Esempi di soluzione di equazioni differenziali mediante serie di potenze

Cerchiamo una soluzione dell'equazione differenziale

$$3xy''(x)+y'(x)+y(x)=0 \qquad x\in\mathbb{R}^+$$

nella forma

$$y(x)=x^\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

con $\sigma, a_n \in \mathbb{R}$.

Una serie di potenze generalizzata di questo tipo si può sempre scrivere, cambiando eventualmente σ, in modo che sia $a_0 \neq 0$. Infatti, supponiamo che nella serie scritta sopra sia $a_0=0$; indichiamo con j l'indice del primo coefficiente a_n non nullo, cioè sia j tale che

$$a_0=a_1=\cdots=a_{j-1}=0\,, \qquad a_j\neq 0\,.$$

Allora abbiamo

$$x^\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = x^\sigma\sum_{n=j}^{\infty}a_n x^n = x^\sigma\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+j}x^{m+j} = x^{\sigma+j}\sum_{m=0}^{\infty}a_{m+j}x^m\,,$$

cioè

$$x^\sigma\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n = x^\beta\sum_{n=0}^{\infty}b_n x^n\,,$$

dove $\beta=\sigma+j$ e $b_n=a_{n+j}$, quindi abbiamo $b_0=a_j\neq 0$.

Perciò nel seguito supporremo sempre $a_0\neq 0$.

Derivando ciascun termine della serie, abbiamo

$$y'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\sigma+n)x^{\sigma+n-1}$$

$$y''(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\sigma+n)(\sigma+n-1)x^{\sigma+n-2}$$

e, sostituendo nell'equazione, otteniamo

$$3\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\sigma+n)(\sigma+n-1)x^{\sigma+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\sigma+n)x^{\sigma+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\sigma+n}=0\,,$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(\sigma+n)(3\sigma+3n-2)x^{\sigma+n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{\sigma+n}=0\,.$$

Modifichiamo l'indice di somma nella seconda sommatoria, in modo che l'esponente di x sia lo stesso della prima sommatoria; ciò significa prendere un nuovo indice di somma m tale che $n = m-1$, cioè $m = n+1$. Visto che nella somma è $n \geq 0$, avremo $m \geq 1$ e quindi

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{\sigma+m-1} \,;$$

perciò dovrà essere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sigma+n)(3\sigma+3n-2) x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{\sigma+n-1} = 0 \,,$$

cioè

$$a_0 \sigma (3\sigma-2) x^{\sigma-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \big(a_n (\sigma+n)(3\sigma+3n-2) + a_{n-1} \big) x^{\sigma+n} = 0 \,.$$

L'uguaglianza deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, quindi tutti i coefficienti della serie devono essere nulli, perciò devono essere verificate le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_0 \sigma (3\sigma-2) = 0 \\ a_n (\sigma+n)(3\sigma+3n-2) + a_{n-1} = 0 \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Avendo supposto $a_0 \neq 0$, la prima equazione è verificata se $\sigma(3\sigma-2) = 0$, cioè se $\sigma = 0$ o $\sigma = 2/3$.

Consideriamo il caso $\sigma = 0$.

Possiamo scegliere $a_0 = 1$ (con scelte diverse si ottengono soluzioni multiple di quella così ottenuta). Per $n = 1,2,3,\ldots$ dovrà essere

$$a_n n(3n-2) + a_{n-1} = 0$$

cioè

$$n(3n-2) a_n = -a_{n-1}$$

e quindi, visto che $n(3n-2) \neq 0$,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(3n-2)} \,,$$

da cui, ricordando che $a_0 = 1$, segue

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{1 \cdot 1} \\ a_2 &= -\frac{a_1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4} \\ a_3 &= -\frac{a_2}{3 \cdot 7} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7} \\ &\ldots\ldots \\ a_n &= \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)} = \frac{(-1)^n}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)} \,. \end{aligned}$$

Possiamo concludere che la funzione

$$y(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \cdot 1 \cdot 4 \cdot 7 \ldots (3n-2)} x^n$$

è soluzione dell'equazione.

Visto che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(n+1)!\cdot 1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(3n+1)} = 0$$

si può concludere che la serie di potenze ottenuta ha raggio di convergenza ∞.

Consideriamo il caso $\sigma = 2/3$.

Possiamo scegliere $a_0 = 1$. Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ dovrà essere

$$a_n(n+2/3)(3n+3\cdot 2/3-2)+a_{n-1}=0$$

cioè

$$n(3n+2)a_n = -a_{n-1}$$

e quindi, visto che $n(3n+2)\neq 0$,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(3n+2)}$$

da cui, ricordando che $a_0 = 1$, segue

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{1\cdot 5}\\
a_2 &= -\frac{a_1}{2\cdot 8} = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 5\cdot 8}\\
a_3 &= -\frac{a_2}{3\cdot 11} = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 8\cdot 11}\\
&\ldots\ldots\\
a_n &= \frac{(-1)^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\cdot 5\cdot 8\cdot 11\ldots(3n+2)} = \frac{(-1)^n 2}{n!\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)}.
\end{aligned}$$

Possiamo concludere che la funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{n!\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)}x^{n+2/3}$$

è soluzione dell'equazione.

Visto che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2n!\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+2)}{2(n+1)!\cdot 2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n+5)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)(3n+5)} = 0$$

si può concludere che la serie di potenze ottenuta ha raggio di convergenza ∞.

Cerchiamo una soluzione dell'equazione differenziale

$$xy''(x) - y'(x) + y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

sotto forma di serie di potenze generalizzata.

Procedendo come sopra l'equazione diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)(\sigma+n-1)x^{\sigma+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2)x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0\,.$$

Modificando l'indice di somma nella seconda sommatoria, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m-1} x^{\sigma+m-1}\,;$$

perciò dovrà essere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2)x^{\sigma+n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{\sigma+n-1} = 0\,,$$

cioè

$$a_0\sigma(\sigma-2)x^{\sigma-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2) + a_{n-1}\big)x^{\sigma+n} = 0\,.$$

L'uguaglianza deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, quindi tutti i coefficienti della serie devono essere nulli, perciò devono essere verificate le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_0\sigma(\sigma-2) = 0 \\ a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2) + a_{n-1} = 0 \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Avendo supposto $a_0 \neq 0$, la prima equazione è verificata se $\sigma(\sigma-2) = 0$, cioè se $\sigma = 0$ o $\sigma = 2$.

Consideriamo il caso $\sigma = 0$.

Scegliamo $a_0 = 1$. Per $n = 1,2,3,\ldots$ dovrà essere

$$a_n n(n-2) + a_{n-1} = 0$$

cioè

$$n(n-2)a_n = -a_{n-1}\,.$$

Per $n = 1$ l'equazione diventa

$$-a_1 = -a_0\,,$$

quindi $a_1 = 1$. Per $n = 2$ l'equazione diventa

$$0 = -a_1$$

e questo è impossibile. Quindi non esiste nessuna soluzione con $\sigma = 0$.

Consideriamo il caso $\sigma = 2$.

Scegliamo $a_0 = 1$. Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ dovrà essere

$$a_n(n+2)n + a_{n-1} = 0$$

cioè

$$n(n+2)a_n = -a_{n-1}$$

e quindi, visto che $n(n+2) \neq 0$,

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(n+2)}$$

da cui, ricordando che $a_0 = 1$, segue

$$\begin{aligned}
&a_1 = -\frac{1}{1 \cdot 3} \\
&a_2 = -\frac{a_1}{2 \cdot 4} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \\
&a_3 = -\frac{a_2}{3 \cdot 5} = -\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \\
&\quad \cdots\cdots \\
&a_n = \frac{(-1)^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n+2)} = \frac{(-1)^n 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots (n+2)} = \frac{(-1)^n 2}{n!(n+2)!}.
\end{aligned}$$

Possiamo concludere che la funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2}{n!(n+2)!} x^{n+2}$$

è soluzione dell'equazione.

Visto che

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{2\, n!(n+2)!}{2(n+1)!(n+3)!} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)} = 0$$

si può concludere che la serie di potenze ottenuta ha raggio di convergenza ∞.

Cerchiamo una soluzione dell'equazione differenziale

$$xy''(x) - (1+x)y'(x) + y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

sotto forma di serie di potenze generalizzata.

Procedendo come sopra l'equazione diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)(\sigma+n-1)x^{\sigma+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)x^{\sigma+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)x^{\sigma+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n} = 0$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2)x^{\sigma+n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n-1)x^{\sigma+n} = 0\,.$$

Modificando l'indice di somma nella seconda sommatoria, otteniamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n-1)x^{\sigma+n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}(\sigma+n-2)x^{\sigma+n-1}\,,$$

perciò dovrà essere

$$a_0\sigma(\sigma-2)x^{\sigma-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\big(a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2) - a_{n-1}(\sigma+n-2)\big)x^{\sigma+n-1} = 0\,.$$

L'uguaglianza deve valere per ogni $x \in \mathbb{R}^+$, quindi tutti i coefficienti della serie devono essere nulli, perciò devono essere verificate le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_0\sigma(\sigma-2) = 0 \\ a_n(\sigma+n)(\sigma+n-2) - a_{n-1}(\sigma+n-2) = 0 \quad n = 1,2,3,\ldots \end{cases}$$

Avendo supposto $a_0 \neq 0$, la prima equazione è verificata se $\sigma(\sigma-2) = 0$, cioè se $\sigma = 0$ o $\sigma = 2$.

Consideriamo il caso $\sigma = 2$.

Scegliamo $a_0 = 1$. Per $n = 1,2,3,\ldots$ dovrà essere

$$a_n n(n+2) - a_{n-1}n = 0$$

e quindi, visto che $n(n+2) \neq 0$,

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n+2}$$

da cui, ricordando che $a_0 = 1$, segue

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{3} \\
a_2 &= \frac{a_1}{4} = \frac{1}{3\cdot 4} \\
a_3 &= \frac{a_2}{5} = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} \\
&\ldots\ldots \\
a_n &= \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5\ldots(n+2)} = \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\ldots(n+2)} = \frac{2}{(n+2)!}\,.
\end{aligned}$$

Possiamo concludere che la funzione

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(n+2)!}x^{n+2}$$

è soluzione dell'equazione.

Visto che

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{2(n+2)!}{2(n+3)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+3} = 0$$

si può concludere che la serie di potenze ta ha raggio di convergenza ∞. Inoltre

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(n+2)!}x^{n+2} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2}{n!}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!}x^n - 2 - 2x = 2(e^x - 1 - x)\,.$$

Consideriamo il caso $\sigma = 0$.

Scegliamo $a_0 = 1$. Per $n = 1, 2, 3, \ldots$ dovrà essere

$$a_n n(n-2) - a_{n-1}(n-2) = 0\,;$$

Per $n = 2$ l'equazione è verificata qualunque siano a_1 e a_2, mentre per $n \neq 2$ abbiamo

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n}\,.$$

Perciò

$$a_1 = 1\,,$$

mentre a_2 può essere scelto arbitrariamente. Se scegliamo $a_2 = 0$ anche $a_n = 0$ per $n = 3, 4, \ldots$ e quindi

$$y(x) = 1 + x\,.$$

Scegliendo invece $a_2 = 1$ i coefficienti a_n con $n \geq 2$ coincidono con gli a_{n-2} trovati nel caso $\sigma = 2$, perciò si ottiene una combinazione lineare delle soluzioni già trovate.

Cerchiamo una soluzione dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) - (2 + x^2)y(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}^+$$

sotto forma di serie di potenze generalizzata.

Procedendo come sopra l'equazione diventa

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n)(\sigma+n-1)x^{\sigma+n} - \sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{\sigma+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0$$

cioè

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n+1)(\sigma+n-2)x^{\sigma+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{\sigma+n+2} = 0\,.$$

Modificando l'indice di somma nella seconda sommatoria, in modo che l'esponente di x sia lo stesso della prima sommatoria, si ottiene:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(\sigma+n+1)(\sigma+n-2)x^{\sigma+n} - \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{\sigma+n} = 0\,,$$

cioè

$$\left(a_0\sigma(\sigma-1)-2a_0\right)x^\sigma+\left(a_1(\sigma+1)\sigma-2a_1\right)x^{\sigma+1}+$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n(\sigma+n+1)(\sigma+n-2)-a_{n-2}\right)x^{\sigma+n}=0\,.$$

L'uguaglianza deve valere per ogni $x\in\mathbb{R}^+$, quindi tutti i coefficienti della serie devono essere nulli, perciò devono essere verificate le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} a_0(\sigma+1)(\sigma-2)=0 \\ a_1(\sigma+2)(\sigma-1)=0 \\ a_n(\sigma+n+1)(\sigma+n-2)-a_{n-2}=0 \quad n=2,3,\dots \end{cases}$$

Avendo supposto $a_0\neq 0$, la prima equazione è verificata se $(\sigma+1)(\sigma-2)=0$, cioè se $\sigma=2$ o $\sigma=-1$.

Consideriamo il caso $\sigma=2$.

Possiamo scegliere $a_0=1$. Le equazioni scritte sopra diventano

$$\begin{cases} a_1 4=0 \\ a_n n(n+3)-a_{n-2}=0 \quad n=2,3,\dots \end{cases}$$

quindi $a_1=0$ e per $n=2,3,\dots$, abbiamo

$$n(n+3)a_n=a_{n-2}$$

e quindi, visto che $n(n+3)\neq 0$,

$$a_n=\frac{a_{n-2}}{n(n+3)}$$

da cui, ricordando che $a_0=1$, segue

$$\begin{aligned} a_2&=\frac{1}{2\cdot 5}\\ a_4&=\frac{a_2}{4\cdot 7}=\frac{1}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7}\\ &\cdots\cdots\\ a_{2k}&=\frac{1}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2k\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2k+3)}\\ &=\frac{3(2k+2)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2k\cdot(2k+2)\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2k+3)}=\frac{3(2k+2)}{(2k+3)!} \end{aligned}$$

mentre da $a_1=0$ segue che tutti i coefficienti di indice dispari si annullano, cioè per ogni k si ha $a_{2k+1}=0$.

Possiamo concludere che la funzione

$$y(x)=x^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3(2k+2)}{(2k+3)!}x^{2k}$$

è soluzione dell'equazione.

Visto che

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{2k+2}}{a_{2k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3(2k+4)(2k+3)!}{3(2k+2)(2k+5)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+2)(2k+5)} = 0$$

si può concludere che la serie di potenze ottenuta ha raggio di convergenza ∞.

Ricaviamo una espressione esplicita (cioè senza sommatorie) di y. Ricordando che una serie di potenze può essere derivata membro a membro nell'intervallo di convergenza, se $x \neq 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
y(x) &= x^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3(2k+2)}{(2k+3)!} x^{2k} \\
&= 3x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2k+2}{(2k+3)!} x^{2k+1} \\
&= 3x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)!} x^{2k+2} \\
&= 3x \frac{d}{dx} \Big(\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+3)!} x^{2k+3} \Big) \\
&= 3x \frac{d}{dx} \Big(\frac{1}{x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} \Big) \\
&= 3x \frac{d}{dx} \Big(\frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} - 1 \Big) \\
&= 3x \frac{d}{dx} \Big(\frac{\sinh x}{x} - 1 \Big) \\
&= 3x \frac{x \cosh x - \sinh x}{x^2} \\
&= \frac{3x \cosh x - 3 \sinh x}{x} .
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso $\sigma = -1$. Scegliamo anche in questo caso $a_0 = 1$. Le equazioni scritte sopra diventano

$$\begin{cases} -2a_1 = 0 \\ a_n n(n-3) - a_{n-2} = 0 \quad n = 2, 3, \ldots \end{cases}$$

quindi $a_1 = 0$ e per $n = 2, 3, \ldots$, abbiamo

$$n(n-3)a_n = a_{n-2} ,$$

da cui, se $n \neq 3$, si ricava

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{n(n-3)} .$$

Perciò, avendo scelto $a_0 = 1$, abbiamo

$$\begin{aligned}
a_2 &= \frac{1}{2\cdot(-1)} \\
a_4 &= \frac{a_2}{4\cdot 1} = \frac{1}{2\cdot 4\cdot(-1)\cdot 1} \\
&\cdots\cdots \\
a_{2k} &= \frac{1}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2k\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)} \\
&= \frac{-(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2k\cdot 1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2k-3)\cdot(2k-1)} = -\frac{2k-1}{(2k)!}\,.
\end{aligned}$$

Per $n = 3$ l'equazione diventa $0\cdot a_3 - a_1 = 0$ che è verificata qualunque sia a_3, visto che $a_1 = 0$. Inoltre abbiamo

$$\begin{aligned}
a_5 &= \frac{a_3}{5\cdot 2} \\
a_7 &= \frac{a_5}{7\cdot 4} = \frac{a_3}{5\cdot 7\cdot 2\cdot 4} \\
&\cdots\cdots \\
a_{2k+1} &= \frac{a_3}{5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)\cdot 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k-2)} \\
&= \frac{6k a_3}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2k+1)\cdot 2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2k-2)\cdot 2k} = \frac{6k}{(2k+1)!}a_3\,.
\end{aligned}$$

Otteniamo così la soluzione

$$y(x) = x^{-1}\Big(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(2k-1)}{(2k)!}x^{2k} + a_3\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k}{(2k+1)!}x^{2k+1}\Big)\,,$$

ma

$$x^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{6k}{(2k+1)!}x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{6k+6}{(2k+3)!}x^{2k+2}$$

e quindi la funzione che moltiplica a_3 è quella già trovata nel caso $\sigma = 2$; possiamo porre $a_3 = 0$ senza perdere soluzioni.

Abbiamo così trovato la soluzione

$$y(x) = x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{-(2k-1)}{(2k)!}x^{2k}\,.$$

Anche in questo caso si verifica facilmente che la serie di potenze ottenuta ha raggio di convergenza ∞.

Determiniamo ora la somma della serie di potenze.

$$\begin{aligned}
y(x) &= -x^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k)!}x^{2k} \\
&= x^{-1} - x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{(2k)!}x^{2k-2} \\
&= x^{-1} - x\,\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k-1} \\
&= x^{-1} - x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}x^{2k}\Big) \\
&= x^{-1} - x\,\frac{d}{dx}\Big(\frac{\cosh x - 1}{x}\Big) \\
&= x^{-1} - x\,\frac{x\sinh x - \cosh x + 1}{x^2} \\
&= \frac{\cosh x - x\sinh x}{x}\,.
\end{aligned}$$

Abbiamo così trovato le seguenti due soluzioni dell'equazione differenziale (trascurando il fattore 3 che è ininfluente):

$$\cosh x - \frac{\sinh x}{x} \qquad \frac{\cosh x}{x} - \sinh x\,.$$

Esse sono linearmente indipendenti, perché per x che tende a 0 la prima ha limite finito, mentre la seconda è divergente; perciò le due soluzioni costituiscono un sistema fondamentale di soluzioni per l'equazione

$$x^2y''(x) - (2+x^2)y(x) = 0 \qquad x\in\mathbb{R}^+\,.$$

È facile trovare un diverso sistema fondamentale di soluzioni, in cui non compaiono funzioni iperboliche. Sommando le due soluzioni si ottiene:

$$\cosh x - \sinh x + \frac{\cosh x - \sinh x}{x} = \Big(\frac{e^x+e^{-x}}{2} - \frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big)\Big(1+\frac{1}{x}\Big) = e^{-x}\Big(1+\frac{1}{x}\Big)\,,$$

mentre sottraendo membro a membro si ottiene

$$\cosh x + \sinh x - \frac{\cosh x + \sinh x}{x} = \Big(\frac{e^x+e^{-x}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\Big)\Big(1-\frac{1}{x}\Big) = e^{x}\Big(1-\frac{1}{x}\Big)\,.$$

Queste due funzioni sono soluzioni dell'equazione differenziale, perché combinazione lineare di soluzioni; inoltre si verifica facilmente che sono linearmente indipendenti.