Prova scritta di ANALISI MATEMATICA L-D 12/12/08

(Ingegneria delle telecomunicazioni e ingegneria elettronica)

COGNOME E NOME ....

Non posso sostenere la prova orale nel giorno

martedì 16/12 mattina ☐ giovedì 18/12 mattina ☐

pomeriggio ☐ pomeriggio ☐

---

(1) Siano $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0\,, & \text{se } x < 0 \\ 3x^2\,, & \text{se } 0 \le x \le 5 \\ 0\,, & \text{se } x > 5 \end{cases}$$

e g la distribuzione $\delta'' + \chi_{[3,5]}$.
Calcolare la convoluzione $f * g$.

Soluzione: $(f * g)(x) = 6\chi_{[0,5]}(x) - 30\delta(x-5) - 75\delta'(x-5) + (x-3)^3\chi_{[3,5]}(x) +$
$+ \big((x-3)^3 - (x-5)^3\big)\chi_{[5,8]}(x) + \big(125 - (x-5)^3\big)\chi_{[8,10]}(x)$

---

(2) Trovare, col metodo delle serie di potenze, una soluzione dell'equazione differenziale

$$x^2y''(x) + (x^2 - x)y'(x) + (3x-3)y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

Soluzione: $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+5)}{n!}\, x^{n+3}$

---

(3) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) - 2u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = e^{-2x^2+2x} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Soluzione: $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{16t+1}}\, e^{-2t - \frac{2x^2-2x-8t}{16t+1}}$

---

(4) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} 9\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) - 4\dfrac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \lambda u(x,y) = 0 & (x,y) \in \,]0,\pi[\, \times \,]0,4\pi[\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0 & y \in [0,4\pi] \\ u(\pi,y) = 0 & y \in [0,4\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0 & x \in [0,\pi] \\ \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,4\pi) = 0 & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Soluzione: autovalori $9m^2 + 9m + \dfrac{25}{4} + \dfrac{n^2}{16}$ con $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, corrispondenti autofunzioni

$u(x,y) = ce^{2y}\cos\Big(\Big(m + \dfrac{1}{2}\Big)x\Big)\,\Big(8\,\mathrm{sen}\Big(\dfrac{n}{4}y\Big) - n\cos\Big(\dfrac{n}{4}y\Big)\Big)$