. nota 6), che lo pubblicò in un trattato del 1823.

La velocità del punto materiale è tangente alla traiettoria. Quindi, se il punto cambia posizione tra il tempo a e il tempo b e non ha mai velocità nulla, per il teorema di Cauchy c'è un punto della traiettoria in cui la retta tangente è parallela alla retta passante per la posizione iniziale e la posizione finale del punto. ◀

4.2.4 Esempio. Siano

$$f_9, g_9 : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_9(x) = x^2 + x, \qquad g_9(x) = x^2 - x.$$

Cerchiamo $c \in]-1,1[$ che verifichi la tesi del teorema di Cauchy. Si ha $f_9(1) - f_9(-1) = 2$, $g_9(1) - g_9(-1) = -2$ e, $\forall x \in [-1,1]$, $f_9'(x) = 2x+1$, $g_9'(x) = 2x - 1$. Quindi deve essere

$$2(2c-1) = -2(2c+1)$$

cioè $4c = -4c$, quindi $c = 0$.

Siano

$$f_{10}, g_{10} : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_{10}(x) = x^2 + x^3, \qquad g_{10}(x) \qquad = x^2 - x^3.$$

Cerchiamo $c \in]-1,1[$ che verifichi la tesi del teorema di Cauchy. Si ha $f_{10}(1) - f_{10}(-1) = 2$, $g_{10}(1) - g_{10}(-1) = -2$ e, $\forall x \in [-1,1]$, $f_{10}'(x) = 2x + 3x^2$, $g_{10}'(x) = 2x - 3x^2$. Quindi deve essere

$$2(2c-3c^2) = -2(2c+3c^2)$$

cioè $4c = -4c$, quindi $c = 0$. In tale punto f_{10}' e g_{10}' si annullano. ◀

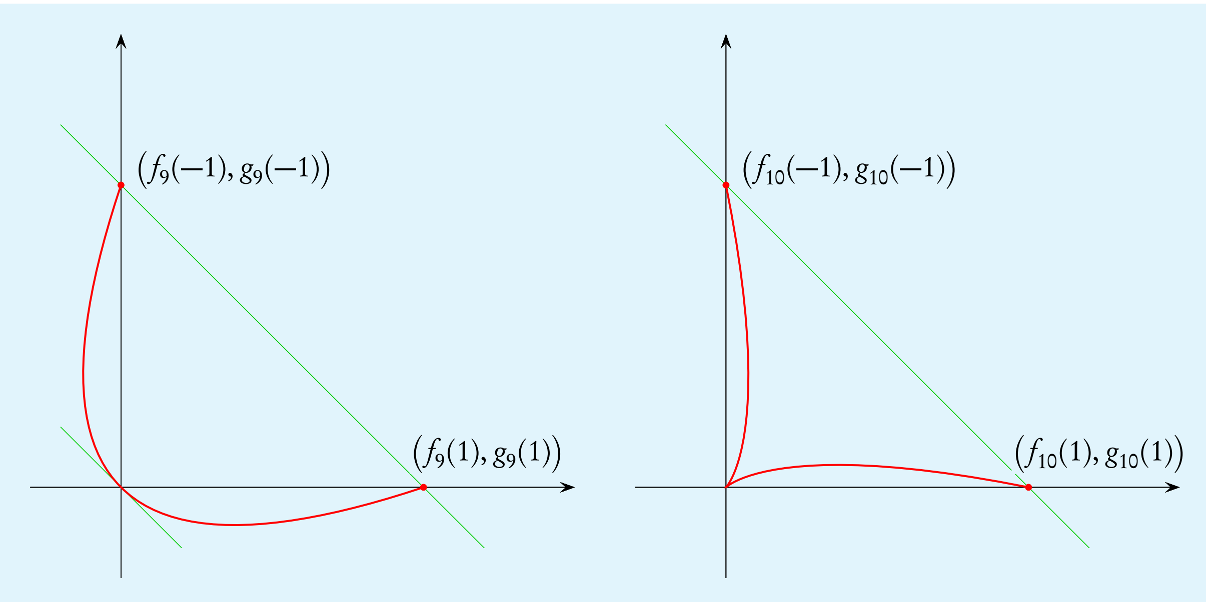


Figura 4.2.2
Le curve costruite come nell'osservazione 4.2.3 considerando le funzioni dell'esempio 4.2.4. A sinistra: c'è un punto in cui la tangente alla curva è parallela alla retta passante per la posizione iniziale e quella finale del punto. A destra: c'è un punto in cui si annullano sia f_{10}' che g_{10}'. Tale punto è "angoloso" per la curva, cioè non esiste retta tangente.

Risulta estremamente utile il seguente caso particolare del teorema di Cauchy.

4.2.5 Teorema (di Lagrange[12] o del valor medio)

Sia $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$. Se f è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$ allora esiste $c\in\,]a,b[$ tale che

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c).$$

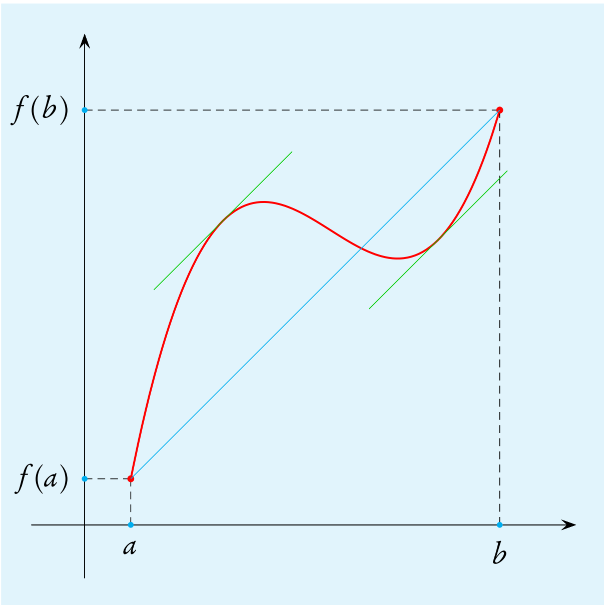


Figura 4.2.3
Per il teorema di Lagrange, vi è almeno un punto del grafico di f che ha tangente parallela alla retta che congiunge i punti $\big(a,f(a)\big)$ e $\big(b,f(b)\big)$.

Dimostrazione. Sia $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ tale che $g(x)=x$. Tale funzione è continua e derivabile, con derivata che vale costantemente 1. Il teorema di Cauchy 4.2.2 applicato alle funzioni f e g assicura che esiste $c\in\,]a,b[$ tale che

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c). \qquad \blacksquare$$

Vediamo alcune conseguenze del teorema di Lagrange.

4.2.6 Teorema (sulle funzioni a derivata nulla)

Siano $I\subseteq\mathbb{R}$ intervallo e $f\colon I\to\mathbb{R}$ derivabile. Se, $\forall x\in I$, si ha $f'(x)=0$ allora f è costante.

Dimostrazione. Siano $x,y\in I$ con $x\neq y$; possiamo per esempio supporre $x<y$. Poiché I è un intervallo si ha $[x,y]\subseteq I$, possiamo applicare il teorema di Lagrange 4.2.5 alla restrizione di f all'intervallo $[x,y]$. Perciò esiste $\xi\in\,]x,y[$ tale che $f(y)-f(x)=f'(\xi)(y-x)$; poiché $f'(\xi)=0$, si ha $f(y)-f(x)=0$, cioè $f(y)=f(x)$.

Quindi in tutti i punti del dominio f assume lo stesso valore, cioè è costante. $\blacksquare$

[12] Il teorema prende il nome da Giuseppe Luigi Lagrange (Torino, 1736 - Parigi, 1813), fu tra i fondatori della meccanica analitica e diede grandi contributi allo sviluppo di vari settori dell'analisi. Ottenne anche importanti risultati in astronomia, teoria dei numeri, algebra e geometria analitica. Lagrange pubblicò questo teorema in un trattato del 1797.

Il teorema seguente permette, in alcuni casi, di semplificare lo studio della derivabilità di una funzione.

4.2.7 Teorema (sul limite della derivata)

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $c \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ continua in I e derivabile in $I \setminus \{c\}$. Se esiste $\lim_{x\to c} f'(x)$ allora esiste $\lim_{x\to c} R_f(x,c) = \lim_{x\to c} f'(x)$.

Dimostrazione. Poniamo $\ell = \lim_{x\to c} f'(x)$. Abbiamo

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell, \exists V_U \in \mathscr{I}_c \colon \forall x \in I \setminus \{c\}, \quad x \in V_U \implies f'(x) \in U.$$

Scelto $U \in \mathscr{I}_\ell$, sia $x \in I \cap V_U \setminus \{c\}$. La funzione f è continua nell'intervallo chiuso di estremi c e x ed è derivabile in tale intervallo escluso il punto c. Quindi sono verificate le ipotesi del teorema di Lagrange 4.2.5, perciò esiste ξ appartenente all'intervallo aperto di estremi c e x tale che $R_f(x,c) = f'(\xi)$. Poiché $c, x \in V_U$ e V_U è un intervallo, si ha anche $\xi \in V_U$, quindi $f'(\xi) \in U$, cioè $R_f(x,c) \in U$. Pertanto $\forall x \in I \cap V_U \setminus \{c\}$ si ha $R_f(x,c) \in U$, quindi $f'(c) = \lim_{x\to c} R_f(x,c) = \ell$. ■

Questo teorema assicura che, se esiste reale il limite di f' in c, allora la funzione è derivabile, con derivata uguale a tale limite. Se invece $f'(x)$ è divergente per $x \to c$ allora f non è derivabile in c. È evidente che il teorema vale anche per i limiti unilateri. Pertanto se f' ha limite sinistro e destro in c diversi tra di loro, allora f non è derivabile.

4.2.8 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{11} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{11}(x) = x|x|,$$

che è prodotto delle funzioni f_2 e f_5 (vedi esempio 4.1.1) di dominio $\mathbb{R}$, tali che $f_2(x) = x$ e $f_5(x) = |x|$; la prima è derivabile in $\mathbb{R}$, la seconda è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e non derivabile in 0. Quindi, per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, f_{11} è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$f'_{11}(x) = f'_2(x) f_5(x) + f_2(x) f'_5(x) = |x| + x\,\mathrm{sgn}(x) = |x| + |x| = 2|x|.$$

Risulta $\lim_{x\to 0} f'_{11}(x) = \lim_{x\to 0} 2|x| = 0$. Pertanto, per il teorema sul limite della derivata 4.2.7, f_{11} è derivabile in 0, con $f'_{11}(0) = 0$. ◀

4.2.9 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{12} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad f_{12}(x) = (x-1)|x|,$$

che è prodotto di una funzione polinomiale per la funzione valore assoluto. La prima è derivabile in $\mathbb{R}$, la seconda è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e non derivabile in 0. Quindi, per il teorema sull'algebra delle derivate 4.1.5, f_{12} è derivabile in $\mathbb{R}^*$ e, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, si ha

$$f'_{12}(x) = |x| + (x-1)\,\mathrm{sgn}(x) = x\,\mathrm{sgn}(x) + (x-1)\,\mathrm{sgn}(x) = (2x-1)\,\mathrm{sgn}(x).$$

Risulta $\lim_{x\to 0^-} f'_{12}(x) = \lim_{x\to 0^-}(-2x+1) = 1$ e $\lim_{x\to 0^+} f'_{12}(x) = \lim_{x\to 0^+}(2x-1) = -1$. Pertanto, per il teorema sul limite della derivata 4.2.7, $\lim_{x\to 0^-} f_{12}(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f_{12}(x)$, quindi f_{12} non è derivabile in 0. ◀

4.3 Applicazioni del calcolo differenziale

4.3.1 I teoremi di de l'Hôpital

Studiamo ora dei teoremi che, utilizzando il calcolo differenziale, forniscono strumenti utili per il calcolo dei limiti.

Siano f e g sono due funzioni reali di variabile reale, definite in un intervallo I contenente il punto c e tali che $f(c) = g(c) = 0$, mentre $g(x) \neq 0$, per $x \in I \setminus \{c\}$. Allora, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(c)}{g(x)-g(c)} = \frac{\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c}}{\dfrac{g(x)-g(c)}{x-c}} = \frac{R_f(x,c)}{R_g(x,c)}.$$

Pertanto, se f e g sono derivabili in c, con $g'(c) \neq 0$, allora esiste reale il limite, per $x \to c$, di $f(x)/g(x)$ e tale limite coincide con $f'(c)/g'(c)$.

Osserviamo che, avendo supposto f e g derivabili in c, per il teorema di continuità delle funzioni derivabili 4.1.3, risulta $\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = 0$ e $\lim_{x\to c} g(x) = g(c) = 0$, pertanto il limite si presenta in forma indeterminata $0/0$. Se inoltre le funzioni f e g sono derivabili in I e f' e g' hanno limite per $x \to c$, allora, per il teorema sul limite della derivata 4.2.7, risulta $\lim_{x\to c} f'(x) = f'(c)$ e $\lim_{x\to c} g'(x) = g'(c)$, quindi

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

se il limite a secondo membro non si presenta in forma indeterminata.

Questa osservazione può essere generalizzata nel seguente teorema.

4.3.1 Teorema (de l'Hôpital[13], forma $0/0$, $x \to a$)

Siano $f, g\colon]a,b[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$,

c) $\forall x \in]a,b[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

[13]Questo teorema e i seguenti prendono il nome da Guillaume de l'Hôpital (Parigi, 1661 - Parigi, 1704), che li pubblicò in un trattato di analisi del 1696. Tali teoremi erano già stati trovati da Johann Bernoulli (Basilea, 1667 - Basilea, 1748, fratello del già citato Jakob, v. nota 1), che diede importanti contributi allo studio dell'analisi e dell'ottica.

Dimostrazione. Prolunghiamo f e g all'intervallo $[a,b[$ ponendo $f(a) = g(a) = 0$. Poiché $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ le funzioni f e g sono continue anche in a.

Poiché $\forall x \in]a,b[$, si ha $g'(x) \neq 0$, se $x \neq a$ allora $g(x) \neq 0$. Infatti se fosse $g(x) = 0$ allora si potrebbe applicare il teorema di Rolle 4.2.1 alla restrizione di g all'intervallo $[a,x]$, pertanto esisterebbe un punto in cui g' si annulla.

Poniamo $\ell = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Allora, per la definizione di limite, si ha

$$\forall U \in \mathscr{I}_\ell,\ \exists \delta_U \in \mathbb{R}^+ \colon\ \forall x \in]a,b[,\quad x \in]a,a+\delta_U[\implies \frac{f'(x)}{g'(x)} \in U.$$

Fissato $U \in \mathscr{I}_\ell$, se $x \in]a,b[\cap]a,a+\delta_U[$, allora, per il teorema di Cauchy 4.2.2 applicato alle restrizioni di f e g all'intervallo $[a,x]$, esiste $\xi_x \in]a,x[$ tale che

$$\big(f(x) - f(a)\big)g'(\xi_x) = \big(g(x) - g(a)\big)f'(\xi_x).$$

poiché $f(a) = g(a) = 0$ e $\xi_x \in]a,x[\subseteq]a,a+\delta_U[$, da qui segue

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \in U.$$

Abbiamo così dimostrato che, se $x \in]a,a+\delta_U[$, allora $f(x)/g(x) \in U$; pertanto esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell. \qquad \blacksquare$$

Un teorema del tutto analogo a quello appena dimostrato vale nel caso del limite sinistro, quindi anche nel caso di limite per x che tende a un punto interno di un intervallo in cui siano definite le due funzioni f e g.

4.3.2 Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x-1},$$

già studiato nell'esempio 3.3.1. Il limite è nella forma indeterminata $0/0$. Numeratore e denominatore sono derivabili in un intorno di 1, la derivata del denominatore non si annulla. Il quoziente delle derivate è

$$\frac{1 - 1/(2\sqrt{x})}{1} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

che tende a $1/2$ per $x \to 1$. Pertanto, per il teorema di de l'Hôpital 4.3.1,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x-1} = \frac{1}{2}. \qquad \blacktriangleleft$$

4.3.3 Teorema (de l'Hôpital, forma $0/0$, $x \to +\infty$)

Siano $f, g \colon]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$,

c) $\forall x \in]a, +\infty[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Poniamo $b = 1/a$ se $a > 0$ e $b = 1$ se $a \leq 0$. In ogni caso se $y \in]0, b[$ allora $1/y \in]a, +\infty[$, quindi possiamo definire le funzioni

$$\overline{f}, \overline{g} \colon]0, b[\to \mathbb{R}, \qquad \overline{f}(y) = f\left(\frac{1}{y}\right), \qquad \overline{g}(y) = g\left(\frac{1}{y}\right).$$

Verifichiamo che $\overline{f}$ e $\overline{g}$ soddisfano le condizioni del teorema di de l'Hôpital 4.3.1 per $y \to 0$. Esse sono derivabili perché composizione di funzioni derivabili e si ha, $\forall y \in]0, b[$,

$$\overline{f}'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right), \qquad \overline{g}'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right).$$

Poiché g' non si annulla, anche $\overline{g}'$ non si annulla. Inoltre

$$\lim_{y\to0^+} \overline{f}(y) = \lim_{y\to0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0;$$

analogamente, $\lim_{y\to0^+} \overline{g}(y) = 0$. Infine esiste

$$\lim_{y\to0^+} \frac{\overline{f}'(y)}{\overline{g}'(y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{-\dfrac{1}{y^2} f'\left(\dfrac{1}{y}\right)}{-\dfrac{1}{y^2} g'\left(\dfrac{1}{y}\right)} = \lim_{y\to0^+} \frac{f'\left(\dfrac{1}{y}\right)}{g'\left(\dfrac{1}{y}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Allora, per il teorema di de l'Hôpital 4.3.1, esiste

$$\lim_{y\to0^+} \frac{\overline{f}(y)}{\overline{g}(y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{\overline{f}'(y)}{\overline{g}'(y)},$$

quindi esiste

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to0^+} \frac{\overline{f}(y)}{\overline{g}(y)} = \lim_{y\to0^+} \frac{\overline{f}'(y)}{\overline{g}'(y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad \blacksquare$$

Ovviamente un teorema analogo vale per il limite per $x \to -\infty$.

4.3.4 Teorema (de l'Hôpital, forma ℓ/∞, $x \to a$)

Siano $f, g \colon]a,b[\to \mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $g(x)$ è divergente per $x \to a^+$,

c) $\forall x \in]a,b[$, si ha $g'(x) \neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dimostrazione. Poiché g è divergente esiste un intorno di 0 in cui essa non si annulla, si può supporre, eventualmente restringendo il dominio delle funzioni, che non si annulli in tutto l'intervallo $]a,b[$.

Siano $x, y \in]a,b[$ con $x < y$; per il teorema di Cauchy 4.2.2, applicato alle restrizioni di f e g all'intervallo $[x,y]$, esiste $\xi_{x,y} \in]x,y[$ tale che

$$\big(f(y) - f(x)\big)g'(\xi_{x,y}) = \big(g(y) - g(x)\big)f'(\xi_{x,y}).$$

Si ha allora, successivamente

$$f(x) - f(y) = \big(g(x) - g(y)\big)\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})},$$

$$f(x) = f(y) + \big(g(x) - g(y)\big)\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})},$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}.$$

Consideriamo ora il caso $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \in \mathbb{R}$.

Per semplificare le notazioni nel seguito, nella definizione di limite scegliamo δ_ε piccolo, in modo che risulti $]a,b[\cap]a, a+\delta_\varepsilon[=]a, a+\delta_\varepsilon[$; si ha quindi

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in]0, b-a[\colon \forall x \in]a, a+\delta_\varepsilon[, \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell\right| < \varepsilon.$$

Scelto $\varepsilon \in]0,1[$, fissiamo $y \in]a, a+\delta_\varepsilon[$. Poiché $g(x)$ è divergente per $x \to a^+$, si ha $\lim_{x\to a^+} f(y)/g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} g(y)/g(x) = 0$, quindi esiste $\eta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ (che possiamo supporre minore di δ_ε) tale che se $x \in]a, a+\eta_\varepsilon[$ allora

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon, \qquad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \varepsilon.$$

Se $x \in]a, a+\eta_\varepsilon[$ allora risulta $\xi_{x,y} \in]x, y[\subseteq]a, a+\delta_\varepsilon[$, quindi

$$\left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| < \varepsilon\,,$$

pertanto

$$\left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}\right| = \left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell + \ell\right| \le \left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| + |\ell| < \varepsilon + |\ell| < 1 + |\ell|\,,$$

perciò

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \ell\right| &= \left|\frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| \le \\ &\le \left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \ell\right| + \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\left|\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}\right| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\big(1+|\ell|\big) = \varepsilon\big(3+|\ell|\big).\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell$.

Consideriamo ora il caso $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$. Si ha

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists \delta_M \in]0, b-a[:\ \forall x \in]a, a+\delta_M[,\quad \frac{f'(x)}{g'(x)} > M\,.$$

Scelto $M \in]1, +\infty[$ fissiamo $y \in]a, a+\delta_M[$. Poiché $g(x)$ è divergente per $x \to a^+$, si ha $\lim_{x\to a^+} f(y)/g(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} g(y)/g(x) = 0$, quindi esiste $\eta_M \in \mathbb{R}^+$ (che possiamo supporre minore di δ_M) tale che se $x \in]a, a+\eta_M[$ allora

$$\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{M}, \qquad \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right| < \frac{1}{M}\,.$$

Se $x \in]a, a+\eta_M[$ allora si ha

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(y)}{g(x)} + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} - \frac{g(y)}{g(x)}\frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})} \ge \\ &\ge -\left|\frac{f(y)}{g(x)}\right| + \frac{f'(\xi_{x,y})}{g'(\xi_{x,y})}\left(1 - \left|\frac{g(y)}{g(x)}\right|\right) > -\frac{1}{M} + M\left(1 - \frac{1}{M}\right) \ge M - 2\,.\end{aligned}$$

Possiamo quindi concludere che $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Nel caso che sia $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = -\infty$ la dimostrazione è analoga. ■

4.3.5 Teorema (de l'Hôpital, forma ℓ/∞, $x\to+\infty$)

Siano $f,g\colon\,]a,+\infty[\,\to\mathbb{R}$. Se si ha:

a) f e g sono derivabili,

b) $g(x)$ è divergente per $x\to+\infty$,

c) $\forall x\in\,]a,+\infty[$, si ha $g'(x)\neq 0$,

d) esiste $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$,

allora esiste

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

La dimostrazione si ottiene dal teorema di de l'Hôpital per x che tende a un valore reale in modo analogo a quanto fatto nel caso della forma $0/0$.

Ovviamente un teorema analogo vale per il limite per $x\to-\infty$.

4.3.6 Esempio. Calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Il limite è in forma indeterminata ∞/∞, ma può essere facilmente calcolato come segue:

$$\frac{\sqrt{x^2+2}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2\big(1+(2/x^2)\big)}}{\sqrt{x^2\big(1+(1/x^2)\big)}}=\frac{\sqrt{1+(2/x^2)}}{\sqrt{1+(1/x^2)}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}1.$$

Si può anche cercare di calcolare il limite utilizzando il teorema di de l'Hôpital 4.3.5. Infatti la funzione di cui cerchiamo il limite è quoziente delle funzioni

$$f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\qquad f(x)=\sqrt{x^2+2},\qquad g(x)=\sqrt{x^2+1}.$$

Per $x\to+\infty$ si ha $f(x)\to+\infty$ e $g(x)\to+\infty$. Inoltre f e g sono derivabili e, $\forall x\in\mathbb{R}$, si ha

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+2}},\qquad g'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Risulta $g'(x)\neq 0$, per $x\in\mathbb{R}^+$. Si ha

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}=\frac{x/\sqrt{x^2+2}}{x/\sqrt{x^2+1}}=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}},$$

pertanto per applicare il teorema di de l'Hôpital occorre determinare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+2}}.$$

Questo limite è del tutto analogo a quello che stiamo studiando, pertanto l'applicazione del teorema di de l'Hôpital non agevola il calcolo del limite. ◀

4.3.2 La formula di Taylor

Sappiamo che il grafico di una funzione ha una retta tangente in ogni punto di derivabilità; quindi una funzione derivabile può essere approssimata da un polinomio di primo grado. Cerchiamo di migliorare l'approssimazione utilizzando polinomi di grado maggiore.

4.3.7 Esempio. Sia

$$f_{13}\colon]-\infty,1[\to\mathbb{R}, \qquad f_{13}(x)=\frac{1}{1-x}.$$

Per il teorema 1.4.6, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, se $x\in\,]-\infty,1[$ si ha

$$1-x^{n+1}=(1-x)\sum_{k=0}^{n}1^k x^{n-k}=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k.$$

Pertanto

$$1=(1-x)\sum_{k=0}^{n}x^k+x^{n+1},$$

da cui, dividendo per $1-x$, si ottiene

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+\frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Poiché $1/(1-x)\to 1$, per $x\to 0$, esiste un intorno di 0 in cui tale funzione è limitata; pertanto l'ultimo addendo è $O\big(x^{n+1}\big)$. Quindi

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{k=0}^{n}x^k+O\big(x^{n+1}\big), \qquad \text{per } x\to 0.$$

Abbiamo così determinato un polinomio che approssima f_{13} vicino a 0. Poiché, se $n<m$, allora x^m è trascurabile rispetto a x^n, per $x\to 0$, al crescere del grado del polinomio l'approssimazione migliora. ◀

Cerchiamo di approssimare una funzione con un polinomio di secondo grado, facendo considerazioni geometriche simili a quelle fatte per individuare la retta tangente.

Sia f una funzione derivabile in un intervallo contenente il punto c. Consideriamo una parabola di equazione $y=g(x)$ con

$$g(x)=\alpha(x-c)^2+\beta(x-c)+\gamma,$$

con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Consideriamo un qualunque polinomio di grado al più 2, perciò non chiediamo che sia $\alpha\neq 0$, quindi la parabola può degenerare in una retta. Il polinomio è espresso mediante potenze di $x-c$, perché questo semplifica lo studio del suo comportamento per x vicino a c.

Imponiamo che la parabola passi per $\big(c,f(c)\big)$ e che in questo punto abbia retta tangente coincidente con la retta tangente al grafico di f. La parabola passa per $\big(c,f(c)\big)$ se e solo se

$g(c) = f(c)$ e in tal caso le rette tangenti sono comuni se e solo se $g'(c) = f'(c)$; pertanto deve essere $\gamma = f(c)$ e $\beta = f'(c)$. Quindi la parabola ha equazione

$$y = \alpha(x-c)^2 + f'(c)(x-c) + f(c).$$

Imponiamo che la parabola abbia in comune con il grafico di f anche un altro punto $\big(d, f(d)\big)$; ciò è verificato se risulta

$$f(d) = \alpha(d-c)^2 + f'(c)(d-c) + f(c),$$

cioè

$$\alpha = \frac{f(d) - f(c) - f'(c)(d-c)}{(d-c)^2}.$$

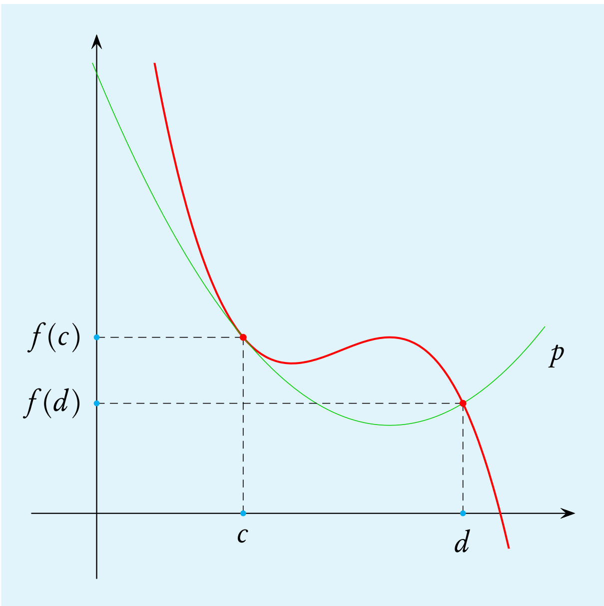


Figura 4.3.1
La parabola p interseca il grafico di f in due punti di ascissa c e d; nel primo di tali punti il grafico e la parabola hanno la stessa retta tangente.

Al variare del punto d varia il coefficiente α del termine di secondo grado dell'equazione della parabola; studiamo come cambia la parabola per $d \to c$, cioè studiamo il limite di α per $d \to c$. Il limite è quoziente di funzioni infinitesime, quindi è in forma indeterminata. Procediamo in modo simile a quello utilizzato per dimostrare il Teorema di Lagrange 4.2.5.

Consideriamo la funzione $h = f - g$, dove è g la funzione il cui grafico è la parabola individuata sopra. Poiché f è derivabile, anche h lo è; inoltre, h si annulla in c e in d. Per il teorema di Rolle 4.2.1 esiste un punto d_1, appartenente all'intervallo aperto di estremi c e d, tale che $h'(d_1) = 0$. Supponiamo f derivabile 2 volte; allora anche h lo è, quindi h' è derivabile; inoltre $h'(c) = 0$ perché f' e g' coincidono in c. Perciò possiamo applicare il teorema di Rolle 4.2.1 alla funzione h' nell'intervallo di estremi c e d_1; quindi esiste d_2 in tale intervallo tale che $h''(d_2) = 0$. Poiché d_2 è compreso tra c e d_1 e d_1 è compreso tra c e d, anche d_2 è compreso tra c e d. Si ha

$$0 = h''(d_2) = f''(d_2) - g''(d_2) = f''(d_2) - 2\alpha,$$

perciò $\alpha = f''(d_2)/2$. Quando d tende a c, anche d_2 tende a c; quindi, se f'' è continua in c, allora α tende a $f''(c)/2$. Perciò la parabola si "avvicina" alla parabola di equazione

$$y = \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 + f'(c)(x-c) + f(c),$$

quando d si avvicina a c (v. Fig. 4.3.2). Questa è detta **parabola osculatrice** al grafico di f nel punto $\big(c, f(c)\big)$.

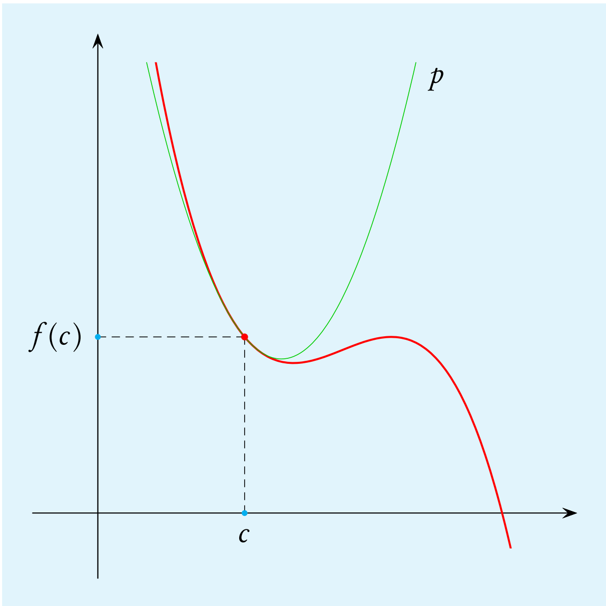


Figura 4.3.2
La parabola p è la parabola osculatrice al grafico della funzione nel punto di ascissa c.

Precisiamo la relazione tra grafico di funzione e parabola osculatrice in termini di proprietà di funzioni. Abbiamo visto che se f è derivabile 2 volte nell'intervallo I, allora $\forall c, d \in I$ esiste d_2, compreso tra c e d, tale che il coefficiente α del termine di secondo grado della parabola osculatrice è uguale a $f''(d_2)/2$; si ha quindi

$$f(d) = f(c) + f'(c)(d-c) + \frac{f''(d_2)}{2}(d-c)^2,$$

cioè

$$f(d) = f(c) + f'(c)(d-c) + \frac{f''(c)}{2}(d-c)^2 + \frac{f''(d_2) - f''(c)}{2}(d-c)^2;$$

se f'' è continua in c, l'ultimo termine è $o\big((d-c)^2\big)$ per $d \to c$. Perciò

$$f(d) = f(c) + f'(c)(d-c) + \frac{f''(c)}{2}(d-c)^2 + o\big((d-c)^2\big), \qquad \text{per } d \to c.$$

Sotto opportune ipotesi di derivabilità, abbiamo così stabilito che f si può approssimare, in un intorno di c, con un polinomio di secondo grado il cui grafico è la parabola osculatrice. L'errore che si commette sostituendo il polinomio alla funzione è trascurabile rispetto alla funzione $x \mapsto (x-c)^2$; questa approssimazione è migliore di quella col polinomio di primo grado avente come grafico la retta tangente, in tal caso l'errore è trascurabile rispetto a $x - c$.

Estendiamo questi ragionamenti ai polinomi di grado qualunque.

Definizione polinomio di Taylor[14]

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile $n-1$ volte in I e n volte in c. Chiamiamo **polinomio di Taylor** di f di punto iniziale c e ordine n il polinomio

$$T_{c,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k .$$

Utilizziamo questa notazione anche nel caso $n = 0$: $T_{c,0}$ denota la funzione che vale costantemente $f(c)$.

4.3.8 Esempio. Consideriamo la funzione

$$f_{13} \colon]-\infty, 1[\to \mathbb{R}, \qquad f_{13}(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1},$$

già studiata nell'esempio 4.3.7. Determiniamone i polinomi di Taylor di punto iniziale 0. La funzione è razionale fratta, quindi indefinitamente derivabile; $\forall x \in]-\infty, 1[$ si ha

$$\begin{aligned}
f_{13}'(x) &= (-1)(1-x)^{-1-1}(-1) = (1-x)^{-2},\\
f_{13}''(x) &= (-2)(1-x)^{-2-1}(-1) = 2(1-x)^{-3},\\
f_{13}'''(x) &= 2(-3)(1-x)^{-3-1}(-1) = 3 \cdot 2(1-x)^{-4}.
\end{aligned}$$

È quindi evidente che, come si può dimostrare rigorosamente per induzione, $\forall x \in]-\infty, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, si ha $f_{13}^{(n)}(x) = n!(1-x)^{-n-1}$; pertanto $f_{13}^{(n)}(0) = n!$. Quindi

$$T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f_{13}^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} x^k$$

Questo polinomio coincide con il polinomio che approssima f_{13} vicino a 0 trovato nell'esempio 4.3.7. ◀

Chiamiamo **formula di Taylor** di punto iniziale c e ordine n per la funzione f l'uguaglianza

$$f(x) = T_{c,n}(x) + R_{c,n}(x);$$

il termine $R_{c,n} = f - T_{c,n}$ è detto **resto della formula di Taylor** di punto iniziale c e ordine n per la funzione f.

Questa formula ha interesse se abbiamo informazioni sul resto, che ci consentono di sapere in che senso il polinomio $T_{c,n}$ approssima f.

[14]Il polinomio prende il nome da Brook Taylor (Edmonton, Inghilterra, 1685 - Londra, 1731), che introdusse questo polinomio in un libro pubblicato nel 1715. In realtà, come spesso accade in matematica, Taylor riscoprì ciò che altri avevano già trovato; probabilmente il primo a scrivere il polinomio di Taylor è stato James Gregory (Drumoak, Scozia, 1638 - Edimburgo, 1675), che lo citò in una lettera a un altro matematico nel 1671.

4.3.9 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile $n-1$ volte in I e n volte in c. Allora, per $j = 0, 1, \ldots, n$, risulta

$$T_{c,n}^{(j)}(c) = f^{(j)}(c).$$

Dimostrazione. Evidentemente $T_{c,n}(c) = f(c)$.

Siano $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \mathbb{N}^*$. Se $j < k$, si ha

$$\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j} = k(k-1)\ldots(k-j+1)(x-c)^{k-j},$$

quindi

$$\left.\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j}\right|_{x=c} = 0,$$

Se $j > k$

$$\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j} = 0.$$

Infine

$$\frac{d^k (x-c)^k}{dx^k} = k!,$$

Pertanto, per $j = 1, 2, \ldots, n$ si ha

$$\left.\frac{d^j T_{c,n}(x)}{dx^j}\right|_{x=c} = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!} \left.\frac{d^j (x-c)^k}{dx^j}\right|_{x=c} = \frac{f^{(j)}(c)}{j!} j! = f^{(j)}(c).$$ ■

Enunciamo alcuni teoremi che serviranno per ottenere informazioni sul resto.

4.3.10 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile, $c \in I$ e $\alpha \in [0, +\infty[$. Se $f(c) = 0$ e $f'(x) = o\big(|x-c|^\alpha\big)$ per $x \to c$ allora $f(x) = o\big(|x-c|^{\alpha+1}\big)$ per $x \to c$.

Dimostrazione. Sia $x \in I \setminus \{c\}$. Per il teorema di Lagrange 4.2.5, applicato alla restrizione di f all'intervallo di estremi x e c, esiste ξ_x, interno a tale intervallo, tale che si ha $f(x) - f(c) = f'(\xi_x)(x-c)$; per ipotesi $f(c) = 0$, pertanto risulta $f(x) = f'(\xi_x)(x-c)$. Poiché $|\xi_x - c| \leq |x-c|$, da qui segue

$$\left|\frac{f(x)}{|x-c|^{\alpha+1}}\right| = \frac{|f'(\xi_x)(x-c)|}{|x-c|^{\alpha+1}} = \frac{|f'(\xi_x)|}{|x-c|^\alpha} = \frac{|f'(\xi_x)|}{|\xi_x - c|^\alpha} \frac{|\xi_x - c|^\alpha}{|x-c|^\alpha} \leq \frac{|f'(\xi_x)|}{|\xi_x - c|^\alpha}.$$

Poiché $\lim_{x \to c} f'(x)/|x-c|^\alpha = 0$, si ha

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \colon \forall x \in I \setminus \{c\}, \quad x \in]c - \delta_\varepsilon, c + \delta_\varepsilon[\implies \left|\frac{f'(x)}{|x-c|^\alpha}\right| < \varepsilon.$$

Fissato $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, se $x \in I \cup]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\setminus \{c\}$ è anche $\xi_x \in I \cup]c-\delta_\varepsilon, c+\delta_\varepsilon[\setminus \{c\}$ quindi si ha

$$\left|\frac{f(x)}{|x-c|^{\alpha+1}}\right| \leq \frac{|f'(\xi_x)|}{|\xi_x - c|^\alpha} < \varepsilon .$$

Perciò $\lim_{x\to c} f(x)/|x-c|^{\alpha+1} = 0$. ■

4.3.11 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile $n-1$ volte in I e n volte in c. Se $f^{(j)}(c) = 0$ per $j = 0, 1, \dots, n$ allora $f(x) = o\big((x-c)^n\big)$ per $x \to c$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: qualunque sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $n-1$ volte in I e n volte in c, tale che $f^{(j)}(c) = 0$, per $j = 0, 1, \dots, n$, si ha $f(x) = o\big((x-c)^n\big)$ per $x \to c$.

Consideriamo il caso $n = 1$. Se $f(c) = f'(c) = 0$ allora

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{x-c} = \lim_{x\to c} \frac{f(x) - f(c)}{x-c} = f'(c) = 0,$$

perciò $\mathscr{P}(1)$ è vera.

Supponiamo ora che $\mathscr{P}(n)$ si verificata. Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in I e $n+1$ volte in c tale che

$$f(c) = f'(c) = \dots = f^{(n)}(c) = f^{(n+1)}(c) = 0.$$

Allora f' è derivabile $n-1$ volte in I e n volte in c e si ha

$$f'(c) = (f')'(c) = \dots = (f')^{(n)}(c) = 0,$$

da cui, per ipotesi induttiva, $f'(x) = o\big((x-c)^n\big)$ per $x \to c$. Poiché $f(c) = 0$, per il teorema 4.3.10 si ha $f(x) = o\big((x-c)^{n+1}\big)$ per $x \to c$, quindi $\mathscr{P}(n+1)$ è verificata. ■

4.3.12 Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Peano[15])

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Supponiamo f derivabile $n-1$ volte in I e n volte in c. Allora

$$f(x) = T_{c,n}(x) + o\big((x-c)^n\big), \qquad \text{per } x \to c,$$

e $T_{c,n}$ è l'unico polinomio di grado minore o uguale a n che ha questa proprietà.

[15]Questa forma del resto prende il nome da Giuseppe Peano (Cuneo, 1858 - Torino, 1932). Ottenne importanti risultati in logica matematica, algebra lineare e in vari settori dell'analisi tra cui le equazioni differenziali. Fu anche studioso di filosofia. Pubblicò questa forma del resto in un trattato sul calcolo differenziale del 1884.

Dimostrazione. Per il teorema 4.3.9 la funzione $f-T_{c,n}$ si annulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine n in c; per il teorema 4.3.11 si ha quindi $f(x)-T_{c,n}(x)=o\big((x-c)^n\big)$, per $x\to c$, pertanto $f(x)=T_{c,n}(x)+o\big((x-c)^n\big)$.

Sia Q un polinomio di grado minore o uguale a n tale che

$$f(x)=Q(x)+o\big((x-c)^n\big), \qquad \text{per } x\to c\,.$$

Dobbiamo dimostrare che $Q=T_{c,n}$, cioè che $Q-T_{c,n}$ è il polinomio nullo.

Per quanto già dimostrato si ha

$$\lim_{x\to c}\frac{Q(x)-T_{c,n}(x)}{(x-c)^n}=\lim_{x\to c}\left(\frac{Q(x)-f(x)}{(x-c)^n}+\frac{f(x)-T_{c,n}(x)}{(x-c)^n}\right)=0\,,$$

quindi, ponendo $x-c=y$,

$$\lim_{y\to 0}\frac{Q(y+c)-T_{c,n}(y+c)}{y^n}=0\,.$$

La funzione $y\mapsto Q(y+c)-T_{c,n}(y+c)$ è polinomiale di grado minore o uguale a n. Per concludere la dimostrazione è sufficiente provare che se R è un polinomio di grado minore o uguale a n e $\lim_{y\to 0}R(y)/y^n=0$ allora R è identicamente nullo. Proviamo l'implicazione contrapposta: se R è un polinomio di grado minore o uguale a n non identicamente nullo, allora non è vero che $\lim_{y\to 0}R(y)/y^n=0$.

Sia quindi R un polinomio di grado minore o uguale a n non identicamente nullo; indicato con m il più piccolo esponente tale che il coefficiente di y^m è non nullo, risulta $R(y)=\sum_{k=m}^n a_k y^k$ con $a_m\neq 0$. Si ha

$$\frac{R(y)}{y^n}=\frac{y^m}{y^n}\sum_{k=m}^n a_k y^{k-m}=y^{m-n}\sum_{k=m}^n a_k y^{k-m}\,.$$

Per $y\to 0$ il secondo fattore ha limite a_m, mentre il primo ha limite 1, se $m=n$, e limite destro $+\infty$, se $m<n$. In ciascuno dei due casi il limite del prodotto non può essere 0. ■

Vediamo ora una differente forma del resto, che non coinvolge limiti per x che tende al punto iniziale del polinomio. Tale forma del resto generalizza il teorema di Lagrange 4.2.5, che può essere interpretato come una formula di Taylor per $n=0$. Infatti da tale teorema segue che, sotto opportune ipotesi, se c e x sono due punti distinti del dominio di f, allora esiste ξ compreso tra c e x tale che

$$f(x)=T_{c,0}(x)+f'(\xi)(x-c)\,.$$

Per studiare questa generalizzazione è utile il seguente teorema, che generalizza il teorema di Rolle 4.2.1.

4.3.13 Teorema

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo f derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I \setminus \{c\}$. Se, per $k = 0, 1, \dots, n$, si ha $f^{(k)}(c) = 0$, allora, $\forall x \in I \setminus \{c\}$ tale che $f(x) = 0$, esiste ξ compreso tra c e x tale che $f^{(n+1)}(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Dimostriamo il teorema applicando il principio di induzione 1.3.4 alla proposizione $\mathscr{P}(n)$: qualunque sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I \setminus \{c\}$, tale che, per $k = 0, 1, \dots, n$, si ha $f^{(k)}(c) = 0$, se $x \in I \setminus \{c\}$ è tale che $f(x) = 0$, allora esiste ξ compreso tra c e x tale che $f^{(n+1)}(\xi) = 0$.

L'affermazione $\mathscr{P}(0)$ segue subito dal teorema di Rolle 4.2.1.

Supponiamo vera $\mathscr{P}(n)$ e sia $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivabile $n+1$ volte in I, con derivata $n+1$-sima continua, e $n+2$ volte in $I \setminus \{c\}$, tale che, per $k = 0, 1, \dots, n+1$, si ha $f^{(k)}(c) = 0$. Se $x \in I \setminus \{c\}$ è tale che $f(x) = 0$, poiché anche $f(c) = 0$, per il teorema di Rolle, esiste ξ compreso tra c e x tale che $f'(\xi) = 0$. Posto $g = f'$, risulta g derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I \setminus \{c\}$ e si ha, per $k = 0, 1, \dots, n$, $g^{(k)}(c) = 0$ e $g(\xi) = 0$. Pertanto, per l'ipotesi induttiva, esiste η compreso tra c e ξ tale che $g^{(n+1)}(\eta) = 0$. Poiché $g^{(n+1)}(\eta) = f^{(n+2)}(\eta)$ e η è compreso tra c e x, vale $\mathscr{P}(n+1)$. ■

4.3.14 Teorema (formula di Taylor con resto nella forma di Lagrange[16])

Siano $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo, $f\colon I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ e $n \in \mathbb{N}$. Supponiamo f derivabile n volte in I, con derivata n-sima continua, e $n+1$ volte in $I \setminus \{c\}$. Allora, $\forall x \in I \setminus \{c\}$, esiste ξ compreso tra c e x tale che

$$f(x) = T_{c,n}(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$g\colon I \to \mathbb{R}, \qquad g(y) = f(y) - T_{c,n}(y) - \big(f(x) - T_{c,n}(x)\big)\frac{(y-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}}.$$

Per il teorema 4.3.9 la funzione $f - T_{c,n}$ si annulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine n in c; anche la funzione $y \mapsto (y-c)^{n+1}$ si annulla insieme a tutte le derivate fino all'ordine n in c, pertanto $g^{(j)}(c) = 0$, per $j = 0, 1, \dots, n$. Inoltre

$$g(x) = f(x) - T_{c,n}(x) - \big(f(x) - T_{c,n}(x)\big)\frac{(x-c)^{n+1}}{(x-c)^{n+1}} = f(x) - T_{c,n}(x) - \big(f(x) - T_{c,n}(x)\big) = 0.$$

[16] Questa forma del resto prende il nome da Giuseppe Luigi Lagrange (v. nota 12) che la pubblicò in un trattato del 1797.

Pertanto, per il teorema 4.3.13, esiste ξ, compreso tra c e x, tale che $g^{(n+1)}(\xi)=0$. Si ha

$$
\begin{aligned}
g'(y) &= f'(y)-T'_{c,n}(y)-\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)\frac{(n+1)(y-c)^n}{(x-c)^{n+1}},\\
g''(y) &= f''(y)-T''_{c,n}(y)-\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)\frac{(n+1)n(y-c)^{n-1}}{(x-c)^{n+1}},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
g^{(n)}(y) &= f^{(n)}(y)-T^{(n)}_{c,n}(y)-\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)\frac{(n+1)n\cdots 2(y-c)}{(x-c)^{n+1}},\\
g^{(n+1)}(y) &= f^{(n+1)}(y)-\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)\frac{(n+1)!}{(x-c)^{n+1}},
\end{aligned}
$$

dove, nell'ultimo passaggio, si è utilizzato il fatto che $T_{c,n}$ è un polinomio di grado minore o uguale a n, quindi ha derivata $n+1$-sima nulla. Pertanto risulta

$$f^{(n+1)}(\xi)-\big(f(x)-T_{c,n}(x)\big)\frac{n!}{(x-c)^{n+1}}=0,$$

quindi ξ verifica la tesi del teorema. ■

Indice analitico

R

S

T

V