Corso di Analisi Matematica T-A
Docente prof. G. Dore
Corso di Laurea in Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2019/2020

Esercizi

---

(1) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sin\bigl(3e^{x^2-2}\bigr)\,.$$

Allora $f'(2)$ è uguale a:

- a $\cos\bigl(3e^2\bigr)$
- b $\cos\bigl(12e^2\bigr)$
- c $12e^2\cos\bigl(3e^2\bigr)$
- d $12e^2\cos(2)$
- e $3e^2\cos\bigl(3e^2\bigr)$

---

(2) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \bigl(\sin(5x)\bigr)^{\sin(7x)}\,.$$

Allora $f'\left(\frac{3}{7}\pi\right)$ è uguale a:

- a $-7\log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right)$
- b $7\log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right)$
- c $7\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right)$
- d $-7\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right)$
- e $-\dfrac{7}{\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)}\log\left(\sin\left(\frac{15}{7}\pi\right)\right)$

(3) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (x+1)\sqrt{|x+2|}\,.$$

Per $x \neq -2$, $f''(x)$ è uguale a:

a $\dfrac{3x+7}{4|x+2|^{3/2}}$

b $\dfrac{(3x+7)\,\mathrm{sgn}(x+2)}{4|x+2|^{3/2}}$

c $\dfrac{2x+4+(x+3)\,\mathrm{sgn}(x+2)}{4|x+2|^{3/2}}$

d $\dfrac{-1}{4|x+2|^{3/2}}$

e $\dfrac{\mathrm{sgn}(x+2)}{4|x+2|^{3/2}}$

---

(4) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \left(4+x^2\right)^{\log(5x)}\,.$$

Allora $f'(1)$ è uguale a:

a $5^{\log 5}\,\dfrac{7}{5}\,\log 5$

b $5^{\log 5 - 1}\log 5$

c $5^{\log 5 - 1}$

d $5^{\log 5}\,\dfrac{3}{5}\,\log 5$

e $5^{\log 5}\,\dfrac{2}{5}$

(5) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \exp(x^2 + 6x) \log \left|-2x^2 + 1\right| \,.$$

Allora $f'(-3)$ è uguale a:

[a] $\dfrac{12}{17}\, e^{-9}$

[b] $-\dfrac{12}{17}\, e^{-9}$

[c] $\left(\log 17 + \dfrac{12}{17}\right) e^{-9}$

[d] $\left(\log 17 - \dfrac{12}{17}\right) e^{-9}$

[e] 0

---

(6) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x \exp\left(\sqrt{x^2 - 3} - 2\right) .$$

Allora $f'\left(\sqrt{7}\right)$ è uguale a:

[a] $\sqrt{7}$

[b] $\dfrac{9}{2}$

[c] $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

[d] $\dfrac{9}{2}\, e^{-2}$

[e] $\dfrac{\sqrt{7}}{2}\, e^{-2}$

---

(7) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = (2 + \arctan x)^x .$$

Allora $f'(0)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ 0

$\boxed{\text{b}}$ 1

$\boxed{\text{c}}$ $2 \log 2$

$\boxed{\text{d}}$ $\log 2$

$\boxed{\text{e}}$ $2 + \log 2$

---

(8) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \cos(2\pi x) \sin \frac{6\pi}{x} .$$

Allora $f'(2)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ -6π

$\boxed{\text{b}}$ 6π

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{3}{2}\pi$

$\boxed{\text{d}}$ $-\frac{3}{2}\pi$

$\boxed{\text{e}}$ 0

(9) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin \frac{x-3}{x-5}\,.$$

Allora $f'(0)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $-\dfrac{1}{10}$

$\boxed{\text{b}}$ $\dfrac{1}{10}$

$\boxed{\text{c}}$ $\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}}$

$\boxed{\text{d}}$ $-\dfrac{2}{25}$

$\boxed{\text{e}}$ $\dfrac{2}{25}$

---

(10) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = x^{\sin x}\,.$$

Allora $f'(\pi)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ 0

$\boxed{\text{b}}$ π

$\boxed{\text{c}}$ $\dfrac{1}{\pi}$

$\boxed{\text{d}}$ $\pi \log \pi$

$\boxed{\text{e}}$ $-\log \pi$

---

(11) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(0) = -2$, $f'(0) = -5$. Se

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \exp\big(3|f(x)|\big),$$

allora $g'(0)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $15\, e^6$

$\boxed{\text{b}}$ $-15\, e^6$

$\boxed{\text{c}}$ e^6

$\boxed{\text{d}}$ e^{15}

$\boxed{\text{e}}$ e^{-15}

---

(12) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(1) = 6$, $f(2) = -1$, $f'(1) = 1/6$, e $f'(2) = 3$. Se

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \big(f(x^6 + 1)\big)^2,$$

allora $g'(1)$ è uguale a

$\boxed{\text{a}}$ 12

$\boxed{\text{b}}$ -36

$\boxed{\text{c}}$ 36

$\boxed{\text{d}}$ -2

$\boxed{\text{e}}$ -12

(13) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(\pi/4) = 1$, $f'(\pi/4) = 0$, $f(1) = 0$, $f'(1) = 1$. Se

$$g\colon \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \arctan\bigl(8\, f(\tan x)\bigr),$$

allora $g'(\pi/4)$ è uguale a

- a 0
- b 4
- c 8
- d 16
- e 32

---

(14) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(2) = 3$, $f'(2) = 1$, $f(4) = 5$ e $f'(4) = -1$. Se

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \frac{x^2}{f(x^2)},$$

allora $g'(2)$ è uguale a:

- a $-\dfrac{4}{9}$
- b $\dfrac{8}{9}$
- c $\dfrac{4}{25}$
- d $\dfrac{24}{25}$
- e $\dfrac{36}{25}$

(15) Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e tale che $f(1) = \pi/2$, $f'(1) = 5$, $f(2) = \pi$ e $f'(2) = 4$. Se

$$g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sin\big(f(2x)\big),$$

allora $g'(1)$ è uguale a:

[a] 0

[b] 4

[c] -4

[d] -1

[e] -8

---

(16) Sia $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f'(1) = 6$, e $f'(\log 3) = 3$. Se

$$g \colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = f\left(\log \frac{6x}{x+1}\right),$$

allora $g'(1)$ è uguale a:

[a] $\frac{3}{2}$

[b] 3

[c] 6

[d] 9

[e] 18

(17) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(0) = -4$, $f'(0) = 2$. Se

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = 2|f(x)| + \big(f(x)\big)^2,$$

allora $g'(0)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ -8

$\boxed{\text{b}}$ -10

$\boxed{\text{c}}$ -12

$\boxed{\text{d}}$ -16

$\boxed{\text{e}}$ -20

---

(18) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(0) = -\dfrac{1}{2}$ e $f'(0) = 5$. Se

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \big|\log|f(x)|\big|,$$

allora $g'(0)$ è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ 10

$\boxed{\text{b}}$ -10

$\boxed{\text{c}}$ 2

$\boxed{\text{d}}$ -2

$\boxed{\text{e}}$ 5

(19) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(0) = 1$, $f(1) = 3$, $f'(0) = 4$ e $f'(1) = 2$. Se

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \big(f(e^{3x})\big)^2,$$

allora $g'(0)$ è uguale a:

a) 8

b) 12

c) 18

d) 24

e) 36

---

(20) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e tale che $f(0) = -5$, $f'(0) = -8$. Se

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(x) = \sqrt{1 + |f(x)|}.$$

allora $g'(0)$ è uguale a:

a) $-\dfrac{4}{\sqrt{6}}$

b) $\dfrac{4}{\sqrt{6}}$

c) 0

d) $-\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

e) $\dfrac{5}{2\sqrt{6}}$

(21)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+2x^4} - \cos(5x^2)}{x^4}$$

è uguale a:

a 26

b $\dfrac{7}{2}$

c $\dfrac{25}{2}$

d $\dfrac{27}{2}$

e 27

---

(22) Per quale valore del numero reale a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp\left(\sqrt{x^2+x^4}\,\right) - 1}{x^a}$$

esiste reale e diverso da 0?

a 0

b 1

c 2

d 3

e 4

(23)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^4+4x^3}-x^2}{x\,e^{1/x}}$$

è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ 0

$\boxed{\text{b}}$ 2

$\boxed{\text{c}}$ $+\infty$

$\boxed{\text{d}}$ $-\infty$

$\boxed{\text{e}}$ 4

---

(24) Per quale valore del numero reale α il seguente limite esiste ed è reale e diverso da 0:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+2x^3)\sin(x^2+x^3)}{x^\alpha}\,?$$

$\boxed{\text{a}}$ 0

$\boxed{\text{b}}$ 5

$\boxed{\text{c}}$ 6

$\boxed{\text{d}}$ 2

$\boxed{\text{e}}$ 8

(25) Per quale valore del numero reale α il seguente limite esiste ed è reale e diverso da 0:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\alpha} \log\left(\frac{x^5+x^3}{x^5+x^4}\right) \sin\left(\frac{1}{x^6+x^8}\right)\,?$$

a 7

b 9

c 10

d 4

e 8

---

(26)

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\log\frac{x^2-4x}{x^2-7x}$$

è uguale a:

a 0

b $+\infty$

c $-\infty$

d -3

e 3

---

(27)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\sin\left(\sqrt{x^4+3x^6}\,\right)}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+5x^4}\,\right)}$$

è uguale a:

a 2

b 0

c 1

d $\frac{3}{5}$

e $\frac{1}{5}$

(28)

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\exp\left(\frac{x-5}{x-9}\right)-e\right)$$

è uguale a:

- a $+\infty$
- b $-\infty$
- c $4e$
- d $\frac{5}{9}$
- e $\frac{4}{9}$

(29)

$$\lim_{x\to-\infty} x^2\left(\sqrt{4+\frac{5}{x}}-2\right)$$

è uguale a:

- a 0
- b $+\infty$
- c $-\infty$
- d $-\frac{5}{4}$
- e $\frac{5}{4}$

(30)

$$\lim_{x\to+\infty} \log(e^{2x}+1)\log\frac{x^2}{x^2-3}\,.$$

è uguale a:

[a] 0

[b] $+\infty$

[c] $-\infty$

[d] 2

[e] $\frac{2}{3}$

---

(31) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

per $x \to 0^+$ la funzione

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex\log\left(e - \frac{1}{e}x^2\right)$$

è equivalente a:

[a] ex

[b] $\frac{2e^2+1}{2e^3}x^5$

[c] $\frac{1}{e}x^5$

[d] $2x^3$

[e] $\frac{1}{e^3}x^5$

(32) Ricordando che

$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

indicata con f una funzione tale che, per $x \to 0$,

$$f(x) = 1 + 2x - 8x^2 + o(x^2)\,,$$

la funzione $\log(f(x))$ è uguale a:

a $\frac{1}{2} - 2x^2 + o(x^2)$

b $\frac{1}{2} + 2x - 2x^2 + o(x^2)$

c $2x - 10x^2 + o(x^2)$

d $2x - 8x^2 + o(x^2)$

e $x - 4x^2 + o(x^2)$

(33) Ricordando che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{24}y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

la funzione

$$\exp(2\cos x - x^2)$$

per $x \to 0$ è uguale a:

a $e^2 - e^2x^2 + \frac{1}{2}e^2x^4 + o(x^4)$

b $5 - 6x^2 + \frac{9}{4}x^4 + o(x^4)$

c $e^2 - 2e^2x^2 + \frac{1}{12}e^2x^4 + o(x^4)$

d $e^2 - 2e^2x^2 + \frac{25}{12}e^2x^4 + o(x^4)$

e $5 - 3x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^4)$

(34) Sapendo che

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^3)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp(-3\sin x) + \exp(3x) - 2\cosh(3x)}{x^3}$$

è uguale a:

a $+\infty$

b $-\infty$

c 0

d $\frac{1}{2}$

e $-\frac{1}{2}$

---

(35) Sapendo che

$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

siano $\alpha \in \mathbb{R}^*$ e $\beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\exp\bigl(2\sqrt{1-2x^2}\bigr) - e^2\sqrt{1-4x^2} \sim \alpha x^\beta\,, \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

Allora:

a $\alpha = 1 - e^2\,,\ \beta = 0$

b $\alpha = 3e^2\,,\ \beta = 4$

c $\alpha = e^2\,,\ \beta = 4$

d $\alpha = \frac{5}{2} - e^2\,,\ \beta = 0$

e $\alpha = -e^2\,,\ \beta = 2$

(36) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{9}y^2 + o(y^2) \qquad \text{per } y \to 0\,.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+3x^4} - \sqrt[3]{x^3+2x^4}}{x^2}$$

è uguale a:

a) 1

b) $\frac{5}{6}$

c) 3

d) 0

e) $-\frac{2}{3}$

---

(37) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y + o(y)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\operatorname{sen} y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\operatorname{senh} y = y + \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,.$$

Siano $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\operatorname{sen}(3x^3) + \operatorname{senh}(3x^3) - 6x^3\sqrt{1+2x^7} \sim ax^b\,, \qquad \text{per } x \to 0\,.$$

Allora:

a) $a = -12\,,\ b = 10$

b) $a = -6\,,\ b = 10$

c) $a = 6\,,\ b = 3$

d) $a = 12\,,\ b = 3$

e) $a = 27\,,\ b = 9$

(38) Ricordando che

$$e^y = 1 + y + o(y) \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y + o(y)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

Siano $a \in \mathbb{R}^*$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$x^9 \exp\left(\frac{x^4+4}{x^4+2}\right) - e\sqrt{x^{18}+1} \sim a x^b\,, \qquad \text{per } x \to +\infty\,.$$

Allora:

- [a] $a = e\,,\ b = 9$
- [b] $a = 1 - e\,,\ b = 9$
- [c] $a = e\,,\ b = 5$
- [d] $a = 2e\,,\ b = 5$
- [e] $a = 2e\,,\ b = 9$

(39) Ricordando che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp\left(\dfrac{1}{x+3}\right) - 1 - \dfrac{1}{x}}{x\,\mathrm{sen}\,\dfrac{2}{x} - 2}$$

è uguale a:

- a $\frac{15}{8}$
- b $\frac{9}{4}$
- c 0
- d 15
- e $-\frac{3}{8}$

---

(40) Ricordando che

$$(1+y)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}y + \frac{3}{8}y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4}{e^{-3x^2} - (1+6x^2)^{-\frac{1}{2}}}$$

è uguale a:

- a $-\frac{1}{18}$
- b $-\frac{1}{9}$
- c 0
- d $-\frac{1}{3}$
- e $-\frac{1}{6}$

(41) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin\left(1 - \sqrt{6\,\frac{x-5}{x-6}}\right).$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $]-\infty, 3] \cup [5, +\infty[$

$\boxed{\text{b}}$ $[5, +\infty[$

$\boxed{\text{c}}$ $[5, 6[$

$\boxed{\text{d}}$ $[3, 5]$

$\boxed{\text{e}}$ $]-\infty, 3]$

---

(42) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 3}}{x + 2}.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

$\boxed{\text{b}}$ $]-1, +\infty[$

$\boxed{\text{c}}$ $[-3, -1] \setminus \{-2\}$

$\boxed{\text{d}}$ $]-\infty, -3] \cup [-1, +\infty[$

$\boxed{\text{e}}$ $]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$

(43) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{\log\left|\frac{3}{x-2}\right|}\,.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{R} \setminus \{\,2\}$

$\boxed{\text{b}}$ $[-1, 5]$

$\boxed{\text{c}}$ $]2, +\infty[$

$\boxed{\text{d}}$ $[-1, 2[\, \cup \,]2, 5]$

$\boxed{\text{e}}$ $]-\infty, 2[$

---

(44) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x^2 - 3x + 2 - |x^2 + x - 2|}}\,.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\left]0, \frac{2}{3}\right[$

$\boxed{\text{b}}$ $]-\infty, 2[$

$\boxed{\text{c}}$ $]2, +\infty[$

$\boxed{\text{d}}$ $]-\infty, 0[\, \cup \left]\frac{2}{3}, 2\right[\cup \,]2, +\infty[$

$\boxed{\text{e}}$ $]-\infty, 0[\, \cup \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$

(45) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log\left(\sqrt{1-\frac{2}{x}}+\frac{\sqrt{3}}{x}\right).$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $]-\infty,-1[\,\cup\,[2,+\infty[$

$\boxed{\text{b}}$ $]-\infty,-1[\,\cup\,]3,+\infty[$

$\boxed{\text{c}}$ $]-\infty,0[\,\cup\,]3,+\infty[$

$\boxed{\text{d}}$ $]-\infty,0[\,\cup\,[2,+\infty[$

$\boxed{\text{e}}$ $[2,+\infty[$

---

(46) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{-\log 3-\log(x+4)}\,.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\emptyset$

$\boxed{\text{b}}$ $\left]-4,-\frac{11}{3}\right]$

$\boxed{\text{c}}$ $\left[-4,-\frac{11}{3}\right]$

$\boxed{\text{d}}$ $\left]-\frac{11}{3},-1\right]$

$\boxed{\text{e}}$ $\left[-\frac{11}{3},-1\right]$

(47) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log\bigl(2 - \sqrt{5+x}\,\bigr)$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

a $[-5, +\infty[$

b $[-5, -1[$

c $[4, +\infty[$

d $]0, 2[$

e $[-5, 5]$

(48) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+3x}}{|x+2|-1}$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

a $\mathbb{R}$

b $]-\infty, -3] \cup [0, +\infty[$

c $]-\infty, -3[\cup [0, +\infty[$

d $]-\infty, -3] \cup]0, +\infty[$

e $]-\infty, -3[\cup]0, +\infty[$

(49) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \frac{\sqrt{3 - e^x}}{\sqrt{2 + e^x}}\,.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{b}}$ $]-\infty, \log 3] \setminus \{-\log 2\}$

$\boxed{\text{c}}$ $]-\infty, \log 3]$

$\boxed{\text{d}}$ $]-\log 2, \log 3]$

$\boxed{\text{e}}$ $[\log 3, +\infty[$

---

(50) Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \log \frac{x - 1}{x - 2}\,.$$

Il dominio naturale di f è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $]0, 1[\, \cup\,]2, +\infty[$

$\boxed{\text{b}}$ $]-\infty, 1[\, \cup\,]2, +\infty[$

$\boxed{\text{c}}$ $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\text{d}}$ $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

$\boxed{\text{e}}$ $]1, 2[$

(51) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = 4 \arctan(x^3 - x^2 - 8x + 12) - \arctan 4(x^3 - x^2 - 8x + 12)\,.$$

è derivabile con derivata

$$f'(x) = \frac{60(3x^2 - 2x - 8)(x^3 - x^2 - 8x + 12)^2}{\big(1 + (x^3 - x^2 - 8x + 12)^2\big)\big(1 + 16(x^3 - x^2 - 8x + 12)^2\big)}\,.$$

L'insieme degli estremanti locali per f è:

a $\left\{-3, -\dfrac{4}{3}, 2\right\}$

b $\left\{-\dfrac{4}{3}\right\}$

c $\left\{-\dfrac{4}{3}, 2\right\}$

d $\left\{-3, -\dfrac{4}{3}\right\}$

e $\{-3, 2\}$

---

(52) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x \exp(-2x^2 + 3x)\,.$$

In quale dei seguenti intervalli la funzione f è decrescente?

a $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$

b $]-\infty, -1]$

c $\left[-\dfrac{1}{4}, 1\right]$

d $[-2, 0]$

e $\left[0, \dfrac{3}{2}\right]$

(53) La funzione $f\colon]-\infty,-2] \cup [2,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{2x^2+56} - \sqrt{x^2-4}\,.$$

è derivabile in $]-\infty,-2[\cup]2,+\infty[$ con derivata

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x^2+56}} - \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a f è crescente in $]-\infty,-6]$ e in $[6,+\infty[$

b f è crescente in $]-\infty,-6]$ e decrescente in $[-6,-2]$

c f è decrescente in $]-\infty,-6]$ e crescente in $[-6,-2]$

d f è crescente in $[-6,-2]$ e in $[2,6]$

e f è decrescente in $]-\infty,-2]$

---

(54) La funzione

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x) = (x+1)\sqrt{|x^2-4|}$$

è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-2,2\}$, con derivata

$$f'(x) = \frac{|x^2-4| + (x+1)x\,\mathrm{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}\,.$$

Indicato con A l'insieme dei punti di minimo locale per f e con B l'insieme dei punti di massimo locale per f, risulta:

a $A = B = \emptyset$

b $A = \{2\}$ $B = \{-2\}$

c $A = \left\{\frac{-1-\sqrt{33}}{4}, 2\right\}$ $B = \left\{-2, \frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}$

d $A = \left\{\frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right\}$ $B = \left\{\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}$

e $A = \left\{\frac{-1+\sqrt{33}}{4}\right\}$ $B = \left\{\frac{-1-\sqrt{33}}{4}\right\}$

(55) La funzione

$$f\colon \mathbb{R}\setminus\{0,3\}\to\mathbb{R}\,,\qquad f(x)=\frac{x+1}{|x^2-3x|}$$

è derivabile, con derivata

$$f'(x)=\frac{|x^2-3x|-(x+1)(2x-3)\,\mathrm{sgn}(x^2-3x)}{(x^2-3x)^2}\,.$$

Indicato con A l'insieme dei punti di minimo locale per f e con B l'insieme dei punti di massimo locale per f, risulta:

a $A=B=\emptyset$

b $A=\{-3,1\}\,,\ B=\emptyset$

c $A=\{-3,1\}\,,\ B=\{0,3\}$

d $A=\emptyset\,,\ B=\{-3,1\}$

e $A=\{0,3\}\,,\ B=\{-3,1\}$

---

(56) Sia f la funzione da $\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right]\cup[2,+\infty[$ a $\mathbb{R}$ definita da

$$f(x)=(x+4)\sqrt{3x^2-4x-4}\,.$$

è derivabile in $\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[\cup\,]2,+\infty[$ con derivata

$$f'(x)=3\,\frac{2x^2+2x-4}{\sqrt{3x^2-4x-4}}\,.$$

L'insieme degli estremanti locali per f è:

a $\{-2,1\}$

b $\left\{-2,-\frac{2}{3},1,2\right\}$

c $\left\{-2,-\frac{2}{3},2\right\}$

d $\{-2\}$

e $\{1\}$

(57) La funzione $f\colon \left]-\infty, -\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3}, +\infty\right[\to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 3} - 2x^2 \,.$$

è derivabile in $\left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ con derivata

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 3}} - 4x \,.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

$\boxed{\text{a}}$ f è crescente in $\left]-\infty, -\frac{7}{4}\right]$ e in $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$

$\boxed{\text{b}}$ f è crescente in $\left]-\infty, -\frac{7}{4}\right]$ e in $\left[\sqrt{3}, \frac{7}{4}\right]$

$\boxed{\text{c}}$ f è crescente in $\left[-\frac{7}{4}, -\sqrt{3}\right]$ e in $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$

$\boxed{\text{d}}$ f è crescente in $\left[-\frac{7}{4}, -\sqrt{3}\right]$ e in $\left[\sqrt{3}, \frac{7}{4}\right]$

$\boxed{\text{e}}$ f è crescente in $\left[\sqrt{3}, \frac{7}{4}\right]$ e in $\left[\frac{7}{4}, +\infty\right[$

---

(58) La funzione $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = (x^2 - 6x)\, e^{1/x} \,.$$

è derivabile con derivata

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 7x + 6}{x}\, e^{1/x} \,.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

$\boxed{\text{a}}$ f è decrescente in $]-\infty, -2]$ e crescente in $[2, +\infty[$

$\boxed{\text{b}}$ f è crescente in $]-\infty, -2]$ e in $[2, +\infty[$

$\boxed{\text{c}}$ f è decrescente in $]-\infty, -2]$ e in $[2, +\infty[$

$\boxed{\text{d}}$ f è crescente in $]0, 2]$

$\boxed{\text{e}}$ f è decrescente in $]0, 2]$

(59) La funzione $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = |x+3|\sqrt{|x-2|}\,.$$

è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}$ con derivata

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x+3)\operatorname{sgn}(x-2)\,(3x-1)}{2\sqrt{|x-2|}}\,.$$

Quale delle seguenti affermazioni è vera?

a f ha 1 punto di massimo locale e nessun punto di minimo locale

b f ha 1 punto di massimo locale e 1 punto di minimo locale

c f ha 1 punto di massimo locale e 2 punti di minimo locale

d f ha 2 punti di massimo locale e nessun punto di minimo locale

e f ha 2 punti di massimo locale e 1 punto di minimo locale

---

(60) La funzione $f\colon \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x\left(\log\frac{x}{e^2}\right)^3$$

è derivabile con derivata

$$f'(x) = \left(\log\frac{x}{e^2}\right)^3 + 3\left(\log\frac{x}{e^2}\right)^2\,.$$

Quali delle seguenti affermazioni è vera?

a f è decrescente in $\left]0, e^{-1}\right]$ e in $\left[e^2, +\infty\right[$ ed è crescente in $\left[e^{-1}, e^2\right]$

b f è crescente in $\left]0, e^{-1}\right]$ e in $\left[e^2, +\infty\right[$ ed è decrescente in $\left[e^{-1}, e^2\right]$

c f è decrescente in $\left]0, e^{-1}\right]$ e in $\left[e^{-1}, e^2\right]$ ed è crescente in $\left[e^2, +\infty\right[$

d f è decrescente in $\left]0, e^{-1}\right]$ ed è crescente in $\left[e^{-1}, +\infty\right[$

e f è crescente in $\mathbb{R}_+^*$

(61)

$$\int_1^2 x \log(3x)\, dx$$

è uguale a:

- [a] $2\log 6 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{3}{4}$
- [b] $2\log 6 - \frac{1}{2}\log 3 - \frac{1}{4}$
- [c] $4\log 6 - \log 3 - \frac{3}{2}$
- [d] $\log 6 - \log 3 - \log 2$
- [e] $4\log 6 - \log 3 - 2$

---

(62)

$$\int_1^4 \frac{x+3}{x(4x+3)}\, dx$$

è uguale a:

- [a] $\log 4 - \frac{3}{4}\log 19 + \frac{3}{4}\log 7$
- [b] $\log 4 - \frac{3}{2}\log 19 + \frac{3}{2}\log 7$
- [c] $\log 4 - \log 19 + \log 7$
- [d] $\log 4 - \frac{1}{3}\log 19 + \frac{1}{3}\log 7$
- [e] $\log 4 - \frac{1}{4}\log 19 + \frac{1}{4}\log 7$

(63)

$$\int_1^e \frac{\log x + 1}{x(\log x + 3)}\, dx$$

è uguale a:

a $1 - 2\log 4$

b $1 - \log 4$

c $1 - \log 4 - \log 3$

d $1 - 2\log \frac{4}{3}$

e $1 - \log \frac{4}{3}$

---

(64)

$$\int_1^2 \frac{x^3 + 2x^2 + 5}{x^2 + 2x}\, dx$$

è uguale a:

a $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\ \log 2$

b $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\ \log\left(\frac{16}{3}\right)$

c $\frac{3}{2} + \frac{5}{2}\ \log\left(\frac{3}{2}\right)$

d $\frac{3}{2} + 5\log\left(\frac{16}{3}\right)$

e $\frac{3}{2} + 5\log\left(\frac{3}{2}\right)$

(65)

$$\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2}\,dx$$

è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $4-2\log 2$

$\boxed{\text{b}}$ $3-2\log 2$

$\boxed{\text{c}}$ $\frac{7}{2}-2\log 2$

$\boxed{\text{d}}$ $\frac{7}{2}$

$\boxed{\text{e}}$ 1

---

(66)

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(3x)}{\operatorname{sen}^2(3x)+4}\,dx$$

è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\frac{1}{3}\arctan\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{b}}$ $\frac{1}{3}\arctan 1$

$\boxed{\text{c}}$ $\arctan\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{d}}$ $\frac{1}{6}\arctan\frac{1}{2}$

$\boxed{\text{e}}$ $\frac{1}{6}\arctan 1$

(67)

$$\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx$$

è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\log\sqrt{\dfrac{34}{13}} + \arctan\dfrac{5}{3} - \arctan\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{b}}$ $\log\dfrac{34}{13} + \arctan\dfrac{5}{3} - \arctan\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{c}}$ $\log\sqrt{\dfrac{34}{13}} + 3\arctan\dfrac{5}{3} - 3\arctan\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{d}}$ $\log\dfrac{34}{13} + 3\arctan\dfrac{5}{3} - 3\arctan\dfrac{2}{3}$

$\boxed{\text{e}}$ $\dfrac{1}{2}\log\dfrac{34}{13} + 3\arctan 5 - 3\arctan 2$

---

(68)

$$\int_0^1 \frac{3x^3+2x}{x^2+3}\,dx$$

è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\dfrac{3}{2} - \dfrac{7}{2}\log\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{b}}$ $\dfrac{3}{2} - 7\log 4$

$\boxed{\text{c}}$ $3 - 7\log\dfrac{4}{3}$

$\boxed{\text{d}}$ $3 - 7\log 4$

$\boxed{\text{e}}$ $3 - \dfrac{7}{2}\log\dfrac{4}{3}$

(69)

$$\int_0^1 \frac{e^{4x}}{e^{4x}+5}\,dx$$

è uguale a:

a $\log \dfrac{e^4+5}{6}$

b $\dfrac{1}{4}\log \dfrac{e^4+5}{6}$

c $1-5\log \dfrac{e^4+5}{6}$

d $1-\dfrac{5}{4}\log \dfrac{e^4+5}{6}$

e $e^4-5\log \dfrac{e^4+5}{6}$

---

(70)

$$\int_1^2 \frac{\big(\log(5x)\big)^3}{x}\,dx$$

è uguale a:

a $\dfrac{(\log 10)^4-(\log 5)^4}{4}$

b $\dfrac{(\log 10)^4-(\log 5)^4}{20}$

c $(\log 10)^4$

d $\dfrac{(\log 10)^4}{4}$

e $\dfrac{(\log 10)^4}{20}$

(71) Effettuando la sostituzione $x = 2\sin t$, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{4-x^2}+2}{\sqrt{4-x^2}+2}\,dx$$

risulta essere uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t\cos^2 t + 2\cos t}{\cos t + 2}\,dt$

$\boxed{\text{b}}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sin t\cos t + 2}{\cos t + 2}\,dt$

$\boxed{\text{c}}$ $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \frac{4\sin t\cos^2 t + 2\cos t}{\cos t + 1}\,dt$

$\boxed{\text{d}}$ $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arcsinh}(1/2)} \frac{4\sinh t\cosh^2 t + 2\cosh t}{\cosh t + 1}\,dt$

$\boxed{\text{e}}$ $\displaystyle\int_0^{\operatorname{arcsinh} 1} \frac{\sinh t\cosh^2 t + 2\cosh t}{\cosh t + 2}\,dt$

---

(72) Effettuando la sostituzione $t = \sqrt{x}$, l'integrale

$$\int_2^3 x e^{\sqrt{x}}\,dx$$

risulta essere uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\int_4^9 2t^3 e^t\,dt$

$\boxed{\text{b}}$ $\displaystyle\int_4^9 t^2 e^t\,dt$

$\boxed{\text{c}}$ $\displaystyle\int_2^3 t^3 e^t\,dt$

$\boxed{\text{d}}$ $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2t^3 e^t\,dt$

$\boxed{\text{e}}$ $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^2 e^t \frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$

(73) Effettuando la sostituzione $t = e^x$, l'integrale

$$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\,dx$$

risulta essere uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\int_1^e \frac{5t^3 - 3t}{2}\,dt$

$\boxed{\text{b}}$ $\displaystyle\int_1^e \frac{5t^2 - 3}{2}\,dt$

$\boxed{\text{c}}$ $\displaystyle\int_1^e \frac{5t^2 - 3}{2t}\,dt$

$\boxed{\text{d}}$ $\displaystyle\int_1^e \frac{5t^2 - 3}{2t^2}\,dt$

$\boxed{\text{e}}$ $\displaystyle\int_1^e \frac{5t^2 - 3}{2t^3}\,dt$

---

(74) Integrando per parti,

$$\int_1^2 x^5 \log(3 + x^2)\,dx$$

è uguale a:

$\boxed{\text{a}}$ $\displaystyle\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3 + x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^5}{3 + x^2}\,dx$

$\boxed{\text{b}}$ $\displaystyle\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3 + x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{10x^5}{3 + x^2}\,dx$

$\boxed{\text{c}}$ $\displaystyle\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3 + x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x^6}{3 + x^2}\,dx$

$\boxed{\text{d}}$ $\displaystyle\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3 + x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^6}{6(3 + x^2)}\,dx$

$\boxed{\text{e}}$ $\displaystyle\left[\frac{1}{6}\,x^6 \log(3 + x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^7}{3(3 + x^2)}\,dx$

(75) Integrando per parti,

$$\int_0^1 2e^{2x} \arctan(2+e^x)\,dx$$

è uguale a:

a $\left[e^{2x}\arctan(2+e^x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^{2x}}{5+4e^x+e^{2x}}\,dx$

b $\left[e^{2x}\arctan(2+e^x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{2e^{3x}}{5+4e^x+e^{2x}}\,dx$

c $\left[e^{2x}\arctan(2+e^x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x^2}}{5+4e^x+e^{2x}}\,dx$

d $\left[e^{2x}\arctan(2+e^x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{5+4e^x+e^{2x}}\,dx$

e $\left[e^{2x}\arctan(2+e^x)\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{3x}}{5+4e^x+e^{2x}}\,dx$

---

(76) Applicando il teorema di integrazione per parti,

$$\int_1^e x \log^6 x\,dx$$

è uguale a:

a $\displaystyle\frac{e^2}{2} - \int_1^e 3x\log^5 x\,dx$

b $\displaystyle\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\log^6 x\,dx$

c $\displaystyle\frac{e^2}{2} - \int_1^e 3x^2\log^5 x\,dx$

d $\displaystyle\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{1}{14}x^2\log^7 x\,dx$

e $\displaystyle\frac{e^2}{2} - \int_1^e \frac{6\log^5 x}{x}\,dx$

(77) Applicando il teorema di integrazione per parti,

$$\int_1^2 \frac{\arctan(\sqrt{2x})}{\sqrt{6x}}\,dx$$

è uguale a:

a $\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{x}\arctan(\sqrt{2x})\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\,\frac{1}{1+2x}\,dx$

b $\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{x}\arctan(\sqrt{2x})\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{6}}\,\frac{\sqrt{x}}{1+2x}\,dx$

c $\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{x}\arctan(\sqrt{2x})\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{1+2x}\,dx$

d $\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{x}\arctan(\sqrt{2x})\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt{x}}{1+2x}\,dx$

e $\left[\frac{2}{\sqrt{6}}\sqrt{x}\arctan(\sqrt{2x})\right]_1^2 - \int_1^2 2\,\frac{\sqrt{x}}{1+2x}\,dx$

---

(78) Effettuando la sostituzione $\sqrt[4]{x} = t$, l'integrale

$$\int_1^2 \frac{1}{x^{1/4}(x^2+1)}\,dx$$

risulta essere uguale a:

a $\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{t(t^8+1)}\,dt$

b $\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{4t^2}{t^8+1}\,dt$

c $\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{4t^2}{t^{1/2}+1}\,dt$

d $\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{t(t^{1/2}+1)}\,dt$

e $\int_1^{\sqrt[4]{2}} \frac{1}{4t^4(t^8+1)}\,dt$

(79) Effettuando la sostituzione $x = 2\sin t$, l'integrale

$$\int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{x + \sqrt{4 - x^2}}\, dx$$

risulta essere uguale a:

[a] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t}\, dt$

[b] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{2\cos t(\sin t + \cos t)}\, dt$

[c] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t \cos t}{\sin t + \cos t}\, dt$

[d] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin t}{\cos t(\sin t + \cos t)}\, dt$

[e] $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{2\sin t \cos t}{\sin t + \cos t}\, dt$

---

(80) Effettuando la sostituzione $t = \tan x$, l'integrale

$$\int_0^{\pi/4} \frac{3\,\mathrm{sen}\, x - 2\cos x}{3\,\mathrm{sen}\, x + 2\cos x}\, dx$$

risulta essere uguale a:

[a] $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3t - 2}{3t + 2}\, dt$

[b] $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3t - 2}{(1 + t^2)(3t + 2)}\, dt$

[c] $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1 + \tan^2 t)(3t - 2)}{3t + 2}\, dt$

[d] $\displaystyle\int_0^{1} \frac{3 - 2t}{(1 + t^2)(3 + 2t)}\, dt$

[e] $\displaystyle\int_0^{1} \frac{(1 + \tan^2 t)(3 - 2t)}{3 + 2t}\, dt$

Esercizi da svolgere completamente

(81) Ricordando che

$$\sin y = y - \frac{1}{6}\, y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{24}\, y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x\, \sin x + x^4} \right) .$$

---

(82) Ricordando che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\, y^2 + \frac{1}{24}\, y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(2\cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - \exp(-2x^2)} .$$

---

(83) Ricordando che

$$\sqrt[3]{1+y} = 1 + \frac{1}{3}\, y - \frac{1}{9}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\log(1+y) = y - \frac{1}{2}\, y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare il limite

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} - x - 3}{\log\bigl(3\cosh(5x)\bigr)\left(\log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5}\right)} .$$

(84) Ricordando che

$$\begin{aligned}
\sqrt[2]{1+y} &= 1+\frac{1}{2}\,y+o(y)\,, && \text{per } y\to 0\,,\\
\sqrt[3]{1+y} &= 1+\frac{1}{3}\,y+o(y)\,, && \text{per } y\to 0\,,\\
\cos y &= 1-\frac{1}{2}\,y^2+o(y^3)\,, && \text{per } y\to 0\,,
\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sinh(4x)\Big(\log\big(\sinh(2x)\big)+\log 2-2x\Big)\,\big(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt[2]{x^2+3x}\big)}{\arctan(2x)\log\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)\big(\sqrt{x^4+x^2}-\sqrt{x^2+4}\,\big)}\,.$$

---

(85) Ricordando che

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+y} &= 1+\frac{1}{2}\,y-\frac{1}{8}\,y^2+o(y^2)\,, && \text{per } y\to 0\,,\\
\sqrt[3]{1+y} &= 1+\frac{1}{3}\,y-\frac{1}{9}\,y^2+o(y^2)\,, && \text{per } y\to 0\,,\\
\cos y &= 1-\frac{1}{2}\,y^2+o(y^3)\,, && \text{per } y\to 0\,,
\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x^2+2x^3}-\sqrt[3]{x^3+3x^4}}{\sqrt{x^2-4x^4}-\cos(3x^2)}\,.$$

---

(86) Ricordando che

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+y} &= 1+\frac{1}{2}\,y-\frac{1}{8}\,y^2+o(y^2)\,, && \text{per } y\to 0\,,\\
\sqrt[3]{1+y} &= 1+\frac{1}{3}\,y-\frac{1}{9}\,y^2+o(y^2)\,, && \text{per } y\to 0\,,
\end{aligned}$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x\big(\sqrt{x^6+4x^4}-\sqrt[3]{x^9+6x^7}\,\big)\,.$$

(87) Ricordando che

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}\,y - \frac{1}{8}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\sin y = y - \frac{1}{6}\,y^3 + o(y^4)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \bigl(\sqrt{x^6+4x^5+6x^4} - x^3 - 2x^2\bigr) \left(\sin\frac{x+4}{x^4+1} - \frac{1}{x^3}\right) \exp\bigl(6 + 3\log x\bigr)\,.$$

---

(88) Ricordando che

$$\cos y = 1 - \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$\cosh y = 1 + \frac{1}{2}\,y^2 + \frac{1}{24}\,y^4 + o(y^5)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$
$$e^y = 1 + y + \frac{1}{2}\,y^2 + o(y^2)\,, \qquad \text{per } y \to 0\,,$$

calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(3\cos x) + \exp(3\cosh x) - 2e^3}{\bigl(\cos(3x)\cosh(3x) - 1\bigr)\bigl(\cos(e^x) - 1\bigr)}\,.$$

---

(89) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = (x+6)\,\exp\left(\frac{x+1}{x}\right)\,.$$

---

(90) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = |2x^3 - 9x| + 9x\,.$$

---

(91) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin|x^2 + 4x + 3|\,.$$

---

(92) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = e^{1/x}\,\sqrt{|x+5| - 1}\,.$$

(93) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = |x+1|\,\sqrt{x+2}\,.$$

(94) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$2\sqrt{x^2-2x} - 3|x|\,.$$

(95) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\frac{|x+2|}{x^2-2x-4}\,.$$

(96) Studiare, nel suo dominio naturale, la funzione definita da

$$f(x) = (1-4x^2)\,e^{|x^2-2|}\,.$$

(97) Calcolare

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\,dx\,.$$

(98) Calcolare

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)}\,dx\,.$$

(99) Calcolare

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos x + 2}\,dx\,.$$

(100) Calcolare

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx\,.$$

(101) Calcolare

$$\int_1^4 \frac{\log\bigl(\sqrt{x}+1\bigr)}{\bigl(\sqrt{x}+2\bigr)^2\sqrt{x}}\,dx\,.$$

(102) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\, dx\,.$$

(103) Calcolare

$$\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x - 3\,e^{-x}}{(e^x + 4 + 3\,e^{-x})^2}\, dx\,.$$

(104) Calcolare

$$\int_0^{1/2} (6x^2+2)\ \arcsin x\, dx\,.$$

Soluzioni

(1) Utilizzando la formula di derivazione di funzione composta, $\forall x \in \mathbb{R}$, si ha

$$f'(x) = \cos\bigl(3e^{x^2-2}\bigr)3e^{x^2-2}2x\,;$$

perciò

$$f'(2) = \cos\bigl(3e^{2^2-2}\bigr)3e^{2^2-2}2\cdot 2 = 12e^2\cos\bigl(3e^2\bigr)\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(2) Per calcolare la derivata di f è utile riscrivere la formula che la definisce sotto forma di esponenziale; abbiamo quindi

$$f(x) = \exp\bigl(\sin(7x)\log\bigl(\sin(5x)\bigr)\bigr)\,.$$

Perciò, per x appartenente al dominio naturale di tale funzione, si ha

$$f'(x) = \exp\bigl(\sin(7x)\log\bigl(\sin(5x)\bigr)\bigr)\left(7\cos(7x)\log\bigl(\sin(5x)\bigr) + \sin(7x)\,\frac{5\cos(5x)}{\sin(5x)}\right)\,.$$

Da ciò segue

$$\begin{aligned}
f'\Bigl(\frac{3}{7}\,\pi\Bigr) &= \exp\left(\sin(3\pi)\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right)\right)\cdot\\
&\quad\cdot\left(7\cos(3\pi)\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right) + \sin(3\pi)\,\frac{5\cos\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)}{\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)}\right) =\\
&= \exp(0)\left(-7\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right) + 0\right) =\\
&= -7\log\left(\sin\Bigl(\frac{15}{7}\,\pi\Bigr)\right)\,.
\end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(3) Poiché la derivata della funzione valore assoluto, in $\mathbb{R}^*$, è la funzione segno, si ha, $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-2\}$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sqrt{|x+2|} + (x+1)\,\frac{1}{2\sqrt{|x+2|}}\,\operatorname{sgn}(x+2) = \frac{2|x+2| + (x+1)\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}} =\\
&= \frac{2(x+2)\operatorname{sgn}(x+2) + (x+1)\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}} = \frac{(3x+5)\operatorname{sgn}(x+2)}{2\sqrt{|x+2|}}\,.
\end{aligned}$$

Dovendo calcolare la derivata seconda di f, cioè la derivata di f', è utile raccogliere nell'espressione di f' le costanti moltiplicative; tra queste comprendiamo anche la funzione segno; infatti ai fini del calcolo delle derivate essa si comporta come una costante, visto che fissato un qualunque punto in cui è derivabile essa è costante in un opportuno intorno di tale punto. Si ha

$$f'(x) = \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{3x+5}{\sqrt{|x+2|}} \, ;$$

perciò, utilizzando la formula di derivazione di un quoziente, si ha

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{3\sqrt{|x+2|} - (3x+5)\,\dfrac{1}{2\sqrt{|x+2|}}\operatorname{sgn}(x+2)}{\left(\sqrt{|x+2|}\,\right)^2} = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{6|x+2| - (3x+5)\operatorname{sgn}(x+2)}{2|x+2|^{3/2}} = \\ &= \frac{\operatorname{sgn}(x+2)}{2} \, \frac{6(x+2)\operatorname{sgn}(x+2) - (3x+5)\operatorname{sgn}(x+2)}{2|x+2|^{3/2}} = \frac{3x+7}{4|x+2|^{3/2}} \, . \end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(4) Per calcolare la derivata di f è utile riscrivere la formula che la definisce sotto forma di esponenziale; abbiamo quindi

$$f(x) = \exp\bigl(\log(4+x^2)\log(5x)\bigr) \, ,$$

pertanto

$$f'(x) = \exp\bigl(\log(4+x^2)\log(5x)\bigr) \left(\frac{2x}{4+x^2} \, \log(5x) + \log(4+x^2)\, \frac{5}{5x} \right) .$$

Quindi si ha

$$f'(1) = \exp\bigl(\log 5 \log 5\bigr) \left(\frac{2}{5} \, \log 5 + \log 5 \right) = 5^{\log 5} \, \frac{7}{5} \log 5 \, .$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(5) Si ha

$$f'(x) = \exp(x^2+6x)(2x+6)\log\left|-2x^2+1\right| + \exp(x^2+6x)\, \frac{-4x\operatorname{sgn}(-2x^2+1)}{|-2x^2+1|} \, ,$$

quindi

$$f'(-3) = \exp(-9)\, 0 \log|-17| + \exp(-9)\, \frac{12\operatorname{sgn}(-17)}{|-17|} = -\,\frac{12}{17}\exp(-9) \, .$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(6) $\boxed{\text{b}}$

(7) $\boxed{\text{d}}$

(8) $\boxed{\text{c}}$

(9) $\boxed{\text{a}}$

(10) $\boxed{\text{e}}$

(11) Se indichiamo con h la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che $h(y) = e^{3|y|}$, si ha $g = h \circ f$. Dalla formula di derivazione di funzione composta abbiamo quindi

$$g'(0) = h'(f(0))f'(0) = h'(-2) \cdot (-5)\,;$$

per $y \neq 0$ risulta $h'(y) = 3\,\mathrm{sgn}(y)\,e^{3|y|}$, perciò

$$h'(-2) = 3\,\mathrm{sgn}(-2)\,e^{3|-2|} = -3\,e^6\,.$$

Pertanto $g'(0) = 15\,e^6$.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(12) Se indichiamo con h la funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ tale che $h(x) = x^6 + 1$, si ha $g(x) = \big((f \circ h)(x)\big)^2$. Pertanto

$$g'(x) = 2(f \circ h)(x)(f \circ h)'(x) = 2f\big(h(x)\big)f'\big(h(x)\big)h'(x) = 2f\big(h(x)\big)f'\big(h(x)\big)6x^5\,.$$

Quindi, poiché h(1)=2, si ha

$$g'(1) = 12f\big(h(1)\big)f'\big(h(1)\big) = 12f(2)f'(2) = 12 \cdot (-1) \cdot 3 = -36\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(13) Per $x \in \,]-\pi/2, \pi/2[$ risulta

$$g'(x) = \arctan'\big(8\,f(\tan x)\big)8f'(\tan x)\tan'(x) = \frac{1}{1 + \big(8\,f(\tan x)\big)^2}\,8f'(\tan x)\,\frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{1 + \left(8\,f\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)\right)^2}\,8f'\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{1 + \big(8\,f(1)\big)^2}\,8f'(1)\,\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{1 + 0^2}\,8 \cdot 1 \cdot 2 = 16\,. \end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(14) Per $x \in \mathbb{R}$ si ha

$$g'(x) = \frac{2xf(x^2) - x^2 f'(x^2)2x}{\big(f(x^2)\big)^2}\,,$$

quindi

$$g'(2) = \frac{4f(4) - 16f'(4)}{\big(f(4)\big)^2} = \frac{4 \cdot 5 - 16 \cdot (-1)}{5^2} = \frac{36}{25}\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{e}}$.

(15) Per $x \in \mathbb{R}$ ha

$$g'(x) = 2\cos\big(f(2x)\big)f'(2x)\,,$$

quindi

$$g'(1) = 2\cos\big(f(2)\big)f'(2) = 2\cos(\pi) \cdot 4 = -8\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{e}}$.

(16) $\boxed{\text{a}}$

(17) $\boxed{\text{e}}$

(18) $\boxed{\text{a}}$

(19) $\boxed{\text{e}}$

(20) $\boxed{\text{b}}$

(21) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$.

Calcoliamolo riconducendoci a limiti notevoli; per questo è opportuno scrivere la funzione di cui dobbiamo calcolare il limite nella forma

$$\frac{\sqrt{1+2x^4} - 1 + 1 - \cos(5x^2)}{x^4} = \frac{\sqrt{1+2x^4} - 1}{x^4} + \frac{1 - \cos(5x^2)}{x^4}\,.$$

Si ha

$$\frac{\sqrt{1+2x^4} - 1}{x^4} = \frac{\big(\sqrt{1+2x^4} - 1\big)\big(\sqrt{1+2x^4} + 1\big)}{x^4\big(\sqrt{1+2x^4} + 1\big)} =$$

$$= \frac{2x^4}{x^4\big(\sqrt{1+2x^4} + 1\big)} = \frac{2}{\sqrt{1+2x^4} + 1} \xrightarrow[x \to 0]{} 1\,.$$

Inoltre per $y \to 0$ è $1 - \cos y \sim y^2/2$, quindi si ha

$$\frac{1 - \cos(5x^2)}{x^4} \sim \frac{(5x^2)^2}{2x^4} = \frac{25}{2}\,.$$

Perciò

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-\cos(5x^2)}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x^4}-1}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(5x^2)}{x^4}=1+\frac{25}{2}=\frac{27}{2}\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(22) Si ha $\lim_{x\to 0^+}(\exp(\sqrt{x^2+x^4})-1)=e^0-1=0$.

Poiché l'esponente $\sqrt{x^2+x^4}$ tende a 0 per $x\to 0$, il numeratore ha limite $e^0-1=0$. Siccome $e^y-1\sim y$ per $y\to 0$, risulta

$$\exp\big(\sqrt{x^2+x^4}\,\big)-1\sim\sqrt{x^2+x^4}\,.$$

Inoltre

$$\sqrt{x^2+x^4}=\sqrt{x^2(1+x^2)}=|x|\,\sqrt{1+x^2}\sim|x|\,.$$

Abbiamo quindi

$$\exp\big(\sqrt{x^2+x^4}\,\big)-1\sim|x|\,.$$

Poiché calcoliamo il limite in 0 da destra possiamo supporre $|x|=x$, perciò possiamo concludere che, per $x\to 0^+$,

$$\exp\big(\sqrt{x^2+x^4}\,\big)-1\sim x\,.$$

Pertanto, per $x\to 0^+$,

$$\frac{\exp\big(\sqrt{x^2+x^4}\,\big)-1}{x}\sim\frac{x}{x}=1\,.$$

Quindi il limite è 2.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(23) Il limite del numeratore è in forma indeterminata $+\infty-\infty$; il denominatore è prodotto di due fattori, il primo ha limite $+\infty$, il secondo, poiché $\lim_{x\to+\infty}1/x=0$, ha limite $e^0=1$.

Per determinare il comportamento del numeratore è opportuno raccogliere il termine x^4 che compare sotto radice, visto che $4x^3$ è trascurabile rispetto a x^4. Abbiamo quindi

$$\sqrt{x^4+4x^3}-x^2=\sqrt{x^4\left(1+\frac{4}{x}\right)}-x^2=x^2\sqrt{1+\frac{4}{x}}-x^2=x^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right).$$

Poiché $4/x\to 0$, tenuto conto che $\sqrt{1+y}-1\sim y/2$, per $y\to 0$, risulta

$$x^2\left(\sqrt{1+\frac{4}{x}}-1\right)\sim x^2\,\frac{1}{2}\,\frac{4}{x}=2x\,.$$

Pertanto il numeratore ha limite $+\infty$, quindi il limite del quoziente è in forma indeterminata ∞/∞. Per quanto già osservato si ha

$$\frac{\sqrt{x^4+4x^3}-x^2}{x\,e^{1/x}}\sim\frac{2x}{x}=2\,,$$

pertanto il limite è 2.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(24) Il numeratore è prodotto di due fattori che tendono a 0. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\log(1+2x^3) \sim 2x^3\,,$$

$$\sin(x^2+x^3) \sim x^2+x^3 \sim x^2\,.$$

Pertanto

$$\log(1+2x^3)\sin(x^2+x^3) \sim 2x^3x^2 = 2x^5\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(25) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\frac{x^5+x^3}{x^5+x^4} \to 1\,,$$

quindi

$$\log\left(\frac{x^5+x^3}{x^5+x^4}\right) \sim \frac{x^5+x^3}{x^5+x^4} - 1 = \frac{x^5+x^3-x^5-x^4}{x^5+x^4} = \frac{x^3-x^4}{x^5+x^4} \sim \frac{-x^4}{x^5} = -\,\frac{1}{x}\,.$$

Inoltre

$$\sin\left(\frac{1}{x^6+x^8}\right) \sim \frac{1}{x^6+x^8} \sim \frac{1}{x^8}\,.$$

Pertanto

$$x^\alpha \log\left(\frac{x^5+x^3}{x^5+x^4}\right)\sin\left(\frac{1}{x^6+x^8}\right) \sim x^\alpha\left(-\,\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^8} = -x^{\alpha-9}\,.$$

Il limite è real e diverso da 0 se e solo se l'esponente è 0, cioè $\alpha = 9$.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(26) $\boxed{\text{e}}$

(27) $\boxed{\text{a}}$

(28) $\boxed{\text{c}}$

(29) $\boxed{\text{c}}$

(30) $\boxed{\text{a}}$

(31) Studiamo il primo addendo. Per il calcolo del limite possiamo supporre $x > 0$, quindi si ha

$$\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} = e|x| \sqrt{1 - \frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4} = ex\sqrt{1 - \frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4}\,.$$

Poiché

$$\lim_{x\to 0^+}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big) = 0\,,$$

per la formula di Taylor si ha

$$\begin{aligned}
&\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} = \\
&= ex\left(1 + \frac{1}{2}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big) - \frac{1}{8}\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big)^2 + o\bigg(\Big(-\frac{2}{e^2}\,x^2 + \frac{2}{e^2}\,x^4\Big)^2\bigg)\right) = \\
&= ex\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 + \frac{1}{e^2}\,x^4 - \frac{1}{2e^4}\,x^4 + o(x^4)\Big) = ex - \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{2e^2-1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5)\,.
\end{aligned}$$

Inoltre, per la formula di Taylor, si ha

$$\begin{aligned}
&\log\Big(e - \frac{1}{e}\,x^2\Big) = \log\left(e\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2\Big)\right) = \log e + \log\Big(1 - \frac{1}{e^2}\,x^2\Big) = \\
&= 1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 - \frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)^2 + o\left(\Big(-\frac{1}{e^2}\,x^2\Big)^2\right) = 1 - \frac{1}{e^2}\,x^2 - \frac{1}{2e^4}\,x^4 + o(x^4)\,.
\end{aligned}$$

Quindi risulta

$$\begin{aligned}
&\sqrt{e^2x^2 - 2x^4 + 2x^6} - ex\log\Big(e - \frac{1}{e}\,x^2\Big) = \\
&\qquad = ex - \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{2e^2-1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5) - ex + \frac{1}{e}\,x^3 + \frac{1}{2e^3}\,x^5 + o(x^5) = \\
&\qquad = \frac{1}{e}\,x^5 + o(x^5) \sim \frac{1}{e}\,x^5\,.
\end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(32) Poiché, per $x \to 0$, si ha $2x - 8x^2 + o(x^2) \to 0$, risulta

$$\begin{aligned}
\log(f(x)) &= \log\big(1 + 2x - 8x^2 + o(x^2)\big) = \\
&= 2x - 8x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}\big(2x - 8x^2 + o(x^2)\big)^2 + o\left(\big(2x - 8x^2 + o(x^2)\big)^2\right) = \\
&= 2x - 8x^2 + o(x^2) - \frac{1}{2}\big(4x^2 + o(x^2)\big) + o(x^2) = 2x - 10x^2 + o(x^2)\,.
\end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(33) Scriviamo anzitutto l'esponente $2\cos x - x^2$ come somma di un polinomio e di un resto.

$$2\cos x - x^2 = 2\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^5)\right) - x^2 = 2 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\,;$$

perciò

$$\exp(2\cos x - x^2) = \exp\left(2 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right)\,.$$

L'esponente tende a 2 quando x tende a 0, per scrivere come somma di un polinomio e di un resto l'esponenziale è quindi utile spezzarlo nel prodotto di due esponenziali, il primo con esponente 2, il secondo con esponente che tende a 0. Abbiamo allora

$$\exp\left(2 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) = e^2\exp\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right)\,.$$

Per la formula di Taylor per l'esponenziale si ha

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) = \\
&= 1 + \left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{2}\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right)^2 \\
&\qquad\qquad + o\left(\left(-2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5)\right)^2\right) = \\
&= 1 - 2x^2 + \frac{1}{12}x^4 + o(x^5) + 2x^4 + o(x^5) + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)\,,
\end{aligned}$$

perciò

$$\exp(2\cos x - x^2) = e^2\left(1 - 2x^2 + \frac{25}{12}x^4 + o(x^4)\right) = e^2 - 2e^2x^2 + \frac{25}{12}e^2x^4 + o(x^4)\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(34) Il numeratore è somma di tre addendi che tendono a 0. Studiamo tali addendi. Per $x \to 0^+$ si ha

$$\begin{aligned}
&\exp(-3\sin x) = \exp\left(-3\left(x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4)\right)\right) = \exp\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right) = \\
&= 1 + \left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right) + \frac{1}{2}\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right)^2 + \\
&\qquad + \frac{1}{6}\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right)^3 + o\left(\left(-3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4)\right)^3\right) = \\
&= 1 - 3x + \frac{1}{2}\,x^3 + o(x^4) + \frac{1}{2}\left(9x^2 - 3x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{6}\left(-27x^3 + o(x^4)\right) + o(x^3) = \\
&= 1 - 3x + \frac{9}{2}\,x^2 - 4x^3 + o(x^3)\,,
\end{aligned}$$

$$\exp(3x) = 1 + 3x + \frac{9}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x^3 + o(x^3)\,,$$

$$2\cosh(3x) = 2 + 9x^2 + o(x^3)\,.$$

Pertanto

$$\frac{\exp(-3\sin x) + \exp(3x) - 2\cosh(3x)}{x^3} =$$

$$= \frac{1 - 3x + \frac{9}{2}\,x^2 - 4x^3 + o(x^3) + 1 + 3x + \frac{9}{2}\,x^2 + \frac{9}{2}\,x^3 + o(x^3) - 2 - 9x^2 + o(x^3)}{x^3} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\,x^3 + o(x^3)}{x^3} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(35) Per $x \to 0$ si ha

$$\exp\bigl(2\sqrt{1-2x^2}\,\bigr) = \exp\left(2\left(1 + \frac{1}{2}(-2x^2) - \frac{1}{8}(-2x^2)^2 + o\left((-2x^2)^2\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\bigl(2 - 2x^2 - x^4 + o(x^4)\bigr) = e^2\exp\bigl(-2x^2 - x^4 + o(x^4)\bigr) =$$

$$= e^2\Bigl(1 - 2x^2 - x^4 + o(x^4) + \frac{1}{2}\bigl(-2x^2 - x^4 + o(x^4)\bigr)^2 + o\Bigl(\bigl(-2x^2 - x^4 + o(x^4)\bigr)^2\Bigr)\Bigr) =$$

$$= e^2\bigl(1 - 2x^2 - x^4 + o(x^4) + 2x^4\bigr) = e^2\bigl(1 - 2x^2 + x^4 + o(x^4)\bigr)\,,$$

$$e^2\sqrt{1-4x^2} = e^2\left(1 + \frac{1}{2}(-4x^2) - \frac{1}{8}(-4x^2)^2 + o\bigl((-4x^2)^2\bigr)\right) =$$

$$= e^2\bigl(1 - 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\bigr)\,.$$

Quindi

$$\exp\bigl(2\sqrt{1-2x^2}\,\bigr) - e^2\sqrt{1-4x^2} =$$

$$= e^2\bigl(1 - 2x^2 + x^4 + o(x^4)\bigr) - e^2\bigl(1 - 2x^2 - 2x^4 + o(x^4)\bigr) =$$

$$= 3e^2x^4 + o(x^4) \sim 3e^2x^4\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(36) $\boxed{\text{e}}$

(37) $\boxed{\text{b}}$

(38) $\boxed{\text{d}}$

(39) $\boxed{\text{a}}$

(40) $\boxed{\text{b}}$

(41) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui il denominatore $x-6$ non è nullo, il numero sotto radice è non negativo e l'argomento dell'arcoseno appartiene a $[-1,1]$; quindi $\operatorname{dom} f$ è l'insieme delle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} \geq 0\,, \\ 1-\sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}} \geq -1\,, \\ 1-\sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}} \leq 1\,, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} \geq 0\,, \\ \sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}} \leq 2\,, \\ \sqrt{6\,\dfrac{x-5}{x-6}} \geq 0\,. \end{cases}$$

L'ultima disequazione è verificata da tutti gli x che verificano la prima disequazione. La seconda disequazione è verificata dagli x che soddisfano la prima disequazione e tali che

$$6\,\frac{x-5}{x-6} \leq 4\,,$$

che, successivamente, equivale a

$$3\,\frac{x-5}{x-6} - 2 \leq 0\,,$$
$$\frac{3(x-5)-2(x-6)}{x-6} \leq 0\,,$$
$$\frac{x-3}{x-6} \leq 0\,.$$

Il sistema è quindi equivalente a

$$\begin{cases} \dfrac{x-5}{x-6} \geq 0\,, \\ \dfrac{x-3}{x-6} \leq 0\,. \end{cases}$$

L'insieme delle soluzioni della prima disequazione è $]-\infty,5]\cup]6,+\infty[$, quello della seconda è $[3,6[$; l'intersezione di tali insiemi è $[3,5]$, che costituisce il dominio di f.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(42) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che la quantità sotto radice è non negativa e il denominatore $x+2$ è diverso da 0. Quindi

$$\operatorname{dom} f = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\} \;\middle|\; x^2+4x+3 \geq 0 \right\}.$$

Il trinomio x^2+4x+3 si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 3} = -2 \pm 1 = \begin{cases} -1\,, \\ -3\,, \end{cases}$$

quindi è non negativo per $x \in \,]-\infty,-3] \cup [-1,+\infty[$. Pertanto

$$\operatorname{dom} f = (]-\infty,-3] \cup [-1,+\infty[) \setminus \{-2\} = \,]-\infty,-3] \cup [-1,+\infty[\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(43) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ tali che la quantità sotto radice è non negativa e il denominatore $x-2$ è diverso da 0. Quindi deve essere $x \neq 2$ e $\log|3/(x-2)| \geq 0$. Poiché il logaritmo è non negativo se e solo se il suo argomento è maggiore o uguale a 1, la disequazione equivale a

$$\left| \frac{3}{x-2} \right| \geq 1\,.$$

Per risolvere questa disequazione è utile osservare che, per $x \neq 2$, essa equivale a

$$\left| \frac{x-2}{3} \right| \leq 1\,,$$

cioè $|x-2| \leq 3$, che è verificata se e solo se $2-3 \leq x \leq 2+3$, cioè $-1 \leq x \leq 5$. Quindi

$$\operatorname{dom} f = [-1,5] \setminus \{2\}.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(44) Il dominio naturale di f è costituito dagli $x \in \mathbb{R}$ per cui è positivo l'argomento della radice, quindi deve essere

$$2x^2 - 3x + 2 > \left| x^2 + x - 2 \right|\,,$$

che equivale a

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 < 2x^2 - 3x + 2\,, \\ x^2 + x - 2 > -(2x^2 - 3x + 2)\,, \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 > 0\,, \\ 3x^2 - 2x > 0\,. \end{cases}$$

Poiché $x^2-4x+4 = (x-2)^2$ La prima disequazione è verificata per $x \neq 2$. Il trinomio $3x^2-2x$ si annulla per $x=0$ e $x=2/3$, pertanto, la seconda disequazione è verificata se $x > 2/3$ oppure $x < 0$. Il dominio naturale di f è costituito dai numeri che sono soluzione di entrambe le disequaziioni, quindi è $]-\infty,0[\, \cup \,]2/3,+\infty[\, \setminus \{2\}$.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(45) Il dominio naturale di f è costituito dagli x diversi da 0 per cui è non negativo l'argomento della radice e positivo l'argomento del logaritmo, quindi deve essere

$$\begin{cases} x \neq 0\,, \\ 1 - \dfrac{2}{x} \geq 0\,, \\ \sqrt{1 - \dfrac{2}{x}} + \dfrac{\sqrt{3}}{x} > 0\,. \end{cases}$$

Si ha

$$1 - \frac{2}{x} \geq 0 \iff \frac{x-2}{x} \geq 0\,.$$

Il segno del quoziente risulta dal seguente schema:

		0		2	
$x-2$	$-\ -\ -\ -\ -$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$
x	$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$
$\frac{x-2}{x}$	$+\ +\ +\ +\ +$		$-\ -\ -\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$

pertanto la disequazione $1 - (2/x) \geq 0$ è verificata se $x \geq 2$ oppure $x < 0$. Inoltre

$$\sqrt{1 - \frac{2}{x}} + \frac{\sqrt{3}}{x} > 0 \iff \sqrt{1 - \frac{2}{x}} > -\frac{\sqrt{3}}{x}\,.$$

Poiché il primo membro è non negativo, questa disequazione è verificata se il secondo membro è negativo, cioè se $x > 0$, purché x renda non negativo l'argomento della radice, cioè, come già visto, purché sia $x \geq 2$. Se $x < 0$ l'argomento della radice è non negativo, entrambi i membri della disequazione sono non negativi, quindi essa equivale a

$$1 - \frac{2}{x} > \frac{3}{x^2}\,,$$

cioè

$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x^2} > 0\,.$$

Poiché il denominatore è non negativo, la disequazione è verificata se e solo se il numeratore è positivo. Il polinomio $x^2 - 2x - 3$ si annulla per $x = -1$ e $x = 3$, pertanto, ricordando che stiamo considerando il caso $x < 0$, esso è positivo per $x < -1$. Pertanto x appartiene al dominio della funzione se e solo se $x \geq 2$ oppure $x < -1$.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(46) $\boxed{\text{b}}$

(47) $\boxed{\text{b}}$

(48) $\boxed{\text{c}}$

(49) $\boxed{\text{c}}$

(50) $\boxed{\text{b}}$

(51) Per determinare gli estremanti locali di f occorre studiare il segno di f'. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ il denominatore di f' è positivo e il fattore $(x^3 - x^2 - 8x + 12)^2$ è non negativo, quindi il segno di $f'(x)$ coincide con il segno di $3x^2 - 2x - 8$. Tale trinomio si annulla per

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 3 \cdot 8}}{3} = \frac{1 \pm 5}{3} = \begin{cases} -\dfrac{4}{3} \\ 2\,. \end{cases}$$

Perciò $3x^2 - 2x - 8$ è positivo se $x \in \left]-\infty, -4/3\right[\cup \left]2, +\infty\right[$, mentre è negativo se $x \in \left]-4/3, 2\right[$. Quindi il segno di f' risulta dal seguente schema:

$$\begin{array}{lcccccc} & & -4/3 & & 2 & \\ f'(x) & + \;+\; + \;+ & | & - \;-\; - \;-\; - \;-\; - & | & + \;+\; + \;+ \end{array}$$

Perciò $-4/3$ è punto di massimo locale per f, mentre 2 è punto di minimo locale.

Non vi sono altri estremanti locali per f. Infatti se $c \in \mathbb{R} \setminus \{-4/3, 2\}$, allora esiste un intorno di c in cui f' non cambia segno, quindi in tale intorno f è monotona. Pertanto se c è estremante locale allora esiste un intervallo in cui f è costante. Infatti, se ad esempio c è punto di massimo locale e f è crescente, allora per la crescenza di f esiste un intervallo a destra di c in cui $f(x) \geq f(c)$, mentre fa la fatto che c è punto di massimo locale segue che esiste un intervallo a destra di c in cui $f(x) \leq f(c)$. Sull'intersezione dei due si ha $f(x) = f(c)$. Da ciò segue che esiste un intervallo in cui f ha derivata nulla, ma ciò è impossibile perché l'annullamento di $f'(x)$ equivale all'annullamento di un polinomio, che si annulla al più in un numero finito di punti.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(52) Poiché f è derivabile, stabiliamo in quale degli intervalli f è decrescente studiando dove f' è negativa.

Si ha, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \exp(-2x^2+3x) + x\ \exp(-2x^2+3x)(-4x+3) = (-4x^2+3x+1)\ \exp(-2x^2+3x)\,;$$

quindi, poiché l'esponenziale è sempre non negativo, si ha

$$f'(x) \leq 0 \iff -4x^2 + 3x + 1 \leq 0\,.$$

Il trinomio $-4x^2 + 3x + 1$ si annulla per

$$\frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot (-4) \cdot 1}}{-8} = \frac{-3 \pm 5}{-8} = \begin{cases} 1 \\ -\dfrac{1}{4} \end{cases} \quad .$$

Perciò il trinomio è non negativo per $x \in [-1/4, 1]$ mentre è non positivo per $x \in \left]-\infty, -1/4\right] \cup \left[1, +\infty\right[$.

Tra le possibili risposte, l'unico intervallo in cui f' assume sempre valore non positivo è $]-\infty,-1[$, quindi la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(53) Per il Test di monotonia, possiamo studiare la monotonia di f determinando il segno di f' .

Se $x \in\,]-\infty,-2[\,\cup\,]2,+\infty[$ allora

$$f'(x)=\frac{x\left(2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}\right)}{\sqrt{2x^2+56}\,\sqrt{x^2-4}}\,.$$

Il denominatore è positivo, perciò il segno di f' è determinato dal segno di x e da quello di $2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}$. Per $x\in \operatorname{dom} f'$ si ha

$$2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}\ge 0 \iff 2\sqrt{x^2-4}\ge\sqrt{2x^2+56} \iff 4x^2-16\ge 2x^2+56\,;$$

tale disuguaglianza equivale a $2x^2\ge 72$, quindi

$$2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}\ge 0 \iff x\in\,]-\infty,-6]\cup[6,+\infty[\ .$$

Perciò il segno di f' risulta dal seguente schema:

		-6		-2		2		6	
x	$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -$	|		|	$+\ +\ +$	|	$+\ +\ +$
$2\sqrt{x^2-4}-\sqrt{2x^2+56}$	$+\ +\ +$	|	$-\ -\ -$	|		|	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +$
$f'(x)$	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +$	|		|	$-\ -\ -$	|	$+\ +\ +$

Quindi f è crescente in $[-6,-2]$ e in $[6,+\infty[$ ed è decrescente in $]-\infty,-6]$ e in $[2,6]$.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(54) L'espressione di f' può essere trasformata in modo da semplificare i calcoli. Infatti si ha

$$f'(x)=\frac{(x^2-4)\operatorname{sgn}(x^2-4)+(x+1)x\operatorname{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}=\frac{(2x^2+x-4)\operatorname{sgn}(x^2-4)}{\sqrt{|x^2-4|}}\,.$$

Il trinomio $2x^2+x-4$ si annulla per

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2+4\cdot 2\cdot(-4)}}{2\cdot 2}=\frac{-1\pm\sqrt{33}}{4}\,.$$

Il polinomio x^2-4 si annulla per $x=\pm 2$. Il denominatore è sempre positivo. Pertanto il segno di f' risulta dal seguente schema

		-2		$\frac{-1-\sqrt{33}}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{33}}{4}$		2	
$2x^2+x-4$	$+\ +$	|	$+$	|	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +$	|	$+\ +$
$\operatorname{sgn}(x^2-4)$	$+\ +$	|	$-$	|	$-\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$-\ -$	|	$+\ +$
$f'(x)$	$+\ +$	|	$-$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +\ +$	|	$-\ -$	|	$+\ +$

Quindi -2 e $\left(-1+\sqrt{33}\right)/4$ sono punti di massimo locale, mentre $\left(-1-\sqrt{33}\right)/4$ e 2 sono punti di minimo locale.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(55) Si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2-3x)\,\mathrm{sgn}(x^2-3x)-(x+1)(2x-3)\,\mathrm{sgn}(x^2-3x)}{(x^2-3x)^2} = \\ &= \frac{(-x^2-2x+3)\,\mathrm{sgn}(x^2-3x)}{(x^2-3x)^2}\,. \end{aligned}$$

Il trinomio $-x^2-2x+3$ si annulla per $x=1$ e per $x=-3$. Il polinomio x^2-3x si annulla per $x=0$ e $x=3$. Il denominatore è sempre positivo. Pertanto il segno di f' risulta dal seguente schema

		-3		0		1		3	
$-x^2-2x+3$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$+$		$-\ -\ -$		$-\ -\ -$
$\mathrm{sgn}(x^2-3x)$	$+\ +\ +$		$+\ +\ +\ +\ +$		$-$		$-\ -\ -$		$+\ +\ +$
$f'(x)$	$-\ -\ -$		$+\ +\ +\ +\ +$		$-$		$+\ +\ +$		$-\ -\ -$

Poiché f è decrescente in un intervallo a sinistra di -3 e decrescente in un intervallo a destra di -3, tale punto è di minimo locale. Analogamente anche 1 è punto di minimo locale. I punti 0 e 3, poiché non appartengono al dominio, non sono estremanti locali.

Perciò la risposta è $\boxed{\text{b}}$.

(56) $\boxed{\text{c}}$

(57) $\boxed{\text{b}}$

(58) $\boxed{\text{a}}$

(59) $\boxed{\text{c}}$

(60) $\boxed{\text{d}}$

(61) L'integrale si calcola agevolmente per parti, integrando il fattore x e derivando il fattore $\log(3x)$. Poiché una primitiva della funzione $x \mapsto x$ è $x \mapsto x^2/2$ e la derivata di $x \mapsto \log(3x)$ è $x \mapsto \dfrac{1}{3x}3 = 1/x$ si ha

$$\begin{aligned} \int_1^2 x\log(3x)\,dx &= \left[\frac{x^2}{2}\log(3x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\log(3x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx = \\ &= \left[\frac{x^2}{2}\log(3x)\right]_1^2 - \left[\frac{x^2}{4}\right]_1^2 = 2\log 6 - \frac{1}{2}\log 3 - 1 + \frac{1}{4}\,. \end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(62) Scomponiamo la funzione integranda nella somma di frazioni più semplici. La scomposizione può essere fatta con un semplice trucco

$$\frac{x+3}{x(4x+3)} = \frac{4x+3-3x}{x(4x+3)} = \frac{4x+3}{x(4x+3)} + \frac{-3x}{x(4x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4x+3}\,.$$

Quindi una primitiva della funzione integranda è

$$x \mapsto \log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\,;$$

Pertanto l'integrale è uguale a

$$\left[\log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\right]_1^4 = \log|4| - \frac{3}{4}\log|4\cdot 4+3| - \log|1| + \frac{3}{4}\log|1\cdot 4+3| =$$
$$= \log 4 - \frac{3}{4}\log 19 + \frac{3}{4}\log 7\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(63) La funzione integranda è prodotto di una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo per la derivata del logaritmo; é quindi utile effettuare una sostituzione, prendendo come nuova variabile di integrazione $t = \log x$. Per $x = 1$ si ha $t = \log 1 = 0$, mentre per $x = e$ si ha $t = \log e = 1$. Pertanto risulta

$$\int_1^e \frac{\log x+1}{x(\log x+3)}\,dx = \int_0^1 \frac{t+1}{t+3}\,dt = \int_0^1 \frac{t+3-2}{t+3}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t+3}\right)dt =$$
$$= \big[t - 2\log|t+3|\big]_0^1 = 1 - 2\log 4 + 2\log 3\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(64) La funzione integranda è razionale, il grado del numeratore è maggiore del grado del denominatore, quindi scriviamola come somma di un polinomio più un quoziente di polinomi con il grado del numeratore minore del grado del denominatore. Questo può essere ottenuto facilmente senza fare, formalmente, la divisione tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore. Infatti si ha:

$$\frac{x^3+2x^2+5}{x^2+2x} = \frac{x^3+2x^2}{x^2+2x} + \frac{5}{x^2+2x} = x + \frac{5}{x^2+2x}\,.$$

Si ha $x^2+2x = x(x+2)$, quindi cerchiamo $a, b \in \mathbb{R}$ tali che

$$\frac{5}{x^2+2x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2}\,;$$

poiché

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} = \frac{a(x+2)+bx}{x(x+2)} = \frac{(a+b)x+2a}{x(x+2)}\,,$$

deve essere verificato il sistema

$$\begin{cases} a+b=0\,, \\ 2a=5\,. \end{cases}$$

Pertanto $a=5/2$ e $b=-5/2$. Quindi si ha

$$\int_1^2 \frac{x^3+2x^2+5}{x^2+2x}\,dx = \int_1^2 \left(x+\frac{5}{2}\,\frac{1}{x}-\frac{5}{2}\,\frac{1}{x+2}\right)\,dx =$$
$$= \left[\frac{1}{2}\,x^2+\frac{5}{2}\,\log|x|-\frac{5}{2}\,\log|x+2|\right]_1^2 =$$
$$= 2+\frac{5}{2}\,\log 2-\frac{5}{2}\,\log 4-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\,\log 1+\frac{5}{2}\,\log 3 = \frac{3}{2}+\frac{5}{2}\,\log\Big(\frac{3}{2}\Big)\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(65) La funzione integranda è razionale, il grado del numeratore è uguale a quello del denominatore, occorre quindi scomporre la frazione nella somma di un polinomio (che sarà necessariamente una costante) con una funzione razionale con numeratore di grado minore di quello del denominatore. Si ha

$$\frac{x^2+5}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x+1-2x+4}{(x+1)^2} = 1+\frac{-2x+4}{(x+1)^2}\,.$$

La frazione rimasta si può scomporre come segue

$$\frac{-2x+4}{(x+1)^2} = \frac{-2x-2+6}{(x+1)^2} = -\,\frac{2}{x+1}+\frac{6}{(x+1)^2}\,,$$

pertanto

$$\int_0^1 \frac{x^2+5}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{2}{x+1}+\frac{6}{(x+1)^2}\right)\,dx = \left[x-2\log|x+1|-\frac{6}{x+1}\right]_0^1 =$$
$$= 1-2\log 2-\frac{6}{2}-0+2\log 1+6 = 4-2\log 2\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{a}}$.

(66) $\boxed{\text{d}}$

(67) $\boxed{\text{a}}$

(68) $\boxed{\text{a}}$

(69) $\boxed{\text{b}}$

(70) $\boxed{\text{a}}$

(71) Sia $\phi(t) = 2\sin t$. Si ha $\phi'(t) = 2\cos t$ e, considerando $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, $t = \phi^{-1}(x) = \arcsin(x/2)$. Si ha $\phi^{-1}(0) = \arcsin 0 = 0$ e $\phi^{-1}(1) = \arcsin(1/2) = \pi/6$ e quindi l'integrale è uguale a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/6} \frac{2\sin t\sqrt{4-4\sin^2 t}+2}{\sqrt{4-4\sin^2 t}+2}\, 2\cos t\, dt &= \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin t\cos t+2}{2\cos t+2}\, 2\cos t\, dt \\ &= \int_0^{\pi/6} \frac{4\sin t\cos^2 t+2\cos t}{\cos t+1}\, dt\,.\end{aligned}$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(72) Se si effettua la sostituzione $t = \sqrt{x}$ allora è $x = t^2$. Quindi sia $\phi(t) = t^2$. Allora $\phi^{-1}(x) = \sqrt{x}$ e $\phi'(t) = 2t$ Inoltre $\phi^{-1}(3) = \sqrt{2}$ e $\phi^{-1}(3) = \sqrt{3}$, perciò si ha

$$\int_2^3 xe^{\sqrt{x}}\, dx = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} t^2 e^t 2t\, dt = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2t^3 e^t\, dt\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{d}}$.

(73) Se $t = e^x$ si ha $x = \log t$. Quindi sia $\phi(t) = \log t$. Allora $\phi^{-1}(t) = e^x$ e $\phi'(t) = 1/t$. Inoltre $\phi^{-1}(0) = e^0 = 1$ e $\phi^{-1}(1) = e^1 = e$. Con la sostituzione gli estremi di integrazione diventano quindi 1 ed e e, per la definizione delle funzioni seno iperbolico e coseno iperbolico, l'integrale diventa:

$$\int_1^e \frac{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)+4\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)-\frac{1}{2}\left(t-.\frac{1}{t}\right)}\,\frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \frac{5t-\frac{3}{t}}{\frac{2}{t}}\,\frac{1}{t}\, dt = \int_1^e \frac{5t^2-3}{2t}\, dt\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{c}}$.

(74) Una primitiva della funzione $x \mapsto x^5$ è la funzione $x \mapsto x^6/6$, mentre la derivata della funzione $x \mapsto \log(3+x^2)$ è $\mapsto 2x/(3+x^2)$, pertanto

$$\int_1^2 x^5 \log(3+x^2)\, dx = \left[\frac{1}{6}\, x^6 \log(3+x^2)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{6}\, x^6\, \frac{2x}{3+x^2}\, dx\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{e}}$.

(75) Una primitiva della funzione $x \mapsto 2e^{2x}$ è la funzione $x \mapsto e^{2x}$, la derivata di $x \mapsto \arctan(2+e^x)$ è

$$x \mapsto \frac{e^x}{1+(2+e^x)^2} = \frac{e^x}{5+4e^x+e^{2x}}\,,$$

pertanto

$$\int_0^1 2e^{2x} \arctan(2+e^x)\,dx = \big[e^{2x} \arctan(2+e^x)\big]_0^1 - \int_0^1 e^{2x}\,\frac{e^x}{5+4e^x+e^{2x}}\,dx\,.$$

Perciò la risposta è $\boxed{\text{e}}$.

(76) $\boxed{\text{a}}$

(77) $\boxed{\text{a}}$

(78) $\boxed{\text{b}}$

(79) $\boxed{\text{e}}$

(80) $\boxed{\text{b}}$

(81) La funzione di cui vogliamo calcolare il limite è somma di due funzioni, ciascuna delle quali ha numeratore uguale a 1 e denominatore che tende a 0. Per stabilire il limite di ciascun addendo occorre studiare il segno dei denominatori vicino a 0. Evidentemente per x in un opportuno intorno di 0, escluso 0, si ha $\cos x - 1 < 0$ e $4+x^2>0$, perciò $(\cos x-1)(4+x^2)<0$ e dunque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{(\cos x-1)(4+x^2)} = -\infty\,;$$

inoltre (sempre per x in un intorno di 0, ma diverso da 0) si ha $2x\,\sin x + x^4 > 0$, perché somma di numeri maggiori di 0, e quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2x\,\sin x + x^4} = +\infty\,;$$

perciò il limite è nella forma indeterminata $-\infty+\infty$.

Per calcolare il limite occorre studiare il comportamento per $x \to 0$ dei due denominatori. Si ha

$$\begin{aligned}(\cos x-1)(4+x^2) &= \Big(-\frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^5)\Big)(4+x^2) = \\ &= -2\,x^2 + \frac{1}{6}\,x^4 + o(x^5) - \frac{1}{2}\,x^4 + \frac{1}{24}\,x^6 + o(x^7) = -2x^2 - \frac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\end{aligned}$$

e

$$2x\,\sin x + x^4 = 2x\Big(x - \frac{1}{6}\,x^3 + o(x^4)\Big) + x^4 = 2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\,.$$

Perciò

$$\frac{1}{(\cos x - 1)(4 + x^2)} + \frac{1}{2x\,\sin x + x^4} = \frac{1}{-2x^2 - \dfrac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)} + \frac{1}{2x^2 + \dfrac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)} =$$

$$= \frac{2x^2 + \dfrac{2}{3}\,x^4 + o(x^5) - 2x^2 - \dfrac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)}{\Big(-2x^2 - \dfrac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\Big)\Big(2x^2 + \dfrac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\Big)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)}{\Big(-2x^2 - \dfrac{1}{3}\,x^4 + o(x^5)\Big)\Big(2x^2 + \dfrac{2}{3}\,x^4 + o(x^5)\Big)} \sim \frac{\dfrac{1}{3}\,x^4}{-4x^4} = -\frac{1}{12}\,.$$

Quindi il limite cercato è uguale a $-(1/12)$.

(82) Il limite è nella forma indeterminata $0/0$.

Studiamo il denominatore. Si ha

$$\cos(2x) - \exp(-2x^2) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\,(2x)^2 + \frac{1}{24}\,(2x)^4 + o\big((2x)^5\big) - \bigg(1 - 2x^2 + \frac{1}{2}\,(-2x^2)^2 + o\big((-2x^2)^2\big)\bigg) =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}\,x^4 + o(x^5) - \big(1 - 2x^2 + 2x^4 + o(x^4)\big) \sim -\frac{4}{3}\,x^4\,.$$

Studiamo ora il numeratore. Si ha

$$2\cos x - x^2 = 2\Big(1 - \frac{1}{2}\,x^2 + \frac{1}{24}\,x^4 + o(x^5)\Big) - x^2 = 2 - 2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\,;$$

perciò

$$\exp(2\cos x - x^2) = \exp\Big(2 - 2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)\,.$$

L'esponente tende a 2 per $x \to 0$, quindi è utile scomporre l'esponenziale nel prodotto di due esponenziali, il primo con esponente 2, il secondo con esponente che tende a 0, cioè

$$\exp(2\cos x - x^2) = e^2 \exp\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)\,.$$

Inoltre

$$\exp\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big) =$$

$$= 1 + \Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big) + \frac{1}{2}\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)^2 +$$

$$+ o\bigg(\Big(-2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + o(x^5)\Big)^2\bigg) =$$

$$= 1 - 2x^2 + \frac{1}{12}\,x^4 + 2x^4 + o(x^4) = 1 - 2x^2 + \frac{25}{12}\,x^4 + o(x^4)\,,$$

perciò

$$\exp(2\cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2 = e^2\Big(1 - 2x^2 + \frac{25}{12}\,x^4 + o(x^4)\Big) - e^2 + 2e^2x^2 \sim \frac{25e^2}{12}\,x^4\,.$$

Quindi per $x \to 0$ si ha

$$\frac{\exp(2\cos x - x^2) - e^2 + 2e^2x^2}{\cos(2x) - \exp(-2x^2)} \sim \frac{\dfrac{25e^2}{12}\,x^4}{-\dfrac{4}{3}\,x^4} = -\,\frac{25e^2}{16}\,;$$

pertanto il limite cercato è uguale a $-\,\dfrac{25e^2}{16}$.

(83) Per $x \to +\infty$ si ha

$$\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} = x\,\sqrt[3]{1 + \frac{9}{x}} = x\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{9}{x} - \frac{1}{9}\left(\frac{9}{x}\right)^2 + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = x + 3 - 9x^{-1} + o(x^{-1})\,,$$

pertanto

$$\sqrt[3]{x^3 + 9x^4} - x - 3 = x + 3 - 9x^{-1} + o(x^{-1}) - x - 3 \sim -9x^{-1}\,.$$

Inoltre

$$\log\big(3\cosh(5x)\big) = \log\left(\frac{3}{2}\big(e^{5x} + e^{-5x}\big)\right) = \log\left(\frac{3}{2}\,e^{5x}\big(1 + e^{-10x}\big)\right) =$$

$$= \log\frac{3}{2} + 5x + \log\big(1 + e^{-10x}\big) \sim 5x\,.$$

Infine

$$\log\left(\frac{3+x}{x}\right) = \log\left(1 + \frac{3}{x}\right) = \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2})\,,$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{3+x}{x}\right) - \frac{3}{x+5} &= \frac{3}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) - \frac{3}{x+5} = \\
&= \frac{3(x+5) - 3x}{x(x+5)} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2 + 5x} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \\
&= \frac{15}{x^2\big(1 + o(1)\big)} - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \frac{15}{x^2}\big(1 + o(1)\big) - \frac{1}{2}\,\frac{9}{x^2} + o(x^{-2}) = \\
&= \frac{30 - 9}{2x^2} + o(x^{-2}) \sim \frac{21}{2}\,x^{-2}\,.
\end{aligned}$$

Perciò

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 9x^2} - x - 3}{\log\big(3\cosh(5x)\big)\left(\log\left(\dfrac{3+x}{x}\right) - \dfrac{3}{x+5}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-9x^{-1}}{5x\,\dfrac{21}{2}\,x^{-2}} = -\,\frac{18}{105} = -\,\frac{6}{35}\,.$$

(84) Studiamo il comportamento dei fattori a numeratore per $x \to +\infty$.

Poiché, per $x \to +\infty$, $e^{4x} \to +\infty$ mentre $e^{-4x} \to 0$, si ha

$$\sinh(4x) = \frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \sim \frac{1}{2}\, e^{4x}\,.$$

Analogamente $e^{2x} \to +\infty$ e $e^{-2x} \to 0$, quindi

$$\begin{aligned}
&\log\bigl(\sinh(2x)\bigr) + \log 2 - 2x = \log\left(\frac{e^{2x} - e^{-2x}}{2}\right) + \log 2 - 2x = \\
&= \log\bigl(e^{2x}(1 - e^{-4x})\bigr) - \log 2 + \log 2 - 2x = \log\bigl(e^{2x}\bigr) + \log\bigl(1 - e^{-4x}\bigr) - 2x = \\
&= \log(1 - e^{-4x}) \sim -e^{-4x}\,.
\end{aligned}$$

Raccogliendo il termine dominante in ciascuna radice si ha

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[2]{x^2 + 3x} = \sqrt[3]{x^3(1 + 3x^{-1})} - \sqrt[2]{x^2(1 + 3x^{-1})} = \\
&= x\,\sqrt[3]{1 + 3x^{-1}} - x\sqrt[2]{1 + 3x^{-1}} = \\
&= x\left(1 + \frac{1}{3}\,3x^{-1} + o\bigl(x^{-1}\bigr) - \left(1 + \frac{1}{2}\,3x^{-1} + o\bigl(x^{-1}\bigr)\right)\right) = \\
&= x\left(-\frac{1}{2}\,x^{-1} + o\bigl(x^{-1}\bigr)\right) = -\frac{1}{2} + o(1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\frac{1}{2}\,.
\end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned}
&\sinh(4x)\Bigl(\log\bigl(\sinh(2x)\bigr) + \log 2 - 2x\Bigr)\left(\sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt[2]{x^2 + 3x}\right) \sim \\
&\sim \frac{1}{2}\, e^{4x}(-e^{-4x})\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\,.
\end{aligned}$$

Studiamo il comportamento del denominatore. Si ha $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan(2x) = \pi/2$. Per $x \to +\infty$ si ha $1/x \to 0$, quindi

$$\log\left(\cos\frac{1}{x}\right) = \log\left(1 - \frac{1}{2x^2} + o\bigl(x^{-3}\bigr)\right) \sim -\frac{1}{2x^2} + o\bigl(x^{-3}\bigr) \sim -\frac{1}{2x^2}\,.$$

Infine

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^2 + 4} &= x^2\,\sqrt{1 + x^{-2}} - x\,\sqrt{1 + 4x^{-2}} = \\
&= x^2\left(\sqrt{1 + x^{-2}} - x^{-1}\,\sqrt{1 + 4x^{-2}}\right) \sim x^2\,.
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\arctan(2x)\log\left(\cos\frac{1}{x}\right)\left(\sqrt{x^4 + x^2} - \sqrt{x^2 + 4}\,\right) \sim \frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2x^2}\right)x^2 = -\frac{\pi}{4}\,.$$

Numeratore e denominatore hanno limite reale, pertanto il limite è uguale al quoziente tra limite del numeratore e limite del denominatore, cioè è uguale a

$$\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\pi}\,.$$

(85) $\quad \dfrac{1}{5}$

(86) $\quad 2$

(87) $\quad 4e^6$

(88) $\quad -\dfrac{5e^3}{27(\cos 1 - 1)}$

(89) La funzione è definita per tutti gli x per cui non si annulla il denominatore dell'argomento dell'esponenziale, cioè per gli x diversi da 0. Quindi si ha $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}^*$.

Studiamo il comportamento di f negli estremi degli intervalli che costituiscono il dominio della funzione. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} (x+6)\,e^1 = -\infty\,,\\
\lim_{x\to0^-} f(x) &= 6\lim_{x\to0^-} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = 0\,,\\
\lim_{x\to0^+} f(x) &= 6\lim_{x\to0^+} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty\,,\\
\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty} (x+6)\,e^1 = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Studiamo l'intersezione del grafico di f con gli assi cartesiani. Poiché 0 non appartiene al dominio della funzione non c'è intersezione con l'asse delle ordinate. L'equazione $f(x) = 0$ equivale a $x + 6 = 0$ (perchè un esponenziale non si annulla) e quindi la funzione si annulla solo per $x = -6$; inoltre la funzione è positiva se e solo se $x > -6$.

Passiamo ora a studiare la derivata della funzione.

Le funzioni tramite cui è definita la f sono derivabili in ogni punto del loro dominio, quindi f è derivabile sul suo dominio e si ha:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) + (x+6)\,\exp\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{1\cdot x - 1(x+1)}{x^2} =\\
&= \left(1 - (x+6)\frac{1}{x^2}\right)\exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2-x-6}{x^2}\,\exp\left(\frac{x+1}{x}\right).
\end{aligned}$$

Poiché $\forall x \in \operatorname{dom} f'$ si ha $x^2 > 0$ e l'esponenziale è maggiore di 0, il segno e gli zeri di f' si trovano studiando il trinomio $x^2 - x - 6$. Tale trinomio si annulla per

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-6)}}{2} = \frac{1\pm5}{2}$$

e si hanno le due soluzioni $x = -2$ e $x = 3$. Quindi

$$f'(x) = 0 \iff x = -2 \text{ o } x = 3$$

e il segno di f' risulta dal seguente schema:

		-2		0		3	
$f'(x)$	$+\ +\ +$	|	$-\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +$

e quindi f è crescente negli intervalli $]-\infty,-2[$ e $]3,+\infty[$, mentre è decrescente negli intervalli $]-2,0[$ e $]0,3[$. Inoltre 3 è un punto di minimo locale, mentre -2 è un punto di massimo locale.

Poiché $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ esiste reale, per studiare l'andamento della funzione, è utile calcolare $\lim_{x\to 0^-} f'(x)$. Per $x \to 0^-$ risulta

$$f'(x) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2} \exp\left(\frac{x+1}{x}\right) = \frac{x^2 - x - 6}{x^2}\, e \exp\left(\frac{1}{x}\right) \sim -6e\,\frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

e

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} \exp\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y\to -\infty} y^2 e^y = 0\,.$$

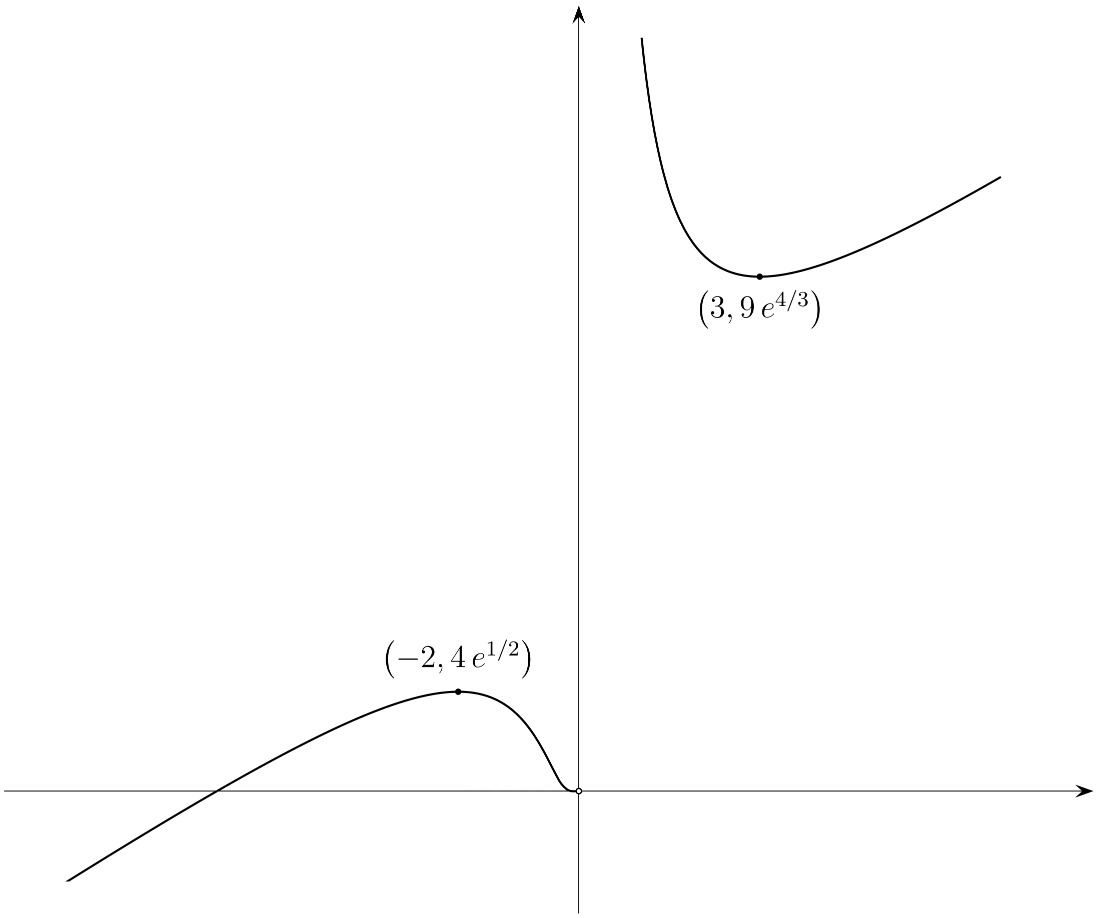
Pertanto $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 0$.

Calcoliamo il valore di f negli estremanti locali.

$$f(-2) = (-2+6) \exp\left(\frac{-2+1}{-2}\right) = 4\, e^{1/2}\,,$$

$$f(3) = (3+6) \exp\left(\frac{3+1}{3}\right) = 9\, e^{4/3}\,.$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente:



(90) Il dominio naturale di f è $\mathbb{R}$, poiché essa è definita da una formula in cui (oltre a somme e prodotti) compare solo la funzione valore assoluto, che ha dominio $\mathbb{R}$.

La funzione è continua.
Studiamo il comportamento negli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |2x^3| \left(\left| 1 - \frac{9}{2}x^{-2} \right| + \frac{9x}{|2x^3|} \right) = +\infty\,,$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} |2x^3| \left(\left| 1 - \frac{9}{2}x^{-2} \right| + \frac{9x}{|2x^3|} \right) = +\infty\,.$$

Cerchiamo le intersezioni del grafico di f con gli assi. Si ha $f(0) = 0$, quindi il grafico interseca l'asse delle ordinate nell'origine. Inoltre $f(x) = 0$ se e solo se $|2x^3 - 9x| = -9x$; il valore assoluto è sempre non negativo, quindi deve essere $-9x \geq 0$, cioè $x \leq 0$. Quindi $f(x)$ è nullo se x è non positivo e verifica una delle due equazioni $2x^3 - 9x = -9x$ e $2x^3 - 9x = 9x$. La prima equazione è verificata solo per $x = 0$, la seconda si trasforma in $2x^3 - 18x = 0$ e quindi ha le soluzioni $x = 0$, $x = -3$ e $x = 3$. Poiché deve essere $x \leq 0$, possiamo concludere che f si annulla in 0 e in -3.

Passiamo ora allo studio di f'. La funzione f è derivabile in tutti i punti che non annullano l'argomento del valore assoluto, cioè tali che $2x^3 - 9x \neq 0$. Si ha $2x^3 - 9x = x(2x^2 - 9)$, quindi $2x^3 - 9x$ si annulla per $x = 0$ e per $x = \pm 3/\sqrt{2}$. Perciò f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \left\{ -3/\sqrt{2}, 0, 3/\sqrt{2} \right\}$, mentre occorre studiare a parte la derivabilità nei punti $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$. Inoltre

$$f'(x) = (6x^2 - 9)\,\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x) + 9\,.$$

Per studiare il segno di f' è utile anzitutto determinare per quali x risulta $\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x) = 1$ e per quali x risulta $\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x) = -1$. Si ha

$$2x^3 - 9x = 2x\left(x + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\left(x - \frac{3}{\sqrt{2}}\right),$$

il segno di $2x^3 - 9x$ risulta dal seguente schema:

		$-\frac{3}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{3}{\sqrt{2}}$	
$2x$	$- - -$		$- - - - -$		$+ + + + +$		$+ + +$
$x + \frac{3}{\sqrt{2}}$	$- - -$		$+ + + + +$		$+ + + + +$		$+ + +$
$x - \frac{3}{\sqrt{2}}$	$- - -$		$- - - - -$		$- - - - -$		$+ + +$
$2x^3 - 9x$	$- - -$		$+ + + + +$		$- - - - -$		$+ + +$

perciò $\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x) = 1$ se $x \in \left]-3/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]3/\sqrt{2}, +\infty\right[$, e $\mathrm{sgn}(2x^3 - 9x) = -1$ se $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]0, 3/\sqrt{2}\right[$.

Calcoliamo il limite della derivata nei punti $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ per determinare la derivabilità di f in tali punti.

$$\lim_{x\to-3/\sqrt{2}^-} f'(x) = \lim_{x\to-3/\sqrt{2}^-} -(6x^2 - 9) + 9 = -9\,,$$
$$\lim_{x\to-3/\sqrt{2}^+} f'(x) = \lim_{x\to-3/\sqrt{2}^+} (6x^2 - 9) + 9 = 27\,,$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f'(x) &= \lim_{x\to 0^-} (6x^2-9)+9 = 0\,, \\
\lim_{x\to 0^+} f'(x) &= \lim_{x\to 0^+} -(6x^2-9)+9 = 18\,, \\
\lim_{x\to 3/\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x\to 3/\sqrt{2}^-} -(6x^2-9)+9 = -9\,, \\
\lim_{x\to 3/\sqrt{2}^+} f'(x) &= \lim_{x\to 3/\sqrt{2}^+} (6x^2-9)+9 = 27\,.
\end{aligned}
$$

In ciascuno dei punti considerati il limite sinistro di f' è diverso dal limite destro, ciò è vero anche per i limiti dei rapporti incrementali, perciò essi non hanno limite. Quindi $-3/\sqrt{2}$, 0 e $3/\sqrt{2}$ sono punti di non derivabilità per f.

Studiamo ora il segno di f'.

Se $x \in \left]-3/\sqrt{2}, 0\right[\cup \left]3/\sqrt{2}, +\infty\right[$, allora si ha

$$f'(x) = (6x^2-9)+9 = 6x^2\,;$$

poiché $x \neq 0$, risulta $f'(x) > 0$. Se $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]0, 3/\sqrt{2}\right[$, allora si ha

$$f'(x) = -(6x^2-9)+9 = -6x^2+18 = 6(-x^2+3)\,,$$

che è positivo per $x \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$ e negativo per $x \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ e quindi, tenuto conto delle condizioni a cui deve soddisfare x, abbiamo $f'(x) > 0$ per $x \in \left]0, \sqrt{3}\right[$ e $f'(x) < 0$ per $x \in \left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right[\cup \left]\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}\right[$.

Complessivamente, il segno di f' è dato dal seguente schema:

$$
\begin{array}{lccccccccc}
 & & -\frac{3}{\sqrt{2}} & & 0 & & \sqrt{3} & & \frac{3}{\sqrt{2}} & \\
f'(x) & - \; - \; - & | & + \; + \; + \; + \; + \; + & | & + \; + \; + \; + \; + & | & - & | & + \; + \; +
\end{array}
$$

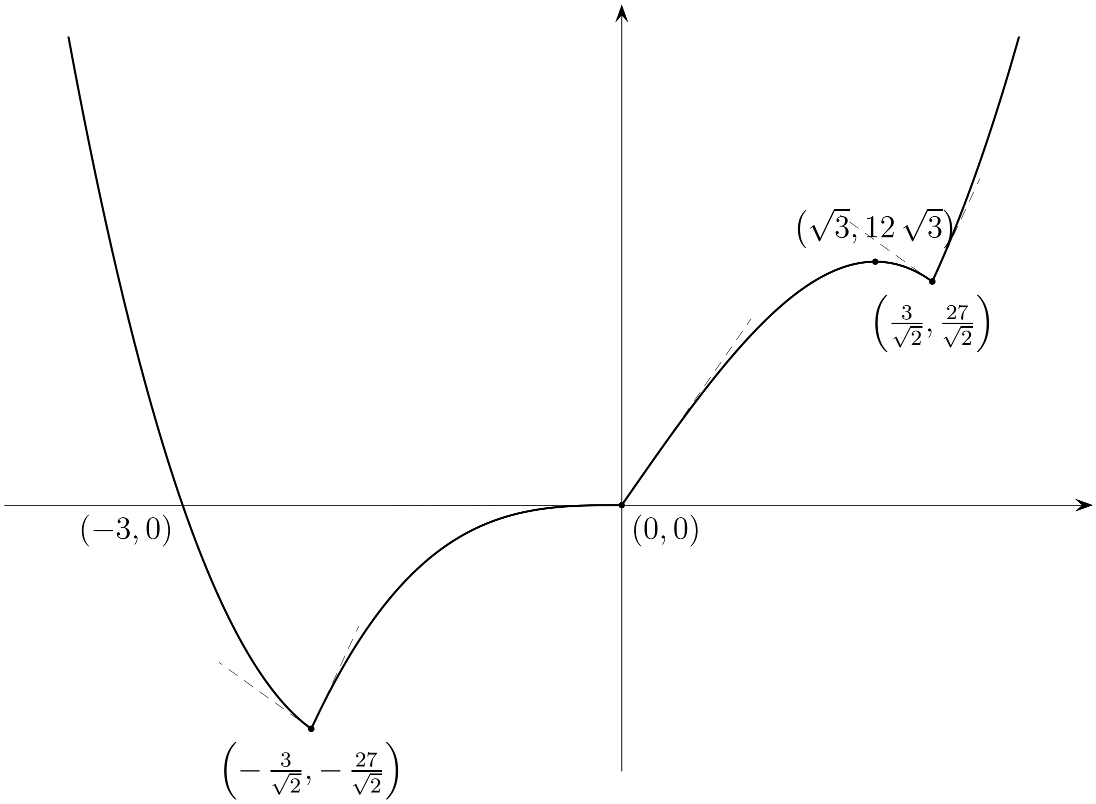
Pertanto f è crescente in $\left[-3/\sqrt{2}, 0\right]$, in $\left]0, 3/\sqrt{2}\right[$ e in $\left[3/\sqrt{2}, +\infty\right[$ ed è decrescente in $\left]-\infty, -3/\sqrt{2}\right]$ e in $\left[\sqrt{3}, 3/\sqrt{2}\right]$.

Inoltre $-3/\sqrt{2}$ e $3/\sqrt{2}$ sono punti di minimo locale per f, mentre $\sqrt{3}$ è un punto di massimo locale.

Il valore di f in tali punti è:

$$
\begin{aligned}
f\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \left|2\left(-\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 + 9\,\frac{3}{\sqrt{2}}\right| - 9\,\frac{3}{\sqrt{2}} = \left|-\frac{27}{\sqrt{2}} + \frac{27}{\sqrt{2}}\right| - \frac{27}{\sqrt{2}} = -\frac{27}{\sqrt{2}} \\
f\left(\sqrt{3}\right) &= \left|2\left(\sqrt{3}\right)^3 - 9\sqrt{3}\right| + 9\sqrt{3} = \left|6\sqrt{3} - 9\sqrt{3}\right| + 9\sqrt{3} = 12\sqrt{3}\,, \\
f\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) &= \left|2\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^3 - 9\,\frac{3}{\sqrt{2}}\right| + 9\,\frac{3}{\sqrt{2}} = \left|\frac{27}{\sqrt{2}} - \frac{27}{\sqrt{2}}\right| + \frac{27}{\sqrt{2}} = \frac{27}{\sqrt{2}}\,.
\end{aligned}
$$

Perciò il grafico di f è, approssimativamente, il seguente:



(91) Poiché la funzione arcoseno ha dominio $[-1,1]$, il dominio naturale di f è $\{\, x \in \mathbb{R} \mid |x^2+4x+3| \in [-1,1] \}$.

Poiché $|x^2+4x+3| \geq 0$ per qualunque x, si ha

$$-1 \leq |x^2+4x+3| \leq 1 \iff |x^2+4x+3| \leq 1$$

e questo equivale a $-1 \leq x^2+4x+3 \leq 1$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^2+4x+3 \leq 1 \\ x^2+4x+3 \geq -1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x^2+4x+2 \leq 0 \\ x^2+4x+4 \geq 0\,. \end{cases}$$

Troviamo anzitutto le radici dei due polinomi che compaiono nelle disequazioni. L'equazione $x^2+4x+2=0$ ha le soluzioni

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 2} = -2 \pm \sqrt{2}$$

mentre l'equazione $x^2+4x+4=0$ ha la sola soluzione

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2 - 1 \cdot 4} = -2\,.$$

La prima disequazione è quindi soddisfatta se $x \in \left[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right]$, mentre la seconda è soddisfatta per ogni x reale, possiamo quindi concludere che

$$\operatorname{dom} f = \left[-2-\sqrt{2}, -2+\sqrt{2}\right]\,.$$

Poiché f è composizione di funzioni continue, è continua.
Calcoliamo i valori della funzione negli estremi del dominio.

$$\begin{aligned} f\big((-2-\sqrt{2}\,\big) &= \arcsin\left|\big((-2-\sqrt{2}\,\big)^2+4\big((-2-\sqrt{2}\,\big)+3\right| = \\ &= \arcsin\left|4+4\sqrt{2}+2-8-4\sqrt{2}+3\right| = \arcsin|1| = \frac{\pi}{2} \\ f\big(-2+\sqrt{2}\big) &= \arcsin\left|\big(-2+\sqrt{2}\big)^2+4\big(-2+\sqrt{2}\big)+3\right| = \\ &= \arcsin\left|4-4\sqrt{2}+2-8+4\sqrt{2}+3\right| = \arcsin|1| = \frac{\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Il grafico della funzione non interseca l'asse delle ordinate perché $0 \notin \operatorname{dom} f$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse; si ha $f(x) = 0$ se e solo se

$$\arcsin|x^2+4x+3| = 0\,,$$

che equivale a $x^2+4x+3=0$. Questo trinomio si annulla per

$$x = -2 \pm \sqrt{2^2-1\cdot 3} = -2 \pm 1$$

cioè per $x=-3$ e $x=-1$.

Poiché la funzione arcoseno assume valori non negativi quando il suo argomento è non negativo, la funzione f è sempre non negativa.

La funzione f è composizione di funzioni derivabili su tutto il dominio, con l'esclusione della funzione valore assoluto che non è derivabile in 0 e della funzione arcoseno che non è derivabile in 1 e in -1. La funzione f è quindi derivabile per ogni valore di x tale che $x^2+4x+3 \neq 0$ e $|x^2+4x+3| \neq 1$ mentre l'argomento dell'arcoseno, essendo non negativo, è sempre diverso da -1. -1. Come già trovato in precedenza $x^2+4x+3=0$ per $x=-3$ e per $x=-1$. Si ha $|x^2+4x+3|=1$ se e solo se $x^2+4x+3=1$ oppure $x^2+4x+3=-1$, tali equazioni, già risolte quando si è determinato il dominio di f, hanno le soluzioni $x=-2-\sqrt{2}$ e $x=-2+\sqrt{2}$ la prima e $x=-2$ la seconda.

Possiamo quindi concludere che f è certamente derivabile sull'insieme

$$\operatorname{dom} f \setminus \Big\{-2-\sqrt{2}, -3, -2, -1, -2+\sqrt{2}\Big\}$$

mentre la derivabilità nei punti $-2-\sqrt{2}$, -3, -2, -1, $-2+\sqrt{2}$ sarà studiata in seguito.

Per $x \in \operatorname{dom} f \setminus \big\{-2-\sqrt{2}, -3, -2, -1, -2+\sqrt{2}\big\}$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-|x^2+4x+3|^2}}\,\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,(2x+4) = \\ &= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2x+4}{\sqrt{\big(1-(x^2+4x+3)\big)\big(1+(x^2+4x+3)\big)}} = \\ &= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2x+4}{\sqrt{(-x^2-4x-2)(x^2+4x+4)}} = \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2x+4}{\sqrt{(-x^2-4x-2)(x+2)^2}} = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\,\frac{2(x+2)}{|x+2|\sqrt{-x^2-4x-2}} = \\
&= \operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\ \operatorname{sgn}(x+2)\,\frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}}\,.
\end{aligned}
$$

Prima di studiare il comportamento della derivata nei punti $-2-\sqrt{2}$, -3, -2, -1, $-2+\sqrt{2}$ è utile studiare il prodotto $\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)$.

	$-2-\sqrt{2}$		-3		-2		-1		$-2+\sqrt{2}$
$\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)$	|	$+$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$+$	|
$\operatorname{sgn}(x+2)$	|	$-$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$+\ +\ +\ +$	|	$+$	|
$\operatorname{sgn}(x^2+4x+3)\operatorname{sgn}(x+2)$	|	$-$	|	$+\ +\ +\ +$	|	$-\ -\ -\ -$	|	$+$	|

Quindi si ha

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to -2-\sqrt{2}^+} f'(x) &= -\lim_{x\to -2-\sqrt{2}^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -\infty\,,\\
\lim_{x\to -3^-} f'(x) &= -\lim_{x\to -3^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -2\,,\\
\lim_{x\to -3^+} f'(x) &= \lim_{x\to -3^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = 2\,,\\
\lim_{x\to -2^-} f'(x) &= \lim_{x\to -2^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = \sqrt{2}\,,\\
\lim_{x\to -2^+} f'(x) &= -\lim_{x\to -2^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -\sqrt{2}\,,\\
\lim_{x\to -1^-} f'(x) &= -\lim_{x\to -3^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = -2\,,\\
\lim_{x\to -1^+} f'(x) &= \lim_{x\to -3^+} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = 2\,,\\
\lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} f'(x) &= \lim_{x\to -2+\sqrt{2}^-} \frac{2}{\sqrt{-x^2-4x-2}} = +\infty\,.
\end{aligned}
$$

Poiché il limite della derivata (se esiste) coincide con il limite del rapporto incrementale, risulta che f non è derivabile in nessuno dei punti elencati sopra. Infatti, da quanto scritto sopra segue che nei due estremi del dominio il limite del rapporto incrementale non è reale, mentre in tutti gli altri punti il limite sinistro del rapporto incrementale è diverso dal limite destro.

Inoltre il valore della funzione in tali punti di non derivabilità, ricordando che abbiamo $f\left(-2-\sqrt{2}\right) = f\left(-2+\sqrt{2}\right) = \pi/2$ è

$$
\begin{aligned}
f(-3) &= \arcsin|(-3)^2+4\cdot(-3)+3| = \arcsin|0| = 0\,,\\
f(-2) &= \arcsin|(-2)^2+4\cdot(-2)+3| = \arcsin|-1| = \frac{\pi}{2}\,,
\end{aligned}
$$

$$f(-1) = \arcsin |(-1)^2 + 4 \cdot (-1) + 3| = \arcsin |0| = 0\,.$$

La funzione f' non si annulla mai, infatti essa è prodotto di funzioni segno calcolate in punti diversi da 0 e di un quoziente con numeratore diverso da 0. Inoltre, per $x \in \operatorname{dom} f'$, si ha

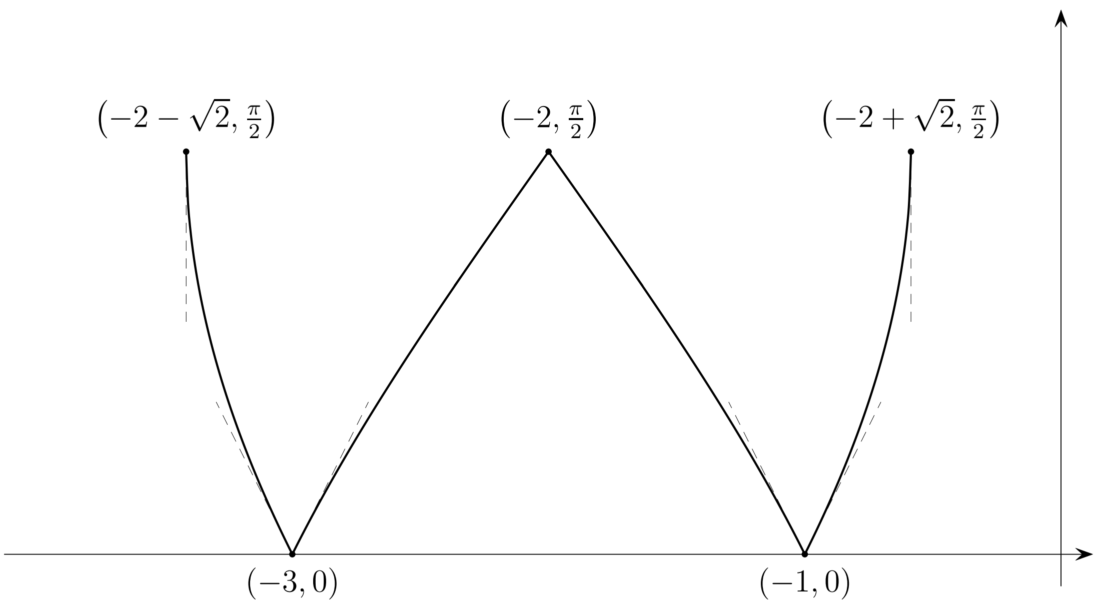
$$f'(x) \geq 0 \iff \operatorname{sgn}(x^2 + 4x + 3)\operatorname{sgn}(x + 2) \geq 0\,;$$

pertanto, visto lo studio fatto sopra,

	$-2-\sqrt{2}$		-3		-2		-1		$-2+\sqrt{2}$
$f'(x)$	|	$-\ \ -$	|	$+\ +\ +\ +\ +\ +$	|	$-\ -\ -\ -\ -\ -$	|	$+\ \ +$	|

Quindi f è crescente negli intervalli $[-3, -2]$ e $\left[-1, -2+\sqrt{2}\right]$, è decrescente negli intervalli $\left[-2-\sqrt{2}, -3\right]$ e $[-2, -1]$; inoltre $-2-\sqrt{2}$, -2 e $-2+\sqrt{2}$ sono punti di massimo locale per f, mentre -3 e -1 sono punti di minimo locale per f.

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



(92) La funzione è definita per gli x reali tali che $x \neq 0$, (perché per $x = 0$ si annulla il denominatore dell'esponente) e tali che $|x+5|-1 \geq 0$. Si ha $|x+5|-1 \geq 0$ se e solo se $|x+5| \geq 1$ e ciò è verificato se $x+5 \geq 1$ oppure $x+5 \leq -1$. $x \geq -4$ o $x \leq -6$. Pertanto

$$\operatorname{dom} f = \left]-\infty, -6\right] \cup \left[-4, 0\right[\cup \left]0, +\infty\right[\,.$$

La funzione f è prodotto di composizioni di funzioni continue, quindi è continua.

Studiamo ora il comportamento della funzione negli estremi degli intervalli che ne costituiscono il dominio.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty\,,$$

$$f(-6) = e^{-1/6}\sqrt{|-6+5|-1} = 0\,,$$

$$\begin{aligned}
f(-4) &= e^{-1/4}\sqrt{|-4+5|-1} = 0\,,\\
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= 0\,,\\
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= +\infty\,,\\
\lim_{x\to +\infty} f(x) &= +\infty\,.
\end{aligned}$$

Il grafico di f non interseca l'asse delle ordinate perché $0 \notin \operatorname{dom} f$. Cerchiamo le intersezioni con l'asse delle ascisse. Si ha $f(x) = 0$ se e solo se $\sqrt{|x+5|-1} = 0$, cioè $|x+5|-1 = 0$ che è verificato se $x = -6$ o $x = -4$.

Poiché è prodotto di funzioni che assumono valori non negativi, f ha sempre valori non negativi.

La funzione è derivabile in tutto il dominio, con l'esclusione dei valori x che annullano $x+5$ (visto che la funzione valore assoluto non è derivabile in 0) o che annullano $|x+5|-1$ (visto che la funzione radice non è derivabile in 0). $x+5$ si annulla per $x = -5$, valore che non appartiene a $\operatorname{dom} f$, mentre $|x+5|-1$, come già calcolato, si annulla per $x = -6$ e per $x = -4$. Pertanto f è derivabile in $]-\infty, -6[\,\cup\,]-4, 0[\,\cup\,]0, +\infty[$ mentre la derivabilità in -6 e in -4 verrà studiata in seguito.

Si ha

$$\begin{aligned}
f'(x) &= e^{1/x}\,\frac{-1}{x^2}\,\sqrt{|x+5|-1} + e^{1/x}\,\frac{1}{2\sqrt{|x+5|-1}}\operatorname{sgn}(x+5) =\\
&= e^{1/x}\,\frac{-2(|x+5|-1) + x^2\operatorname{sgn}(x+5)}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}} =\\
&= e^{1/x}\,\frac{-2((x+5)\operatorname{sgn}(x+5)-1) + x^2\operatorname{sgn}(x+5)}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}} =\\
&= e^{1/x}\,\frac{(x^2-2x-10)\operatorname{sgn}(x+5)+2}{2x^2\sqrt{|x+5|-1}}\,.
\end{aligned}$$

Studiamo le derivabilità in -6 e -4. Si ha

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -6^-} f'(x) &= \lim_{x\to -6^-} e^{1/x}\,\frac{-x^2+2x+12}{2x^2\sqrt{-x-6}} = -\infty\,,\\
\lim_{x\to -4^+} f'(x) &= \lim_{x\to -4^+} e^{1/x}\,\frac{x^2-2x-8}{2x^2\sqrt{x+4}} = +\infty\,.
\end{aligned}$$

Poiché il limite della derivata coincide con il limite del rapporto incrementale, risulta che f non è derivabile in nessuno dei due punti, perché il limite del rapporto incrementale non è reale. Poiché $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ è reale, per studiare il comportamento della funzione è utile calcolare il limite corrispondente della derivata. Si ha:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{1/x}\,\frac{x^2-2x-8}{2x^2\sqrt{x+4}} = \frac{-8}{4}\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{1/x}}{x^2} = 0\,.$$

Per $x \in \operatorname{dom} f'$ si ha

$$f'(x) \geq 0 \iff (x^2-2x-10)\operatorname{sgn}(x+5)+2 \geq 0\,,$$

quindi, distinguendo a seconda che sia $\operatorname{sgn}(x+5)=1$ o $\operatorname{sgn}(x+5)=-1$, $f'(x)$ è non negativa se e solo se x è un elemento del dominio di f' che soddisfa uno dei seguenti sistemi di disequazioni:

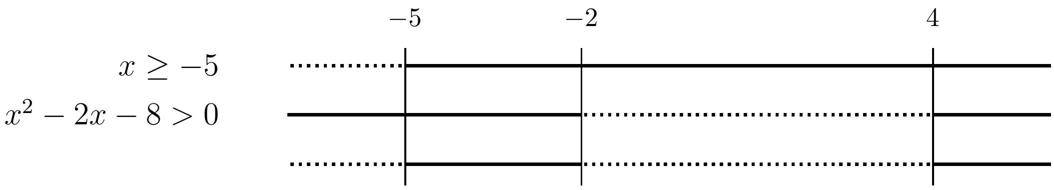
$$\begin{cases} x \geq -5\,, \\ x^2-2x-8 \geq 0\,; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -5\,, \\ -x^2+2x+12 \geq 0\,. \end{cases}$$

Il trinomio x^2-2x-8 si annulla per

$$x = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1\cdot(-8)} = 1 \pm 3\,,$$

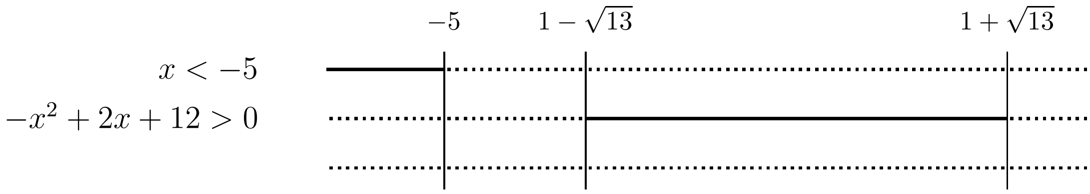
cioè per $x=-2$ e per $x=4$, dunque per il primo sistema si ha



quindi l'insieme delle soluzioni è $[-5,-2] \cup [4,+\infty[$. Il trinomio $-x^2+2x+12$ si annulla per

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 1\cdot(-12)}}{-1} = 1 \mp \sqrt{13}\,,$$

quindi per il secondo sistema si ha:



perciò questo sistema non ha soluzioni.

Il segno di f' è quindi rappresentato nel seguente schema:

		-6		-4		-2		0		4	
$f'(x)$	$-\ \ -$				$+\ \ +$		$-\ \ -$		$-\ \ -\ \ -\ \ -$		$+\ \ +$

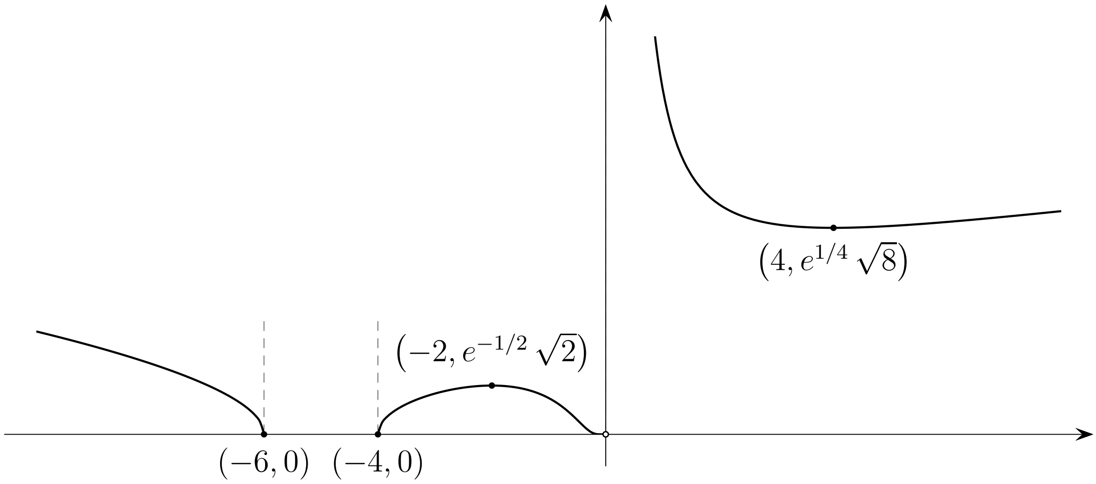
pertanto f è crescente negli intervalli $[-4,-2]$ e $[4,+\infty[$ ed è decrescente negli intervalli $]-\infty,-6]$, $[-2,0[$ e $]0,4]$.

Inoltre -6, -4 e 4 sono punti di minimo locale per f, mentre -2 è un punto di massimo locale.

Come già visto $f(-6)=f(-4)=0$, mentre:

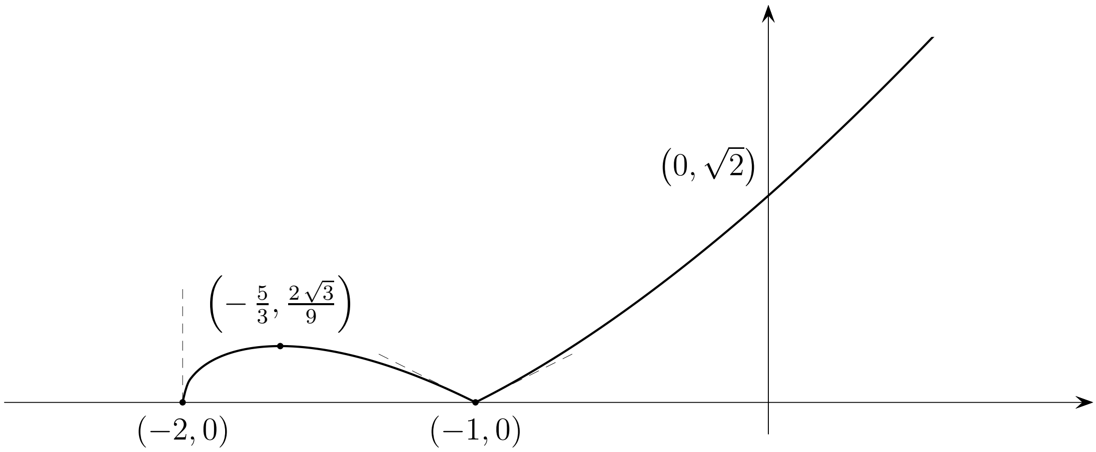
$$f(-2) = e^{-1/2}\sqrt{|-2+5|-1} = e^{-1/2}\sqrt{2}\,,$$
$$f(4) = e^{1/4}\sqrt{|4+5|-1} = e^{1/4}\sqrt{8}\,.$$

Il grafico di f è quindi, approssimativamente, il seguente.



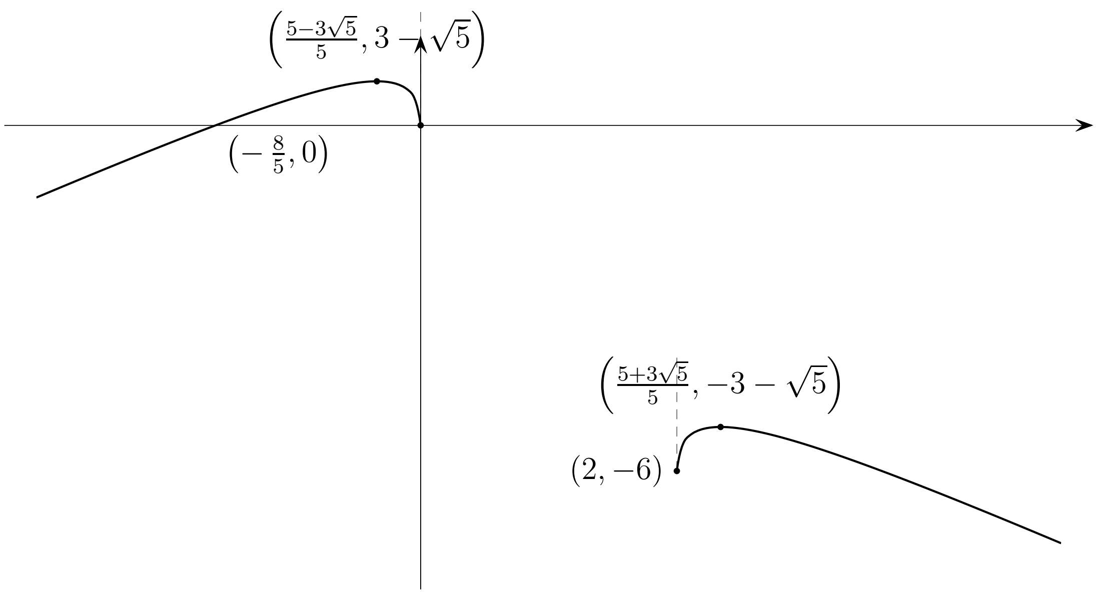
$\left(4, e^{1/4}\sqrt{8}\right)$
$\left(-2, e^{-1/2}\sqrt{2}\right)$
$(-6, 0)$
$(-4, 0)$

(93)



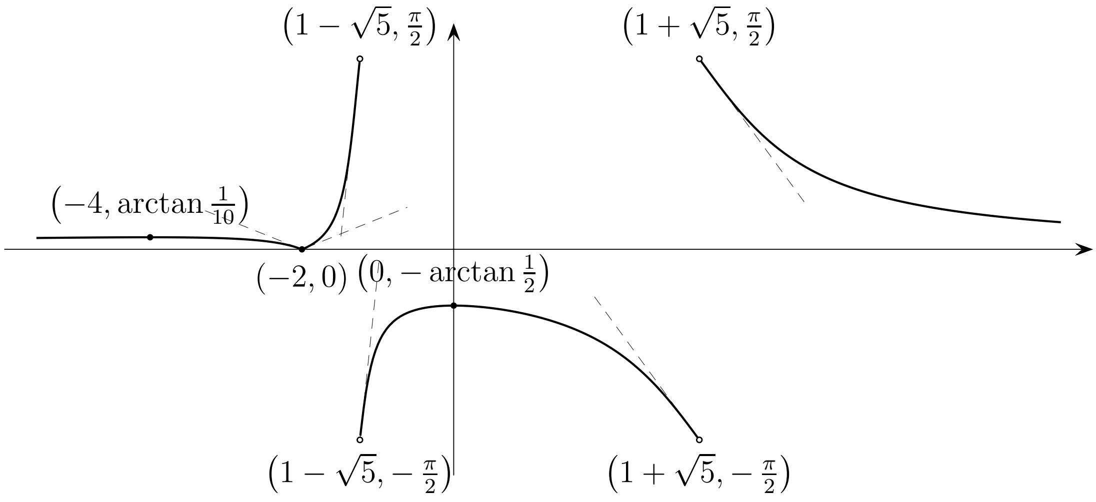
$\left(0, \sqrt{2}\right)$
$\left(-\frac{5}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$
$(-2, 0)$
$(-1, 0)$

(94)

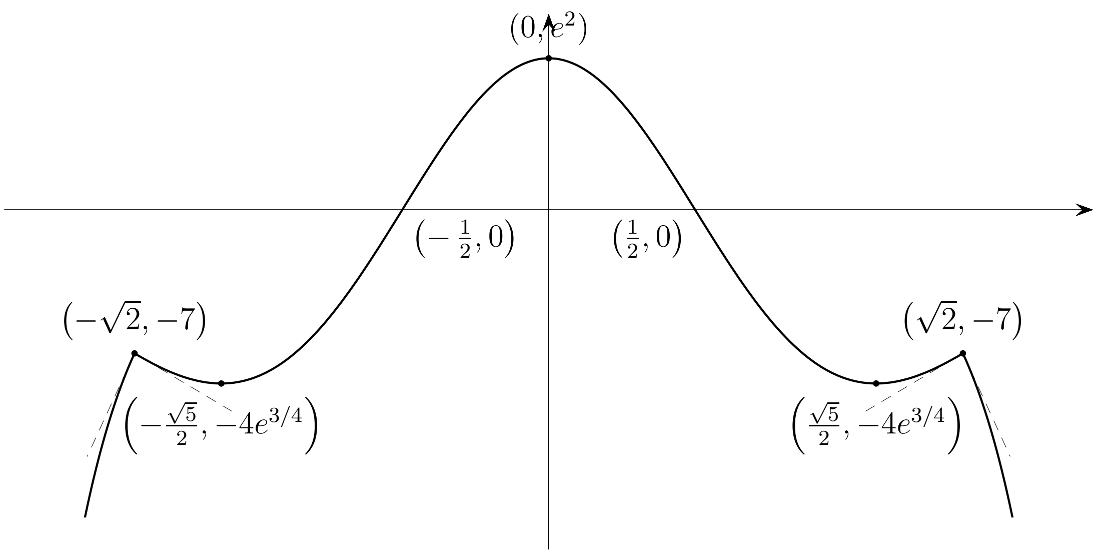


$\left(\frac{5-3\sqrt{5}}{5}, 3-\sqrt{5}\right)$
$\left(-\frac{8}{5}, 0\right)$
$\left(\frac{5+3\sqrt{5}}{5}, -3-\sqrt{5}\right)$
$(2, -6)$

(95)



(96)



(97) La funzione integranda è il prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ammette la primitiva x^2, mentre il secondo si presenta nella forma $\phi'(x)(\phi(x))^{-3}$ (con $\phi(x) = 5\sin x + 2\cos x$) e quindi una sua primitiva è $-(\phi(x))^{-2}/2$. Si può quindi integrare per parti in due modi diversi; è opportuno derivare il fattore $2x$, perché con tale scelta rimane da integrare una funzione in cui la variabile x compare esclusivamente come argomento delle funzioni seno e coseno, cosa che non accade nell'altro caso. Si ottiene dunque:

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\,dx =$$

$$= \left[2x\,\frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} 2\,\frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx\,.$$

Il primo addendo è uguale a

$$\frac{-\pi/6}{\big(5\sin(\pi/6)+2\cos(\pi/6)\big)^2}-0=\frac{-\pi/6}{\left(\dfrac{5}{2}+2\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=-\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{5+2\sqrt{3}}\right)^2=$$

$$=-\frac{\pi}{6}\,\frac{4}{25+20\sqrt{3}+12}=-\frac{2\pi}{111+60\sqrt{3}}\,.$$

Consideriamo ora l'integrale ancora da calcolare. La funzione integranda è quoziente tra una costante e una funzione omogenea di grado 2 in seno e coseno. È quindi possibile esprimerla tramite la funzione tangente, poiché l'intervallo di integrazione è incluso nel dominio di tale funzione. Si ha

$$\frac{1}{(5\sin x+2\cos x)^2}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{(5\sin x+2\cos x)^2}=\frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1}{\left(5\,\dfrac{\sin x}{\cos x}+2\right)^2}=\frac{\tan^2 x+1}{(5\tan x+2)^2}\,;$$

è quindi opportuno effettuare la sostituzione $\tan x=t$. Visto che x varia tra 0 e $\pi/6$, quindi appartiene all'immagine della funzione arcotangente, si ha $x=\arctan t$ e quindi la derivata del cambiamento di variabile è $1/(1+t^2)$. Perciò

$$\int_0^{\pi/6}\frac{1}{(5\sin x+2\cos x)^2}\,dx=\int_0^{\pi/6}\frac{\tan^2 x+1}{(5\tan x+2)^2}\,dx=$$

$$=\int_{\tan 0}^{\tan(\pi/6)}\frac{t^2+1}{(5t+2)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt=\int_0^{1/\sqrt{3}}\frac{1}{(5t+2)^2}\,dt=$$

$$=\left[\frac{-1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=\frac{-1}{5\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}}+2\right)}+\frac{1}{5\cdot 2}=\frac{-\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}}+\frac{1}{10}\,.$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/6}2x\,\frac{-2\sin x+5\cos x}{(5\sin x+2\cos x)^3}\,dx=\left[\frac{-x}{(5\sin x+2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6}-\left[\frac{1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=$$

$$=-\frac{2\pi}{111+60\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}}+\frac{1}{10}\,.$$

(98) La funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo e la derivata della funzione logaritmo, cioè, posto $\phi(x)=\log x$, si ha

$$\frac{\log x}{3x(\log^2 x+4)}=\frac{\phi(x)}{3\big(\big(\phi(x)\big)^2+4\big)}\,\phi'(x)\,.$$

Pertanto, effettuando la sostituzione $t=\phi(x)=\log x$; si ottiene

$$\int_1^2\frac{\log x}{3x(\log^2 x+4)}\,dx=\int_0^{\log 2}\frac{t}{3(t^2+4)}\,dt\,.$$

A meno di costanti moltiplicative, il numeratore della funzione integranda è la derivata del denominatore, quindi si trova facilmente un primitiva. Si ha

$$\begin{aligned}\int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt &= \int_0^{\log 2} \frac{1}{6}\,\frac{2t}{t^2+4}\,dt = \left[\frac{1}{6}\log(t^2+4)\right]_0^{\log 2} = \\ &= \frac{1}{6}\log(\log^2 2+4) - \frac{1}{6}\log 4\,.\end{aligned}$$

(99) La derivata della funzione coseno è la funzione $x \mapsto -\sin x$, quindi la funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile compare solo come argomento del coseno e la derivata di tale funzione. È allora evidente che la sostituzione $t = \cos x$ porta trasforma l'integrale in uno più semplice. Abbiamo

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos x+2}\,dx &= -\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x+2}(-\sin x)\,dx = -\int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)} \frac{t}{t+2}\,dt = \\ &= -\int_1^0 \frac{t+2-2}{t+2}\,dt = \int_0^1 \left(1-\frac{2}{t+2}\right)dt = \\ &= \big[t-2\log|t+2|\big]_0^1 = 1-2\log 3+2\log 2\,.\end{aligned}$$

(100) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del quoziente di due polinomi di primo grado; per eliminare la radice è opportuno effettuare una sostituzione in modo che la nuova variabile di integrazione sia tale radice quadrata. Perciò poniamo $t = \sqrt{(x+1)/(3x-1)}$, quindi $(3x-1)t^2 = x+1$, da cui si ricava $(3t^2-1)x = t^2+1$. Pertanto effettuiamo la sostituzione $x = \phi(t) = (t^2+1)/(3t^2-1)$. Si ha

$$\phi'(t) = \frac{2t(3t^2-1)-6t(t^2+1)}{(3t^2-1)^2} = \frac{6t^3-2t-6t^3-6t}{(3t^2-1)^2} = \frac{-8t}{(3t^2-1)^2}\,;$$

per $x = 1/2$ risulta $t = \sqrt{3}$, per $x = 1$ risulta $t = 1$, per cui si ha

$$\int_{1/2}^1 \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx = \int_{\sqrt{3}}^1 \frac{1}{\dfrac{t^2+1}{3t^2-1}}\;t\;\frac{-8t}{(3t^2-1)^2}\,dt = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}\,dt\,.$$

Dobbiamo integrare una funzione razionale. Anzitutto è necessario fattorizzare il denominatore. Il polinomio t^2+1 è irriducibile, mentre il polinomio $3t^2-1$ si scompone in $\big(\sqrt{3}\ t+1\big)\big(\sqrt{3}\ t-1\big)$, perciò la funzione integranda si scompone in fratti semplici nella forma

$$\frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)} = \frac{a}{\sqrt{3}\,t+1} + \frac{b}{\sqrt{3}\,t-1} + \frac{ct+d}{t^2+1}\,,$$

con a , b , c e d opportuni numeri reali. Riducendo a denominatore comune l'espressione a destra, il numeratore diventa

$$\begin{aligned}&a\big(\sqrt{3}\,t-1\big)(t^2+1) + b\big(\sqrt{3}\,t+1\big)(t^2+1) + (ct+d)(3t^2-1) = \\ &= \sqrt{3}\,at^3+\sqrt{3}\,at-at^2-a+\sqrt{3}\,bt^3+\sqrt{3}\,bt+bt^2+b+3ct^3-ct+3dt^2-d = \\ &= \big(\sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b+3c\big)t^3+(-a+b+3d)t^2+\big(\sqrt{3}\,a+\sqrt{3}\,b-c\big)t+(-a+b-d)\,.\end{aligned}$$

Questo numeratore deve essere uguale a $8t^2$, quindi a, b, c e d debbono soddisfare il seguente sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b + 3c = 0\,, \\ -a + b + 3d = 8\,, \\ \sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b - c = 0\,, \\ -a + b - d = 0\,. \end{cases}$$

Sottraendo membro a membro la terza equazione dalla prima e la quarta dalla seconda si ottiene $4c = 0$ e $4d = 8$, da cui $c = 0$ e $d = 2$. La prima equazione diventa $\sqrt{3}\,a + \sqrt{3}\,b = 0$, quindi $a = -b$, sostituendo nell'ultima si ha $2b - 2 = 0$, quindi $b = 1$ e $a = -1$.

Abbiamo perciò

$$\begin{aligned}
&\int_{1/2}^{1} \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x+1}{3x-1}}\,dx = \int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{8t^2}{(t^2+1)(3t^2-1)}\,dt = \\
&= \int_{1}^{\sqrt{3}} \left(\frac{-1}{\sqrt{3}\,t+1} + \frac{1}{\sqrt{3}\,t-1} + \frac{2}{t^2+1} \right) dt = \\
&= \left[-\frac{1}{\sqrt{3}} \log\left|\sqrt{3}\,t+1\right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \log\left|\sqrt{3}\,t-1\right| + 2\arctan t \right]_{1}^{\sqrt{3}} = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\log 4 + \frac{1}{\sqrt{3}}\log 2 + 2\arctan\sqrt{3} + \\
&\qquad + \frac{1}{\sqrt{3}}\log\big(\sqrt{3}+1\big) - \frac{1}{\sqrt{3}}\log\big(\sqrt{3}-1\big) - 2\arctan 1 = \\
&= -\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2 + 2\,\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{\big(\sqrt{3}+1\big)^2}{3-1} - 2\,\frac{\pi}{4} = \\
&= -\frac{2}{\sqrt{3}}\log 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}\log\big(\sqrt{3}+1\big) + \frac{\pi}{6}\,.
\end{aligned}$$

(101) $$\left[-2\,\frac{\log\big(\sqrt{x}+1\big)}{\sqrt{x}+2} + 2\log\big(\sqrt{x}+1\big) - 2\log\big(\sqrt{x}+2\big) \right]_1^4 = \frac{7}{2}\log 3 - \frac{16}{3}\log 2\,.$$

(102) $$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\,dx = \left[\frac{5}{4}\,e^{2x} - \frac{3}{2}\,x \right]_0^1 = \frac{5}{4}\,e^2 - \frac{11}{4}\,.$$

(103) $$\left[(x+1)\,\frac{1}{e^x + 4 + 3\,e^{-x}} + \frac{1}{2}\log(e^x+1) - \frac{1}{2}\log(e^x+3) \right]_1^2$$
$$= 3\,\frac{1}{e^2 + 4 + 3\,e^{-2}} - 2\,\frac{1}{e + 4 + 3\,e^{-1}} + \frac{1}{2}\log\frac{(e^2+1)(e+3)}{(e^2+3)(e+1)}$$

(104) $$\left[(2x^3 + 2x)\arcsin x + \frac{2}{3}\,x^2\sqrt{1-x^2} + \frac{10}{3}\sqrt{1-x^2} \right]_0^{1/2} = \frac{5}{24}\,\pi + \frac{7\sqrt{3}}{4} - \frac{10}{3}\,.$$