Origine fisica di equazioni alle derivate parziali

Equazione del calore

Dato un corpo nello spazio, rappresentato con un sottoinsieme A di $\mathbb{R}^3$, indichiamo con $u(x,y,z,t)$ la temperatura del corpo nel punto (x,y,z) all'istante t.

Consideriamo una regione V del corpo, cioè un insieme $V \subseteq A$, che supponiamo misurabile; la quantità di calore contenuta in V al tempo t, che indichiamo con $Q_V(t)$, è proporzionale alla sua temperatura, se essa è costante. La costante di proporzionalità è data dal prodotto tra la densità ρ del corpo e il calore specifico (o capacità termica) C, che esprime la capacità di immagazzinare energia del corpo per unità di massa. Se la temperatura non è costante avremo

$$Q_V(t) = \int_V \rho(x,y,z) C(x,y,z) u(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz\,.$$

Il flusso di calore nel corpo è governato dalla legge di Fourier (o legge di trasmissione del calore): il flusso di calore è proporzionale al gradiente della temperatura e la costante di proporzionalità è negativa, cioè il calore fluisce dalle zone più calde a quelle più fredde. In particolare il flusso di calore attraverso una superficie è proporzionale al flusso del gradiente della temperatura attraverso tale superficie, quindi, se S è una superficie contenuta nel corpo, il flusso totale di calore attraverso tale superficie in un intervallo di tempo $[t_1, t_2]$ è

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_S \langle k(x,y,z) \nabla u(x,y,z,t), \nu(x,y,z) \rangle\, ds\; dt$$

dove $\nu(x,y,z)$ è il vettore di norma 1 ortogonale alla superficie S, nella direzione verso cui si considera il flusso di calore, mentre k è la conducibilità termica del materiale, che dipende da quanto il materiale sia un buon conduttore termico.

La grandezza $Q_V(t)$ varia nel tempo, perché vi è un flusso di calore attraverso la superficie che delimita V; vi può essere una ulteriore variazione dovuta alla presenza di sorgenti di calore in V. Supponendo che V abbia come frontiera una superficie, per quanto visto sopra il flusso di calore attraverso ∂V in direzione uscente da V è dato da

$$-\int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \langle k(x,y,z) \nabla u(x,y,z,t), \nu(x,y,z) \rangle\, ds\; dt$$

dove $\nu(x,y,z)$ è il vettore unitario normale a ∂V in direzione uscente da V; per il calcolo della variazione del calore in V occorre considerare il flusso entrante, quindi abbiamo

$$\begin{aligned} Q_V(t_2) - Q_V(t_1) = & \int_{t_1}^{t_2} \int_{\partial V} \langle k(x,y,z) \nabla u(x,y,z,t), \nu(x,y,z) \rangle\, ds\; dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_V f(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz\; dt \end{aligned}$$

dove f è la quantità di calore proveniente da eventuali sorgenti di calore presenti nel corpo.

Per il teorema della divergenza

$$\int_{\partial V} \langle k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t), \nu(x,y,z)\rangle\, ds = \int_V \operatorname{div}\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big)\, dx\, dy\, dz$$

quindi

$$Q_V(t_2) - Q_V(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \int_V \Big(\operatorname{div}\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big) + f(x,y,z,t)\Big)\, dx\, dy\, dz\, dt\,.$$

Se u , f e k sono sufficientemente regolari rispetto alla variabile t , da questa uguaglianza segue che Q_V è derivabile e

$$\begin{aligned}
\frac{dQ_V}{dt}(t) &= \lim_{h\to 0} \frac{Q_V(t+h) - Q_V(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \int_V \Big(\operatorname{div}\big(k(x,y,z)\nabla u(\tau,x,y,z)\big) + f(\tau,x,y,z)\Big)\, dx\, dy\, dz\, d\tau \\
&= \int_V \Big(\operatorname{div}\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big) + f(x,y,z,t)\Big)\, dx\, dy\, dz\,.
\end{aligned}$$

Inoltre se u è sufficientemente regolare rispetto alla variabile t , allora dall'uguaglianza

$$Q_V(t) = \int_V \rho(x,y,z)C(x,y,z)u(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz\,,$$

segue

$$\frac{dQ_V}{dt}(t) = \int_V \rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz$$

e quindi

$$\begin{aligned}
&\int_V \rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t)\, dx\, dy\, dz = \\
&\qquad\qquad = \int_V \Big(\operatorname{div}\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big) + f(x,y,z,t)\Big)\, dx\, dy\, dz\,.
\end{aligned}$$

Poiché questa uguaglianza vale per qualunque V sottoinsieme di A abbastanza regolare, le due funzioni integrande debbono coincidere, quindi si ha

$$\rho(x,y,z)C(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = \operatorname{div}\big(k(x,y,z)\nabla u(x,y,z,t)\big) + f(x,y,z,t)\,.$$

Se il corpo è omogeneo allora le grandezze fisiche ρ, C e k sono costanti, quindi l'equazione diventa

$$\rho C\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = k \operatorname{div} \nabla u(x,y,z,t) + f(x,y,z,t)\,,$$

perciò

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,z,t) = \frac{k}{\rho C}\Delta u(x,y,z,t) + \frac{1}{\rho C} f(x,y,z,t)\,.$$

Questa equazione è detta equazione del calore.

Equazione delle onde

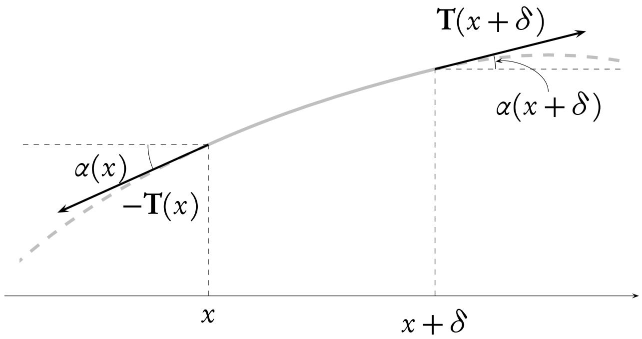
Consideriamo una corda elastica in tensione, fissata negli estremi, soggetta a piccoli spostamenti in direzione perpendicolare rispetto alla posizione di riposo. Supponiamo che la corda non opponga resistenza alle flessioni e che sia elastica, cioè la forza che la corda esercita è proporzionale alla sua lunghezza.

Identifichiamo la corda a riposo con l'intervallo $[0, L]$ dell'asse delle ascisse e indichiamo con $u(x,t)$ lo spostamento, in direzione parallela all'asse delle ordinate, del punto di ascissa x della corda, all'istante t. Ciò significa che all'istante t la corda è descritta dal grafico della funzione $x \mapsto u(x,t)$.

Studiamo le forze che agiscono su ogni tratto di corda.

Consideriamo la tensione della corda, cioè la forza che un tratto di corda esercita su quello contiguo; per la precisione indichiamo con $\mathbf{T}(x,t)$ la forza (vettore) che la parte di corda a destra del punto $(x, u(x,t))$ esercita sulla parte di corda a sinistra di tale punto e con $T(x,t)$ l'intensità della forza, cioè il modulo del vettore $\mathbf{T}(x,t)$. Questa forza è tangenziale alla corda, perché abbiamo supposto che la corda sia perfettamente flessibile. Evidentemente la forza che la parte di corda a sinistra del punto $(x, u(x,t))$ esercita sulla parte di corda a destra è $-\mathbf{T}(x,t)$.

Sia $\alpha(x,t)$ l'ampiezza dell'angolo che il vettore $\mathbf{T}(x,t)$ forma con una retta orizzontale. Visto che $\mathbf{T}(x,t)$ è tangente alla corda, cioè al grafico della funzione $x \mapsto u(x,t)$, si ha



$$\operatorname{tg}\alpha(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t).$$

Abbiamo supposto che la corda non abbia spostamenti orizzontali, quindi dato un qualunque tratto di corda, individuato dalle ascisse x_1 e x_2, le componenti orizzontali delle forze che agiscono su questo tratto di corda debbono bilanciarsi, quindi

$$T(x_2,t)\cos\alpha(x_2,t) - T(x_1,t)\cos\alpha(x_1,t) = 0,$$

perciò $T(x,t)\cos\alpha(x,t)$ è costante lungo la corda.

Inoltre supponiamo che sulla corda agisca una forza verticale la cui intensità per unità di lunghezza è $f(x,t)$. Questa forza può ad esempio essere il peso della corda, se esso non è trascurabile.

La componente verticale della forza che agisce sul tratto di corda compreso tra il punto di ascissa x e il punto di ascissa $x+\delta$ è la somma della forza dovuta alla tensione della corda con la forza f. La componente verticale di $\mathbf{T}(x,t)$ è $T(x,t)\operatorname{sen}\alpha(x,t)$, mentre la componente verticale di $\mathbf{T}(x+\delta,t)$ è $T(x+\delta,t)\operatorname{sen}\alpha(x+\delta,t)$, quindi la componente verticale della forza totale è

$$T(x+\delta,t)\operatorname{sen}\alpha(x+\delta,t) - T(x,t)\operatorname{sen}\alpha(x,t) + \int_x^{x+\delta} f(\xi,t)\,d\xi,$$

che, sfruttando l'uguaglianza $T(x+\delta,t)\cos\alpha(x+\delta,t)=T(x,t)\cos\alpha(x,t)$, è uguale a

$$\frac{T(x,t)\cos\alpha(x,t)}{\cos\alpha(x+\delta,t)}\operatorname{sen}\alpha(x+\delta,t)-T(x,t)\operatorname{sen}\alpha(x,t)+\int_x^{x+\delta}f(\xi,t)d\xi=$$
$$=T(x,t)\cos\alpha(x,t)\big(\operatorname{tg}\alpha(x+\delta,t)-\operatorname{tg}\alpha(x,t)\big)+\int_x^{x+\delta}f(\xi,t)d\xi=$$
$$=T(x,t)\cos\alpha(x,t)\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)+\int_x^{x+\delta}f(\xi,t)d\xi\ .$$

Per il principio fondamentale della dinamica questa quantità è uguale al prodotto della massa per l'accelerazione del tratto di corda, se l'accelerazione è costante; in generale occorre considerare l'integrale del prodotto della densità linerare della corda per l'accelerazione, dove la densità lineare, che indichiamo con $\rho(x)$, è la massa per unità di lunghezza. L'accelerazione di un punto della corda è dato dalla derivata seconda rispetto al tempo della funzione posizione del punto, cioè della funzione u. Perciò la forza è uguale a

$$\int_x^{x+\delta}\rho(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)d\xi$$

Dividendo per δ si ottiene

$$T(x,t)\cos\alpha(x,t)\frac{1}{\delta}\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\delta,t)-\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big)+\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}f(\xi,t)d\xi=$$
$$=\frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta}\rho(\xi)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(\xi,t)d\xi\ .$$

Passando al limite per δ che tende a 0, se f e ρ sono continue, supposta u di class C^2, si ottiene

$$T(x,t)\cos\alpha(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+f(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,.$$

Abbiamo già visto che $T(x,t)\cos\alpha(x,t)$ non dipende da x, inoltre se gli estremi della corda sono fissi, questa quantità è uguale alla tensione della corda a riposo, quindi non varia nel tempo. Infatti abbiamo supposto che la tensione sia proporzionale alla lunghezza, ma la tensione ha la stessa direzione della corda, quindi la componente orizzontale della tensione è proporzionale alla componente orizzontale della lunghezza della corda. La componente orizzontale della lunghezza della corda è sempre L, quindi anche la componente orizzontale della tensione non cambia al variare del tempo.

Indichiamo con τ la componente orizzontale della tensione; come già osservato essa è indidipendente da x e da t, cioè $\tau=T(x,t)\cos\alpha(x,t)$, qualunque siano x e t. L'equazione scritta sopra diventa

$$\tau\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)+f(x,t)=\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)\,,$$

cioè

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\tau}{\rho(x)}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho(x)} f(x,t)\,.$$

Se la corda è omogenea, quindi la densità è costante, posto $c^2 = \tau/\rho$ si ha

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \frac{1}{\rho} f(x,t)\,.$$

Questa equazione è detta equazione delle onde.