

Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna
Corsi di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni
e in Ingegneria Elettronica
Anno Accademico 2009/2010
Corso di Analisi Matematica L-D
Docente prof. G. Dore

Esercizi

(1) Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -3, \\ 3 - |x| & \text{se } -3 \leq x \leq 3, \\ 0 & \text{se } x > 3, \end{cases}$$

e g la distribuzione $\delta'' + 2\delta'$. Calcolare la convoluzione $f * g$.

(2) Siano $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 2 \\ x - 2, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$$

e g la distribuzione $\delta''(x) + \delta(x - 4)$. Calcolare la convoluzione $f * g$.

(3) Siano $f = \delta' + \chi_{[-1,1]}$ e $g = \delta' + \chi_{[0,+\infty[}$.
Calcolare la convoluzione $f * g$.

(4) Trovare la funzione di Green del problema

$$\begin{cases} -x^4 y''(x) - 4x^3 y'(x) - 2x^2 y(x) = f(x) & x \in]1, 2[\\ y'(1) = 0 \\ y(2) = 0 \end{cases}$$

sapendo che l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è $c_1 x^{-1} + c_2 x^{-2}$.

(5) Risolvere, mediante la funzione di Green, il seguente problema

$$\begin{cases} y''(x) + 9y(x) = x & x \in]0, 2\pi[\\ y'(0) = 0 \\ y(2\pi) = 0 \end{cases}$$

(6) Risolvere, mediante la funzione di Green, il seguente problema

$$\begin{cases} y''(x) - 9y(x) = x + 1 & x \in]0, 2[\\ y(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases}$$

(7) Trovare, col metodo delle serie di potenze, una soluzione non nulla dell'equazione differenziale

$$x^2 y''(x) + (3x - 6)y(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^+$$

(8) Trovare, col metodo delle serie di potenze, una soluzione illimitata per x che tende a 0 dell'equazione differenziale

$$2xy''(x) + 5y'(x) + 4x^2 y(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^+$$

(9) Trovare, col metodo delle serie di potenze, due soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale

$$(4x^2 + 12x)y''(x) + (4x + 6)y'(x) - y(x) = 0 \quad x \in \mathbb{R}^+$$

(10) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + u(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = e^{-x^2} & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(11) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - u(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \chi_{[-5, 5]}(x) \end{cases}$$

(12) Facendo uso della trasformata di Fourier, risolvere il seguente problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = 3 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - u(x, t) & (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \\ u(x, 0) = \chi_{[0,1]}(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(13) Risolvere il seguente problema di valori al contorno

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \pi[\\ u(0, y) = 0 & y \in [0, \pi] \\ u(\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \\ u(x, 0) = x(\pi - x) & x \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial y} u(x, \pi) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(14) Risolvere il seguente problema di valori al contorno

$$\begin{cases} 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 9 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 & (x, y) \in]0, \pi[\times]0, 1[\\ u(0, y) = 0 & y \in [0, 1] \\ u(\pi, y) = 0 & y \in [0, 1] \\ u(x, 0) = \frac{\pi}{2} - \left| x - \frac{\pi}{2} \right| & x \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial y} u(x, 1) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(15) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 4 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \lambda u(x, y) = 0 & (x, y) \in]0, \pi[\times]0, 2\pi[\\ u(0, y) = 0 & y \in [0, 2\pi] \\ u(\pi, y) = 0 & y \in [0, 2\pi] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial y} u(x, 2\pi) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(16) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \lambda u(x, y) = 0 & (x, y) \in]-\pi, \pi[\times]0, \frac{\pi}{3}[\\ u(-\pi, y) = 0 & y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ u(\pi, y) = 0 & y \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \\ u(x, 0) = 0 & x \in [-\pi, \pi] \\ u\left(x, \frac{\pi}{3}\right) = 0 & x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

(17) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \lambda u(x, y) = 0 & (x, y) \in]0, \pi[\times]0, \frac{\pi}{2}[\\ u(0, y) = 0 & y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u(\pi, y) = 0 & y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ u(x, 0) = 0 & x \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial y}\left(x, \frac{\pi}{2}\right) = 0 & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

(18) Trovare autovalori e autofunzioni del problema

$$\begin{cases} 9\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + 16\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) + \lambda u(x, y) = 0 & (x, y) \in]-\pi, \pi[\times]0, \pi[\\ \frac{\partial u}{\partial x}(-\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) = 0 & y \in [0, \pi] \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0 & x \in [-\pi, \pi] \\ u(x, \pi) = 0 & x \in [-\pi, \pi] \end{cases}$$

Soluzioni

$$(1) \quad (f * g)(x) = \delta(x + 3) - 2\delta(x) + \delta(x - 3) + 2\chi_{]-3,0[}(x) - 2\chi_{]0,3[}(x)$$

$$(2) \quad (f * g)(x) = \delta(x - 2) + f(x - 4)$$

$$(3) \quad (f * g)(x) = \delta''(x) + \delta'(x + 1) - \delta'(x - 1) + \delta'(x) + \varphi(x) \text{ con } \varphi \text{ tale che}$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < -1 \\ 1 + x & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ 2 & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$(4) \quad G(x, \xi) = \begin{cases} -\frac{1}{3}(2x^{-1} - x^{-2})(\xi^{-1} - 2\xi^{-2}) & 1 \leq x \leq \xi \leq 2 \\ -\frac{1}{3}(x^{-1} - 2x^{-2})(2\xi^{-1} - \xi^{-2}) & 1 \leq \xi \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$(5) \quad y(x) = -\frac{1}{27} \operatorname{sen}(3x) - \frac{2}{9} \pi \cos(3x) + \frac{1}{9} x$$

$$(6) \quad y(x) = \frac{3 \cosh(6 - 3x) + \operatorname{senh}(3x)}{27 \cosh 6} - \frac{x + 1}{9}$$

$$(7) \quad y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k!(k+5)!} x^{k+3}$$

$$(8) \quad y(x) = x^{-3/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-4)^n x^{3n-3/2}}{9^n n! (2n-1)!!}$$

$$(9) \quad y(x) = x^{1/2}, \quad y(x) = 1 + \frac{1}{6} x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{6^n n!} x^n$$

$$(10) \quad u(x, t) = \frac{e^t}{\sqrt{1+8t}} e^{-\frac{\xi^2}{1+8t}}$$

$$(11) \quad u(x, t) = \frac{e^{-t}}{2\sqrt{\pi t}} \int_{x-5}^{x+5} e^{-\frac{\xi^2}{4t}} d\xi$$

$$(12) \quad u(x, t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{12\pi t}} \int_{x-1}^x e^{-\frac{y^2}{12t}} dy$$

$$(13) \quad u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8 \operatorname{sen}((2k+1)x) \cosh\left(\frac{2k+1}{2}(\pi - y)\right)}{\pi(2k+1)^3 \cosh\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right)}$$

$$(14) \quad u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4(-1)^k \operatorname{sen}((2k+1)x) \cosh\left(\frac{2}{3}(2k+1)(1-y)\right)}{\pi(2k+1)^2 \cosh\left(\frac{2}{3}(2k+1)\right)}$$

(15) Autovalori $\lambda = m^2 + n^2$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N}$, autofunzioni $u(x, y) = c \operatorname{sen}(mx) \cos\left(\frac{n}{2}y\right)$

(16) Autovalori $\lambda = 1 + \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 9n^2$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, autofunzioni $u(x, y) = ce^{-x} \operatorname{sen}\left(\frac{m}{2}x\right) \operatorname{sen}(3ny)$ per m pari, $u(x, y) = ce^{-x} \cos\left(\frac{m}{2}x\right) \operatorname{sen}(3ny)$ per m dispari.

(17) Autovalori $\lambda = m^2 + n^2 + 1$ con $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ dispari, autofunzioni $u(x, y) = ce^x \operatorname{sen}(mx) \operatorname{sen}(ny)$

(18) Autovalori $\lambda = 9\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 16\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2$ con $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, autofunzioni $u(x, y) = c \cos\left(\frac{m}{2}x\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}y\right)$ per m pari, $u(x, y) = c \operatorname{sen}\left(\frac{m}{2}x\right) \cos\left(\frac{2n+1}{2}y\right)$ per m dispari.