Corso di Analisi Matematica T-A
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2019/20

Esercizi

A) Determinare il dominio naturale delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \sqrt{2x^2 - 1} - \sqrt{x+1}$

2. $f(x) = \log \dfrac{x}{x^2 - 1}$

3. $f(x) = \sqrt{\sqrt{1-x} - x - 4}$

4. $f(x) = \arcsin |x^2 + 4x + 3|$

5. $f(x) = \log \dfrac{1 - x^2}{x^2 - 3x}$

6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x}{x^2 - 9}}$

7. $f(x) = e^{1/x} \sqrt{|x+5| - 1}$

8. $f(x) = \sqrt{\log 6 - \log(-x^2 + 3x + 10)}$

9. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}\ \arcsin \dfrac{1}{4x + 8}$

10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x+2| - 3}}{1 + \sqrt{x^2 - 9}}$

11. $f(x) = \log\big(3x + 8 - \sqrt{x^2 - 4}\,\big)$

12. $f(x) = \arcsin\big(\sqrt{3x^2 + 2x}\,\big)$

B) Determinare gli intervalli di crescenza e di decrescenza delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

2. $f(x) = \sqrt{x+1} - x$

3. $f(x) = \dfrac{\exp\big(\sqrt{-x+5}\,\big)}{x - 2}$

4. $f(x) = \dfrac{1}{1 - \log x}$

5. $f(x) = \exp\big(-x^2 + 4|x - 1|\big)$

6. $f(x) = e^x \dfrac{x}{x - 2}$

7. $f(x) = \dfrac{x + 7}{\sqrt{x^2 + 11} - 4}$

8. $f(x) = \dfrac{|x+3| + 2}{x^2 - 9}$

9. $f(x) = (-x + 2)\sqrt{|x^2 - 9|}$

10. $f(x) = \big|8x^2 + 2x - 1\big| \exp(-4x^2 + 2x)$

C) Determinare i punti di massimo e di minimo locale delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{\sqrt{|x^2 - 1|}}{x^2 - 4}$

2. $f(x) = 2x - \arcsin x$

3. $f(x) = x\sqrt{|\log x|}$

4. $f(x) = (x - 4)\sqrt{2x^2 - 8x + 4} + 10x$

5. $f(x) = \big|x^2 + 3x\big|\, e^{-2x}$

6. $f(x) = \dfrac{e^{x^2/2}}{2|x+1| + 1}$

D) Determinare il dominio naturale, gli intervalli di crescenza e decrescenza e i punti di massimo e di minimo locale delle seguenti funzioni:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{|x^2 - 4|}}$

2. $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 2x} - 3|x|$

3. $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x}}\right)$

4. $f(x) = (1 - 4x^2)e^{|x^2-2|}$

E) Studiare, nel loro dominio naturale, le seguenti funzioni e tracciarne un grafico approssimativo:

1. $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{\sqrt{|x^2 - 4|}}$

2. $f(x) = 2\sqrt{x^2 - 2x} - 3|x|$

3. $f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x}}$

4. $f(x) = (1 - 4x^2)e^{|x^2-2|}$

Soluzioni

A)

1. $\left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right[$

2. $]-1, 0[\, \cup \,]1, +\infty[$

3. $\left]-\infty, \frac{-9+\sqrt{21}}{2}\right]$

4. $\left[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right]$

5. $]-1, 0[\, \cup \,]1, 3[$

6. $]-\infty, -3[\, \cup [-2, 0] \cup \,]3, +\infty[$

7. $]-\infty, -6] \cup [-4, 0[\, \cup \,]0, +\infty[$

8. $]-2, -1] \cup [4, 5[$

9. $\left]-\infty, -\frac{9}{4}\right] \cup [2, +\infty[$

10. $]-\infty, -5] \cup [3, +\infty[$

11. $\left]\frac{-6+\sqrt{2}}{2}, -2\right] \cup [2, +\infty[$

12. $\left[-1, -\frac{2}{3}\right] \cup \left[0, \frac{1}{3}\right]$

B)

1. f è crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[0, +\infty[$, è decrescente in $[-2, -1[$ e in $]-1, 0]$

2. f è crescente in $\left[-1, -\frac{3}{4}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{3}{4}, +\infty\right[$

3. f è crescente in $]-\infty, -4]$, è decrescente in $[-4, 2[$ e in $]2, 5[$

4. f è crescente in $]0, e[$ e in $]e, +\infty[$

5. f è crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[1, 2]$, è decrescente in $[-2, 1]$ e in $[2, +\infty[$

6. f è crescente in $\left]-\infty, 1-\sqrt{3}\right]$ e in $\left[1+\sqrt{3}, +\infty\right[$, è decrescente in $\left[1-\sqrt{3}, 2\right[$ e in $\left]2, 1+\sqrt{3}\right]$

7. f è crescente in $\left]-\infty, -\sqrt{5}\right[$ e in $\left]-\sqrt{5}, -\frac{1}{3}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{1}{3}, \sqrt{5}\right[$ e in $\left]\sqrt{5}, +\infty\right[$

8. f è crescente in $]-\infty, -3[$ e in $]-3, -1]$, è decrescente in $[-1, 3[$ e in $]3, +\infty[$

9. f è crescente in $\left[-3, \frac{1-\sqrt{19}}{2}\right]$ e in $\left[\frac{1+\sqrt{19}}{2}, 3\right]$, è decrescente in $]-\infty, -3]$, in $\left[\frac{1-\sqrt{19}}{2}, \frac{1+\sqrt{19}}{2}\right]$, in $[3, +\infty[$

10. f è crescente in $\left]-\infty, -\frac{\sqrt{7}}{4}\right]$, in $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$, in $\left[\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{7}}{4}\right]$, è decrescente in $\left[-\frac{\sqrt{7}}{4}, -\frac{1}{2}\right]$, in $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, in $\left[\frac{\sqrt{7}}{4}, +\infty\right[$

C)

1. -1 e 1 sono punti di massimo locale per f, 0 è punto di minimo locale

2. -1 e $\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono punti di massimo locale per f, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ e 1 sono punti di minimo locale

3. $e^{-\frac{1}{2}}$ è punto di massimo locale per f, 1 è punto di minimo locale

4. $2-\sqrt{2}$ e $2+\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f, $\frac{10-\sqrt{10}}{2}$ è punto di minimo locale

5. $\frac{-2-\sqrt{10}}{2}$ e $\frac{-2+\sqrt{10}}{2}$ sono punti di massimo locale per f, -3 e 0 sono punti di minimo locale

6. -1 è punto di massimo locale per f, $\frac{-1-\sqrt{17}}{4}$ e $\frac{1}{2}$ sono punti di minimo locale

D)

1. $\operatorname{dom} f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$; f è crescente in $\left[-\sqrt{7}, -2\right[$, in $[0, 2[$ e in $\left[\sqrt{7}, +\infty\right[$, è decrescente in $\left]-\infty, -\sqrt{7}\right]$, in $]-2, 0]$ e in $\left]2, \sqrt{7}\right]$; $-\sqrt{7}$, 0 e $\sqrt{7}$ sono punti di minimo locale

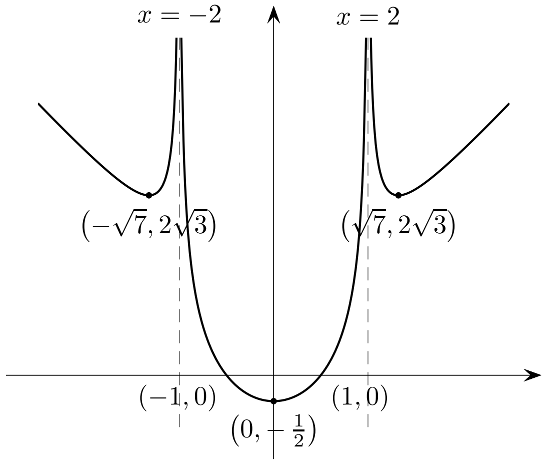
2. $\operatorname{dom} f =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$; f è crescente in $\left]-\infty, \frac{5-3\sqrt{5}}{5}\right]$ e in $\left[2, \frac{5+3\sqrt{5}}{5}\right]$, è decrescente in $\left[\frac{5-3\sqrt{5}}{5}, 0\right]$ e in $\left[\frac{5+3\sqrt{5}}{5}, +\infty\right[$; $\frac{5-3\sqrt{5}}{5}$ e $\frac{5+3\sqrt{5}}{5}$ sono punti di massimo locale, 0 e 2 sono punti di minimo locale

3. $\operatorname{dom} f = [-4, -1] \cup]0, +\infty[$; f è crescente in $[-4, -2]$ e in $[2, +\infty[$, è decrescente in $[-2, -1]$ e in $]0, 2]$; -2 è punto di massimo locale, -4, -1 e 2 sono punti di minimo locale

4. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$; f è crescente in $\left]-\infty, -\sqrt{2}\right]$, in $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}, 0\right]$ e in $\left[\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{2}\right]$, è decrescente in $\left[-\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, in $\left[0, \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$ e in $\left[\sqrt{2}, +\infty\right[$; $-\sqrt{2}$, 0 e $\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$ e $\frac{\sqrt{5}}{2}$ sono punti di minimo locale

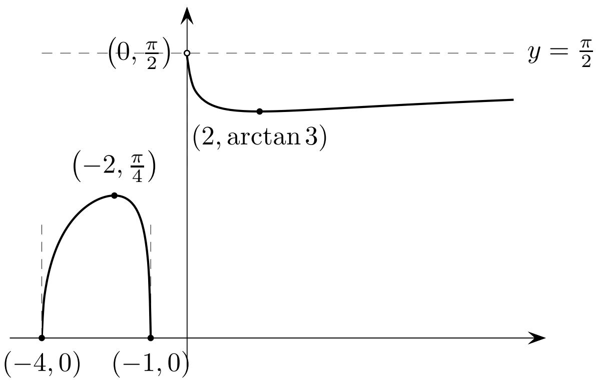
E)

1.



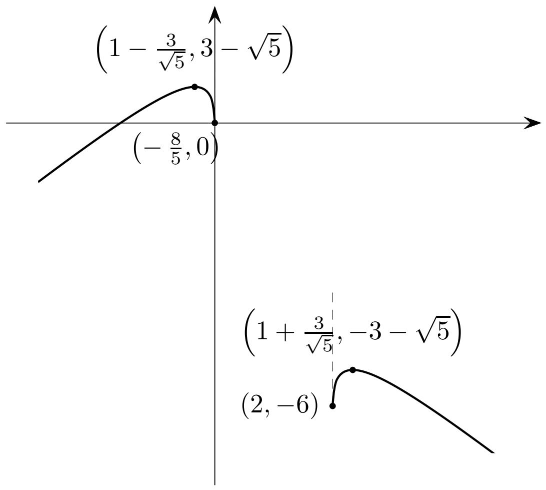
$x=-2$
$x=2$
$(-\sqrt{7}, 2\sqrt{3})$
$(\sqrt{7}, 2\sqrt{3})$
$(-1,0)$
$(1,0)$
$(0,-\frac{1}{2})$

3.



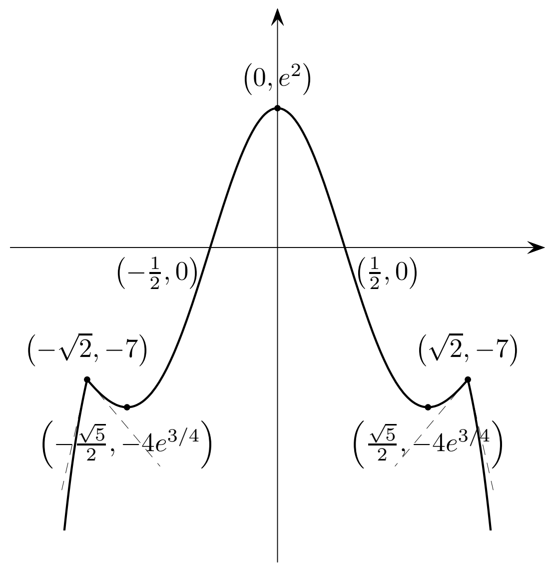
$(0,\frac{\pi}{2})$
$y=\frac{\pi}{2}$
$(2, \arctan 3)$
$(-2,\frac{\pi}{4})$
$(-4,0)$
$(-1,0)$

2.



$\left(1-\frac{3}{\sqrt{5}}, 3-\sqrt{5}\right)$
$(-\frac{8}{5},0)$
$\left(1+\frac{3}{\sqrt{5}}, -3-\sqrt{5}\right)$
$(2,-6)$

4.



$(0,e^2)$
$(-\frac{1}{2},0)$
$(\frac{1}{2},0)$
$(-\sqrt{2},-7)$
$(\sqrt{2},-7)$
$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}, -4e^{3/4}\right)$
$\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, -4e^{3/4}\right)$