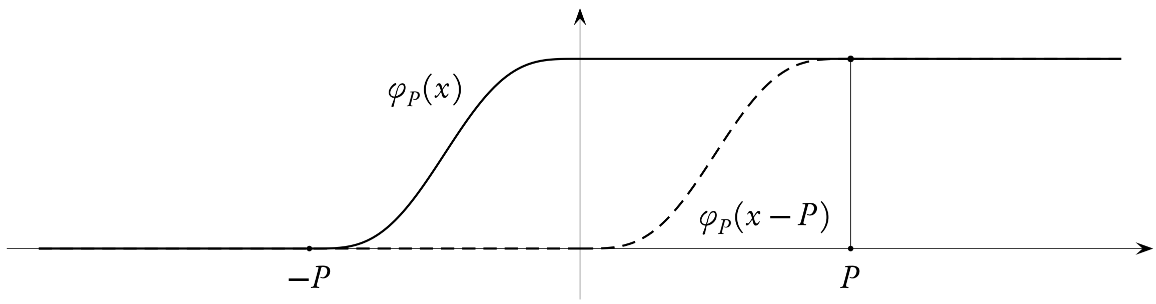
Distribuzioni periodiche

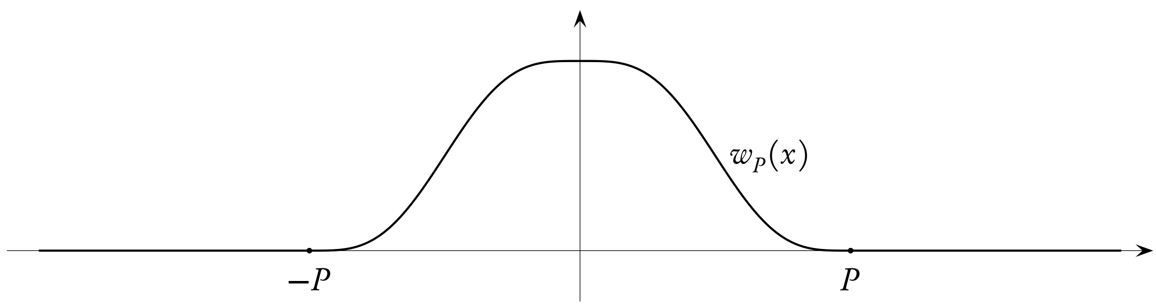
Teorema. *Per ogni* $P \in \mathbb{R}^+$ *esiste* $w_P \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ *tale che* $\operatorname{supp} w_P \subseteq [-P, P]$ *e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_P(x - nP) = 1 \,.$$

Abbiamo supposto che $\operatorname{supp} w_P$ sia compatto, quindi, fissato $x \in \mathbb{R}$, se $|n|$ è grande, allora $x - nP \notin \operatorname{supp} w_P$; perciò nella serie che compare nell'enunciato del teorema solo un numero finito di addendi è non nullo. Quindi per ogni $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

Dimostrazione Sia $\varphi_P \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che $\varphi_P(x) = 0$ se $x \leq -P$ e $\varphi_P(x) = 1$ se $x \geq 0$. Poniamo, per $x \in \mathbb{R}$, $w_P(x) = \varphi_P(x) - \varphi_P(x - P)$.

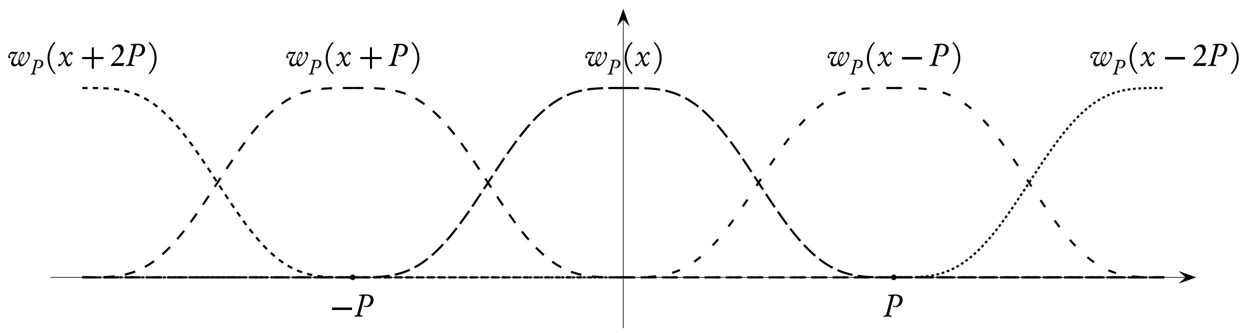




La funzione w_P è differenza di due funzioni C^∞, quindi è C^∞. Inoltre se $x \leq -P$ si ha $w_P(x) = 0 - 0 = 0$, mentre se $x \geq P$ si ha $w_P(x) = 1 - 1 = 0$, quindi $\operatorname{supp} w_P \subseteq [-P, P]$.

Dimostriamo ora che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_P(x - nP) = 1 \,.$$



Sia $N \in \mathbb{N}$; si ha

$$\begin{aligned}\sum_{n=-N}^{N} w_P(x-nP) &= \sum_{n=-N}^{N} \big(\varphi_P(x-nP)-\varphi_P(x-nP-P)\big)\\ &= \sum_{n=-N}^{N} \varphi_P(x-nP)-\sum_{j=-N+1}^{N+1} \varphi_P(x-jP)\\ &= \varphi_P(x+NP)-\varphi_P(x-NP-P)\,.\end{aligned}$$

Se $x \geq -NP$, cioè $x+NP \geq 0$, allora $\varphi_P(x+NP)=1$, mentre se $x \leq NP$, cioè $x-NP-P \leq -P$, allora $\varphi_P(x-NP-P)=0$; perciò

$$\forall x \in [-NP,NP] \quad \sum_{n=-N}^{N} w_P(x-nP)=1\,.$$

e, passando al limite per $N \to \infty$,

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_P(x-nP)=1\,.$$

□

Nel seguito con w_P indicheremo sempre una funzione avente le proprietà enunciate nel teorema precedente.

Poniamo inoltre $w_{P,n}(x)=w_P(x-nP)$, quindi $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{P,n}$ è la funzione che vale costantemente 1 .

Notiamo che $\operatorname{supp} w_{P,n} \subseteq [(n-1)P,(n+1)P]$.

Teorema. *Se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è periodica allora $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$.*

Il teorema va interpretato nel senso che se $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ è periodica allora T può essere prolungata a un funzionale lineare continuo su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Dimostrazione Sia $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R})$ periodica di periodo P , cioè tale che $T(x+P)=T(x)$.

Se $w_{P,n}$ è la funzione definita sopra, allora qualunque sia $v \in \mathscr{D}(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle T,v\rangle = \left\langle T, \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{P,n} v \right\rangle .$$

Nella serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{P,n} v$ solo un numero finito di termini è diverso da 0 . Infatti v ha supporto compatto, mentre $\operatorname{supp} w_{P,n} \subseteq [(n-1)P,(n+1)P]$, quindi se n è grande in valore assoluto allora $\operatorname{supp} w_{P,n}$ è disgiunto da $\operatorname{supp} v$ e la funzione prodotto è identicamente nulla. Perciò

$$\langle T,v\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T, w_{P,n} v\rangle\,.$$

Visto che T è periodica, si ha

$$\begin{aligned}\langle T, v\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T(x), w_P(x-nP)v(x)\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T(y+nP), w_P(y)v(y+nP)\rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle T(y), w_P(y)v(y+nP)\rangle \\ &= \left\langle T(y), w_P(y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(y+nP)\right\rangle .\end{aligned}$$

L'ultimo termine è definito anche se $v \in \mathscr{S}$.

Infatti se $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ allora $\sup_{x\in\mathbb{R}}(1+x^2)|v(x)| < +\infty$, cioè esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad |v(x)| \leq \frac{M}{1+x^2},$$

quindi

$$\forall y \in \mathbb{R} \qquad |v(y+nP)| \leq \frac{M}{1+(y+nP)^2}$$

perciò la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(y+nP)$ converge puntualmente.

Si può dimostrare che la convergenza è uniforme sui compatti, e ciò vale anche per le derivate, quindi la somma è C^∞; perciò la funzione $y \mapsto w_P(y)\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(y-nP)$ appartiene a $\mathscr{D}(\mathbb{R})$.

Si può quindi estendere T a un funzionale su $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ ponendo $\forall v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$

$$\langle T, v\rangle = \left\langle T(x), w_P(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(x+nP)\right\rangle .$$

Si può dimostrare che il funzionale così definito è lineare e continuo. □

Nel seguito utilizzeremo il seguente teorema.

Teorema. *Sia $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$; se $(x-x_0)T(x) = 0$ allora esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $T(x) = c\delta(x-x_0)$.*

Dimostrazione Consideriamo solo il caso $x_0 = 0$, da cui si ottiene facilmente il caso generale.

Poiché $\mathscr{F}(xT(x)) = i\,\widehat{T}'$, se $xT(x) = 0$ allora $\widehat{T}' = 0$, quindi $\widehat{T}$ è una funzione costante; indichiamo con c tale costante. Visto che $\widehat{\delta} = 1$, deve essere $T = c\delta$. □

Teorema. *Sia $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Se T è periodica di periodo P allora*

$$\widehat{T}(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta\left(\omega - \frac{2\pi n}{P}\right)$$

per opportuni $a_n \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione Come già osservato precedentemente, se $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, allora $v = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{P,n} v$ e si può dimostrare che la serie converge nel senso di $\mathscr{S}$, quindi per $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ si ha

$$\langle T, v\rangle = \left\langle T, \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} w_{P,n} v \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \langle T, w_{P,n} v\rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \langle w_{P,n} T, v\rangle \,.$$

Quindi la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{P,n} T$ converge in $\mathscr{S}'$ e la sua somma è T.

Se $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ è periodica di periodo P, allora $T(x+P) = T(x)$ e, passando alla trasformata di Fourier, $e^{i\omega P}\,\widehat{T}(\omega) = \widehat{T}(\omega)$, cioè $\left(e^{i\omega P} - 1\right)\widehat{T}(\omega) = 0$.

Si ha $e^{i\omega P} - 1 = 0$ se e solo se ωP è un multiplo intero di 2π, cioè se $\omega = 2n\pi/P$, con $n \in \mathbb{Z}$. Posto $Q = 2\pi/P$, ciò significa che ω è multiplo di Q.

Per $n \in \mathbb{Z}$, si ha $(\omega - nQ) w_{Q,n}(\omega) = \psi_n(\omega)\left(e^{i\omega P} - 1\right)$, dove

$$\psi_n(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } |\omega - nQ| \geq Q \\ \dfrac{\omega - nQ}{e^{i\omega P} - 1} w_{Q,n}(\omega) & \text{se } 0 < |\omega - nQ| < Q \\ \lim\limits_{\omega\to nQ} \dfrac{\omega - nQ}{e^{i\omega P} - 1} w_{Q,n}(\omega) = \dfrac{Q}{2\pi i} & \text{se } \omega = nQ\,. \end{cases}$$

□

La funzione ψ_n ha supporto compatto e si dimostra facilmente che è di classe C^∞, quindi è definito il prodotto di tale funzione per una distribuzione temperata.

Perciò $\psi_n(\omega)\left(e^{i\omega P} - 1\right)\widehat{T}(\omega) = 0$ e quindi $(\omega - nQ) w_{Q,n}(\omega)\widehat{T}(\omega) = 0$, perciò esiste $a_n \in \mathbb{C}$ tale che $w_{Q,n}(\omega)\widehat{T}(\omega) = a_n \delta(\omega - nQ)$.

Visto che $\widehat{T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_{Q,n} \widehat{T}$, il teorema è dimostrato.

Teorema. *Sia $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$. Se T è periodica di periodo P allora*

$$T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ix2\pi n/P}$$

per opportuni $a_n \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione Visto che $\mathscr{F}\left(e^{ix2\pi n/P}\right)(\omega) = 2\pi\delta\left(\omega - \dfrac{2\pi n}{P}\right)$, questo teorema segue immediatamente dal precedente. □

Da questo teorema e dal precedente segue che ogni $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ periodica, di periodo P è somma (nel senso di $\mathscr{S}'$) di una serie di Fourier, cioè $T(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i2\pi kx/P}$. Inoltre

$$\widehat{T}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{P}\right).$$

C'è quindi un collegamento tra i coefficienti di Fourier di una distribuzione e la sua trasformata di Fourier.

Teorema. *Sia* $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ *periodica, di periodo* P , $T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ix2\pi n/P}$. *Allora*

$$a_n = \frac{1}{P} \langle T(x), w_P(x) e^{-i2\pi nx/P} \rangle \, .$$

Dimostrazione Si ha

$$\begin{aligned} \langle T(x), w_P(x) e^{-i2\pi kx/P} \rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \langle e^{ix2\pi n/P}, w_P(x) e^{-i2\pi kx/P} \rangle \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{R}} w_P(x) e^{i2\pi(n-k)x/P} \, dx \, . \end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} w_P(x) e^{i2\pi(n-k)x/P} \, dx &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{jP-P/2}^{jP+P/2} w_P(x) e^{i2\pi(n-k)x/P} \, dx \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-P/2}^{P/2} w_P(y + jP) e^{i2\pi(n-k)(y+jP)/P} \, dy \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \int_{-P/2}^{P/2} w_{P,-j}(y) e^{i2\pi(n-k)y/P} \, dx \\ &= \int_{-P/2}^{P/2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} w_{P,-j}(y) e^{i2\pi(n-k)y/P} \, dx \\ &= \int_{-P/2}^{P/2} e^{i2\pi(n-k)y/P} \, dx \\ &= \begin{cases} P & \text{se } n = k \\ 0 & \text{se } n \neq k \, . \end{cases} \end{aligned}$$

Perciò

$$\langle T(x), w_P(x) e^{-i2\pi kx/P} \rangle = P a_k \, . \qquad \square$$

Si può dimostrare che la successione degli a_n ha crescita polinomiale, cioè esistono $\ell \in \mathbb{N}$ e $M \in \mathbb{R}^+$ tali che

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad |a_n| \leq M(1 + |n|^\ell) \, .$$

Inoltre si può dimostrare che data una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a crescita polinomiale la serie $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{i2\pi nx/P}$ converge in $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

Consideriamo la distribuzione periodica $T(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nP)$. I suoi coefficienti di Fourier sono

$$\begin{aligned} \langle T(x), w_P(x) e^{-i2\pi jx/P} \rangle &= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x - nP), w_P(x) e^{-i2\pi jx/P} \rangle \\ &= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_P(nP) e^{-i2\pi jn} = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} w_P(nP) = \frac{1}{P} w_P(0) = \frac{1}{P} \, ; \end{aligned}$$

quindi

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nP) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nx/P} .$$

Osserviamo che in questo caso si ha

$$\widehat{T}(\omega) = \frac{2\pi}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi n/P) ,$$

quindi $\widehat{T}$ è periodica di periodo $2\pi/P$.

Per $v \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ e $t \in \mathbb{R}$, dall'uguaglianza

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-nP) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nx/P}$$

segue

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \delta(x-nP), v(t+x) \rangle = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle e^{i2\pi nx/P}, v(t+x) \rangle$$

cioè

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(t+nP) &= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi nx/P} v(t+x)\, dx \\
&= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i2\pi ny/P} e^{-i2\pi nt/P} v(y)\, dy \\
&= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}(-2\pi n/P) e^{-i2\pi nt/P} \\
&= \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}(2\pi n/P) e^{i2\pi nt/P} .
\end{aligned}$$

Abbiamo così ottenuto la formula di somma di Poisson:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} v(t+nP) = \frac{1}{P} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{v}\left(\frac{2\pi n}{P}\right) e^{i2\pi nt/P} .$$

Si può dimostrare che essa vale non solo per $v \in \mathscr{S}$, ma anche se v ha un andamento all'infinito che consente di definire la ripetizione periodica e tale ripetizione periodica è sviluppabile in serie di Fourier.