Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna
Corso di Laurea Ingegneria Meccanica
Anno Accademico 2012/2013
Corso di Analisi Matematica T-B
Docente prof. G. Dore

Esercizi

---

(1) Calcolare
$$\int_1^4 \frac{x+3}{x(4x+3)}\,dx\,.$$

---

(2) Calcolare
$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x+4)}\,dx\,.$$

---

(3) Calcolare
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos x+2}\,dx\,.$$

---

(4) Calcolare
$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x+5\cos x}{(5\sin x+2\cos x)^3}\,dx\,.$$

---

(5) Calcolare
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx\,.$$

---

(6) Calcolare
$$\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x-3\,e^{-x}}{(e^x+4+3\,e^{-x})^2}\,dx\,.$$

---

(7) Calcolare
$$\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx\,.$$

---

(8) Calcolare
$$\int_0^{1/2} (6x^2+2)\,\arcsin x\,dx\,.$$

(9) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\,dx\,.$$

(10) Calcolare

$$\int_0^1 \frac{\cosh x + 4\sinh x}{\cosh x - \sinh x}\,dx\,.$$

(11) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$2z^2 + \big(2\sqrt{3} + 6\,i\big)z + 1 - \sqrt{3}\,i = 0\,.$$

(12) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\frac{1}{z^2} = 4 - 6\sqrt{3}\,i\,.$$

(13) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1}\right)^2 = (-11+2i)^2\,.$$

(14) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^3 = e^{1+2i}\,.$$

(15) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$z^2 - 2\sqrt{6}\,i\,z - i = 0\,.$$

(16) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$iz^2 - 4z + 2 - 4i = 0\,.$$

(17) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left((3+3i)z + \frac{1+i}{z}\right)^2 = 20(1-i)^2\,.$$

(18) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$(z-i)^6 = -8\,.$$

(19) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(2iz - \frac{1+2i}{z}\right)^2 = (6-2i)^2\,.$$

(20) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$\left(z^2 + 2\sqrt{2}\,i\,z - 1\right)^2 = -1\,.$$

(21) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{1/z} = -1-2i\,.$$

(22) Risolvere la seguente equazione in campo complesso:

$$e^{(1+i)z} = 1+i\,.$$

(23) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y,z) = \frac{e^{x+y} - x^2 + y}{x^2+z^2+1}\,.$$

Calcolare $\nabla f(2,3,0)$.

(24) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$f(x,y,z) = \left(xy^2z^5, \frac{y}{x^2+1}\right)\,.$$

Calcolare $Jf_{(1,2,\sqrt{2}\,)}$.

(25) Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x,y) = \left(e^{x+2y}, 3xy, \frac{1}{x^2+1}\right)\,.$$

Calcolare $Jf_{(2,-1)}$.

(26) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che

$$f(x,y,z) = \left(e^{xyz}, x^2y^3, \frac{z}{y^2+1}\right) .$$

Calcolare $Jf_{(x,y,z)}$.

---

(27) Sia $f\colon \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y,z) = \frac{y^2+xz}{\sqrt{x}} .$$

Calcolare $Hf_{(x,y,z)}$.

---

(28) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y,z) = xyz + xz^2 .$$

Calcolare $Hf_{(2,-1,1)}$.

---

(29) Sia $f\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y) = x\log y + \frac{\log x}{y} .$$

Calcolare $Hf_{(x,y)}$.

---

(30) Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che

$$f(x,y,z) = x^2ye^z - y^2 .$$

Calcolare $Hf_{(x,y,z)}$.

---

(31) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) - 2ty(t) = -4t^3 \\ y(0) = 1 . \end{cases}$$

(32) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) + \dfrac{4t}{t^2+6}\, y(t) = \dfrac{8t}{(t^2+6)^3} \\ y(0) = 0\,. \end{cases}$$

(33) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) - \dfrac{2}{t}\, y(t) = \dfrac{6}{t} \\ y(1) = 1\,. \end{cases}$$

(34) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = \dfrac{t-2}{t^2-4t}\Big(\big(y(t)\big)^2 - y(t)\Big) \\ y(2) = 3\,. \end{cases}$$

(35) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = (4t+6)(y(t))^3 \\ y(0) = 1\,. \end{cases}$$

(36) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = (4+2t)\big(1 + \big(y(t)\big)^2\big) \\ y(2) = 0\,. \end{cases}$$

(37) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-3t}\,.$$

(38) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = e^{2t} + 4\sin(4t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0\,. \end{cases}$$

(39) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) + y(t) = \cos t$$

(40) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) + 6y'(t) + 9y(t) = 12e^{3t} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

(41) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = te^{t} \,.$$

(42) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) - 6y'(t) + 9y(t) = 9t \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

(43) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(t) - 3y''(t) + 4y'(t) - 2y(t) = 0 \,.$$

(44) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(t) - y''(t) + y'(t) - y(t) = \cos t$$

(45) Determinare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y'''(t) + y''(t) - y'(t) - y(t) = e^{t} \,.$$

(46) Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'''(t) + 6y''(t) + 9y'(t) = 36 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 1 \end{cases}$$

(47) Determinare i punti critici della funzione

$$f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,, \qquad f(x,y,z) = x^3 + y^2 - 2yz + 2z^2 - 3x + 4y - 8z$$

e classificarli.

(48) Determinare i punti critici della funzione

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = x^3 + 2x^2 - 12x - 4xy + 2y^2 + z^3 - 3z^2$$

e classificarli.

---

(49) Determinare i punti critici della funzione

$$f\colon \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; y \neq -x \right\} \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = \frac{x^2 + 2y^2 + z^2 + 3}{x+y}.$$

e classificarli.

---

(50) Determinare i punti critici della funzione

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = x^4 + x^2(y^2 - z^2 + 1) + y^2 + 4z^2$$

e classificarli.

---

(51) Determinare i punti critici della funzione

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + (4 - x - y)^3$$

e classificarli.

---

(52) Determinare i punti critici della funzione

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = -x^3 - xy^2 + x^2 + y^2 + 5x$$

e classificarli.

---

(53) Siano

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = 10x^2 + y^4$$

e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 10x^2 + y^2 = 1 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(54) Siano

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = x^2 + y$$

e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 = 9 \right\}$. Determinare $f(V)$.

(55) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = xy + 3$$
e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 9x^2 + 4y^2 = 16 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(56) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = x^3 - 3x^2 + 2y^3$$
e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(57) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = -2x + y\,.$$
e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x^2 + y^2 = 3 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(58) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y) = xy - 2x\,.$$
e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x^2 + y^2 = 12 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(59) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4z\,.$$
e $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + y^2 + z^2 = 9 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(60) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = (x+1)^2 - 3y^2 - 3z^2\,.$$
e $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 9y^2 + z^2 = 9 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(61) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = x + y + z\,.$$
e $V = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6 \right\}$. Determinare $f(V)$.

---

(62) Siano
$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad f(x,y,z) = 3x + y + z - 1\,.$$
e $V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; 10x^2 + y^2 + 10z^2 = 8 \right\}$. Determinare $f(V)$.

(63) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 25, x + y \ge 5 \right\} .$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B y \, dx \, dy$.

---

(64) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 4x^2 + y^2 \le 8, x \le 1, y \ge -2 \right\} .$$
Calcolare $A(B)$.

---

(65) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le 3, |x - 2y| \le 2 \right\} .$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B y^2 \, dx \, dy$.

---

(66) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 4, 0 \le x \le y \right\} .$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B y \, dx \, dy$.

---

(67) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + (y+1)^2 \le 4 \right\} .$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B y \, dx \, dy$.

---

(68) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x^2 + y^2 \le 4, y \ge x \right\} .$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B (x+y) \, dx \, dy$.

---

(69) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \le 1, x + y \le 2, 3x + y \ge 0 \right\} .$$
Calcolare $A(B)$.

---

(70) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x| \le 3, |2x - y| \le 2 \right\} .$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B y^2 \, dx \, dy$.

(71) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 - y \le 2, x - y \ge -4 \right\}.$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B x\,dx\,dy$.

---

(72) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \le 16, x - y^2 \ge -4 \right\}.$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B x\,dx\,dy$.

---

(73) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 \le 9, x^2 + y^2 \ge 1 \right\}.$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$.

---

(74) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + 4y^2 \le 4, x \ge 0 \right\}.$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B x^2\,dx\,dy$.

---

(75) Sia
$$B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + (y+1)^2 \le 4, x \le |y+1| \right\}.$$
Calcolare $\displaystyle\iint_B (x^2 + y^2 + 4)\,dx\,dy$.

Soluzioni

(1) Scomponiamo la funzione integranda nella somma di frazioni più semplici. La scomposizione può essere fatta con un semplice trucco

$$\frac{x+3}{x(4x+3)} = \frac{4x+3-3x}{x(4x+3)} = \frac{4x+3}{x(4x+3)} + \frac{-3x}{x(4x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{3}{4x+3}\,,$$

perciò una primitiva della funzione $x \mapsto \dfrac{x+3}{x(4x+3)}$ è

$$x \mapsto \log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\,;$$

quindi l'integrale è uguale a

$$\left[\log|x| - \frac{3}{4}\log|4x+3|\right]_1^4 = \log|4| - \frac{3}{4}\log|4\cdot 4+3| - \log|1| + \frac{3}{4}\log|1\cdot 4+3| =$$
$$= \log 4 - \frac{3}{4}\log 19 + \frac{3}{4}\log 7\,.$$

(2) La funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile x compare solo come argomento del logaritmo e la derivata della funzione logaritmo. Pertanto per calcolare l'integrale è utile effettuare la sostituzione $t = \log x$; si ottiene

$$\int_1^2 \frac{\log x}{3x(\log^2 x + 4)}\,dx = \int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt\,.$$

A meno di costanti moltiplicative, il numeratore della funzione integranda è la derivata del denominatore, quindi si trova facilmente un primitiva. Si ha

$$\int_0^{\log 2} \frac{t}{3(t^2+4)}\,dt = \int_0^{\log 2} \frac{1}{6}\,\frac{2t}{t^2+4}\,dt = \left[\frac{1}{6}\log(t^2+4)\right]_0^{\log 2} =$$
$$= \frac{1}{6}\log(\log^2 2 + 4) - \frac{1}{6}\log 4\,.$$

(3) La derivata della funzione coseno è la funzione $x \mapsto -\sin x$, quindi la funzione integranda è il prodotto tra una funzione in cui la variabile compare solo come argomento del coseno e la derivata di tale funzione. È allora evidente che la sostituzione $t = \cos x$ porta a semplificare l'integrale. Abbiamo

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x\cos x}{\cos x + 2}\,dx = -\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + 2}(-\sin x)\,dx = -\int_{\cos 0}^{\cos(\pi/2)} \frac{t}{t+2}\,dt =$$
$$= -\int_1^0 \frac{t+2-2}{t+2}\,dt = \int_0^1 \left(1 - \frac{2}{t+2}\right)dt =$$
$$= \big[t - 2\log|t+2|\big]_0^1 = 1 - 2\log 3 + 2\log 2\,.$$

(4) La funzione integranda è il prodotto di due funzioni di ciascuna delle quali si trova facilmente una primitiva: il primo fattore ammette la primitiva x^2 , mentre il secondo fattore si presenta nella forma $\phi'(x)(\phi(x))^{-3}$ (con $\phi(x) = 5\sin x + 2\cos x$) e quindi una sua primitiva è $-\frac{1}{2}(\phi(x))^{-2}$. Si può quindi integrare per parti in due modi diversi; evidentemente è opportuno derivare il fattore $2x$, perché con tale scelta rimane da integrare una funzione in cui la variabile x compare esclusivamente come argomento delle funzioni seno e coseno, cosa che non accade nell'altro caso.

Si ottiene dunque:

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x + 5\cos x}{(5\sin x + 2\cos x)^3}\,dx = \\
&\quad = \left[2x\,\frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} - \int_0^{\pi/6} 2\,\frac{-1}{2(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx = \\
&\quad = \left[\frac{-x}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6} + \int_0^{\pi/6} \frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx\,.
\end{aligned}$$

Il primo addendo è uguale a:

$$\begin{aligned}
&\frac{-\pi/6}{\big(5\sin(\pi/6) + 2\cos(\pi/6)\big)^2} - 0 = \frac{-\pi/6}{\big(5/2 + 2\sqrt{3}/2\big)^2} = -\frac{\pi}{6}\left(\frac{2}{5 + 2\sqrt{3}}\right)^2 = \\
&\qquad = -\frac{\pi}{6}\,\frac{4}{25 + 20\sqrt{3} + 12} = -\frac{2\pi}{111 + 60\sqrt{3}}\,.
\end{aligned}$$

Consideriamo ora l'integrale ancora da calcolare. La funzione integranda è quoziente tra una costante e una funzione omogenea di grado 2 in seno e coseno. È quindi possibile esprimerla tramite la funzione tangente, visto che l'intervallo di integrazione è incluso nel dominio di tale funzione. Si ha

$$\frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{(5\sin x + 2\cos x)^2} = \frac{\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1}{\left(5\,\dfrac{\sin x}{\cos x} + 2\right)^2} = \frac{\tan^2 x + 1}{(5\tan x + 2)^2}\,;$$

è quindi opportuno effettuare la sostituzione $\tan x = t$. Visto che x varia tra 0 e $\pi/6$, quindi appartiene all'immagine della funzione arcotangente, si ha $x = \arctan t$ e quindi la derivata del cambiamento di variabile è $1/(1+t^2)$. Perciò

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\pi/6} \frac{1}{(5\sin x + 2\cos x)^2}\,dx = \int_0^{\pi/6} \frac{\tan^2 x + 1}{(5\tan x + 2)^2}\,dx = \\
&\quad = \int_{\tan 0}^{\tan(\pi/6)} \frac{t^2 + 1}{(5t+2)^2}\,\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int_0^{1/\sqrt{3}} \frac{1}{(5t+2)^2}\,dt = \\
&\quad = \left[\frac{-1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}} = \frac{-1}{5\left(\dfrac{5}{\sqrt{3}} + 2\right)} + \frac{1}{5\cdot 2} = \frac{-\sqrt{3}}{25 + 10\sqrt{3}} + \frac{1}{10}\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^{\pi/6} 2x\,\frac{-2\sin x+5\cos x}{(5\sin x+2\cos x)^3}\,dx=\left[\frac{-x}{(5\sin x+2\cos x)^2}\right]_0^{\pi/6}-\left[\frac{1}{5(5t+2)}\right]_0^{1/\sqrt{3}}=$$
$$=-\frac{2\pi}{111+60\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{25+10\sqrt{3}}+\frac{1}{10}\,.$$

(5) Nella funzione integranda compare la radice quadrata del polinomio $-x^2+4$; occorre innanzitutto effettuare una sostituzione che consenta di eliminare tale radice, trasformando l'integrando in una funzione razionale. Per questo facciamo la sostituzione $x=2\sin t$, da cui segue $t=\arcsin(x/2)$, poiché $x/2\in[1/2,1]\subseteq \operatorname{dom}\arcsin$.

Per $x=1$ si ha $t=\arcsin(1/2)=\pi/6$ e per $x=2$ si ha $t=\arcsin 1=\pi/2$. La derivata della funzione $t\mapsto 2\sin t$ è $2\cos t$; visto che se $t\in[\pi/6,\pi/2]$ è $\cos t\geq 0$, si ha

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{\sqrt{4-(2\sin t)^2}}{2\sin t}\,2\cos t\,dt=$$
$$=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos t}{2\sin t}\,2\cos t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt\,.$$

La funzione integranda può essere facilmente trasformata nel prodotto tra una funzione razionale di $\cos t$ e $\sin t$, in modo che l'integrale diventi l'integrale di in una funzione razionale con la sostituzione $\cos t=s$. Si ha infatti

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\sin t}\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{\sin^2 t}\,\sin t\,dt=\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt$$

e con la sostituzione $\cos t=s$, tenuto conto che la derivata della funzione coseno è l'opposto della funzione seno, si ottiene

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2}\frac{2\cos^2 t}{1-\cos^2 t}\,\sin t\,dt=-\int_{\cos(\pi/6)}^{\cos(\pi/2)}\frac{2s^2}{1-s^2}\,ds=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{2s^2}{1-s^2}\,ds\,.$$

Dobbiamo ora integrare una funzione razionale. Il polinomio a numeratore ha lo stesso grado di quello a denominatore, quindi bisogna anzitutto scrivere la frazione come somma di un polinomio e di una frazione il cui numeratore abbia grado minore di quello del denominatore. Si ha:

$$\frac{2s^2}{1-s^2}=\frac{2s^2-2+2}{1-s^2}=-2+\frac{2}{1-s^2}\,.$$

Inoltre

$$\frac{2}{1-s^2}=\frac{(1+s)+(1-s)}{1-s^2}=\frac{1+s}{1-s^2}+\frac{1-s}{1-s^2}=\frac{1}{1-s}+\frac{1}{1+s}\,.$$

Pertanto si ha

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{-x^2+4}}{x}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{2s^2}{1-s^2}\,ds = \int_0^{\sqrt{3}/2} \left(-2+\frac{1}{1+s}+\frac{1}{1-s}\right) ds =$$

$$= \big[-2s+\log|1+s|-\log|1-s|\big]_0^{\sqrt{3}/2} =$$

$$= -\sqrt{3}+\log\frac{\sqrt{3}+2}{2}-\log\frac{2-\sqrt{3}}{2} =$$

$$= -\sqrt{3}+\log\frac{\sqrt{3}+2}{2-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}+\log\big(7+4\sqrt{3}\,\big)\,.$$

(6) $\displaystyle\int_1^2 (x+1)\,\frac{e^x-3\,e^{-x}}{\left(e^x+4+3\,e^{-x}\right)^2}\,dx =$

$$= \left[-(x+1)\,\frac{1}{e^x+4+3\,e^{-x}}+\frac{1}{2}\log(e^x+1)-\frac{1}{2}\log(e^x+3)\right]_1^2 =$$

$$= -3\,\frac{1}{e^2+4+3\,e^{-2}}+2\,\frac{1}{e+4+3\,e^{-1}}+\frac{1}{2}\log\frac{(e^2+1)(e+3)}{(e^2+3)(e+1)}\,.$$

(7) $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+3}{x^2+9}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\log(x^2+9)+\arctan\frac{x}{3}\right]_2^5 =$

$$= \frac{1}{2}\,\log\frac{34}{13}+\arctan\frac{5}{3}-\arctan\frac{2}{3}\,.$$

(8) $\displaystyle\int_0^{1/2} (6x^2+2)\,\arcsin x\,dx =$

$$= \left[(2x^3+2x)\arcsin x+\frac{2}{3}\,x^2\sqrt{1-x^2}+\frac{10}{3}\,\sqrt{1-x^2}\right]_0^{1/2} = \frac{5}{24}\,\pi+\frac{7\sqrt{3}}{4}-\frac{10}{3}\,.$$

(9) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x\sqrt{1+8x^2}}{1+4x^2}\,dx = \left[\frac{1}{4}\sqrt{1+8x^2}-\frac{1}{4}\,\arctan\big(\sqrt{1+8x^2}\,\big)\right]_0^1 =$

$$= 1-\frac{1}{4}\,\arctan 5+\frac{\pi}{16}\,.$$

(10) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cosh x+4\sinh x}{\cosh x-\sinh x}\,dx = \left[\frac{5}{4}\,e^{2x}-\frac{3}{2}\,x\right]_0^1 = \frac{5}{4}\,e^2-\frac{11}{4}\,.$

(11) L'equazione è di secondo grado, per risolverla occorre innanzitutto calcolare le radici quadrate del discriminante (che indichiamo con Δ), o meglio, visto che nel coefficiente del termine di primo grado si può raccogliere il fattore 2, le radici quadrate di $\Delta/4$.

Abbiamo

$$\frac{\Delta}{4} = \big(\sqrt{3}+3\,i\big)^2-2\big(1-\sqrt{3}\,i\big) = 3+6\sqrt{3}\,i-9-2+2\sqrt{3}\,i = -8+8\sqrt{3}\,i\,.$$

Per calcolare le radici quadrate di $\Delta/4$ dobbiamo trovarne il modulo e un argomento.

$$\left|\frac{\Delta}{4}\right| = \sqrt{(-8)^2+\big(8\sqrt{3}\,\big)^2} = 8\sqrt{(-1)^2+\big(\sqrt{3}\,\big)^2} = 16\,.$$

Visto che $\Delta/4$ ha parte reale negativa, un argomento è

$$\pi + \arctan \frac{Im\,(\Delta/4)}{Re\,(\Delta/4)} = \pi + \arctan \frac{8\sqrt{3}}{-8} = \pi - \arctan \sqrt{3} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\,\pi\,.$$

Perciò le radici quadrate di $\Delta/4$ sono:

$$\pm\sqrt{16}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{3}\right)\right) = \pm 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \pm\bigl(2 + 2\sqrt{3}\,i\bigr)\,.$$

Le soluzioni dell'equazione sono quindi

$$\frac{-\sqrt{3} - 3\,i \pm \bigl(2 + 2\sqrt{3}\,i\bigr)}{2} = \begin{cases} \dfrac{-\sqrt{3} - 3\,i - 2 - 2\sqrt{3}\,i}{2} = -\dfrac{2+\sqrt{3}}{2} - \dfrac{2\sqrt{3}+3}{2}\,i \\[2ex] \dfrac{-\sqrt{3} - 3\,i + 2 + 2\sqrt{3}\,i}{2} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2} + \dfrac{2\sqrt{3}-3}{2}\,i\,. \end{cases}$$

(12) L'equazione equivale a

$$z^2 = \frac{1}{4 - 6\sqrt{3}\,i}\,.$$

Determiniamo le radici quadrate di $1/\bigl(4 - 6\sqrt{3}\,i\bigr)$. Si ha

$$\left|\frac{1}{4 - 6\sqrt{3}\,i}\right| = \frac{1}{\left|4 - 6\sqrt{3}\,i\right|} = \frac{1}{\sqrt{4^2 + \bigl(-6\sqrt{3}\bigr)^2}} = \frac{1}{\sqrt{124}} = \frac{1}{2\sqrt{31}}$$

e un argomento di $1/\bigl(4 - 6\sqrt{3}\ i\bigr)$ è l'opposto di un argomento di $4 - 6\sqrt{3}\ i$, cioè l'opposto di $\arctan\bigl(-6\sqrt{3}/4\bigr)$, che è $\arctan\bigl(3\sqrt{3}/2\bigr)$; quindi le radici quadrate cercate sono

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}\,\sqrt[4]{31}}\left(\cos\left(\frac{1}{2}\,\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right) + i\sin\left(\frac{1}{2}\,\arctan\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)\right)\,.$$

(13) Due numeri complessi hanno quadrati uguali se e solo se sono uguali oppure sono uno l'opposto dell'altro. Quindi dobbiamo risolvere le due equazioni

$$\frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1} = -11 + 2i\,, \qquad \frac{(-1+i)z - 1 - i}{z^2 + 2iz - 1} = 11 - 2i\,.$$

La prima equazione equivale a

$$\frac{(-1+i)z - 1 - i - (z^2 + 2iz - 1)(-11 + 2i)}{z^2 + 2iz - 1} = 0$$

$$\frac{(-1+i)z - 1 - i + (11 - 2i)z^2 + (22i + 4)z - 11 + 2i}{z^2 + 2iz - 1} = 0$$

$$\frac{(11 - 2i)z^2 + (3 + 23i)z - 12 + i}{z^2 + 2iz - 1} = 0\,.$$

Cerchiamo quindi gli z che annullano il numeratore, con la condizione che il denominatore sia diverso da 0. È evidente che il denominatore è il quadrato del binomio

$z+i$, quindi si annulla se e solo se $z=-i$. Perciò $-i$ non può essere soluzione dell'equazione.

Il discriminante del trinomio a numeratore è

$$(3+23i)^2 - 4(11-2i)(-12+i) = 9+138i-529+528-96i-44i-8 = -2i\,.$$

Poiché $|-2i|=2$ e un argomento di $-2i$ è $3\pi/2$, le radici quadrate di $-2i$ sono

$$\pm\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\right) = \pm\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \pm(-1+i)\,.$$

Pertanto si ha

$$z = \frac{-(3+23i)\pm(-1+i)}{2(11-2i)}\,,$$

perciò vi sono le due soluzioni

$$z=\frac{-4-22i}{22-4i}=\frac{-2-11i}{11-2i} \qquad\qquad z=\frac{-2-24i}{22-4i}=\frac{-1-12i}{11-2i}$$

che possono essere espresse in forma algebrica moltiplicando numeratore e denominatore per il coniugato del denominatore. Si ha quindi

$$\begin{aligned} z &= \frac{(-2-11i)(11+2i)}{|11-2i|^2} = \frac{-22-121i-4i+22}{11^2+(-2)^2} = \frac{-125}{125}\,i = -i \\ z &= \frac{(-1-12i)(11+2i)}{|11-2i|^2} = \frac{-11-132i-2i+24}{11^2+(-2)^2} = \frac{13}{125}-\frac{134}{125}\,i\,. \end{aligned}$$

Il numero $-i$ non è soluzione della equazione data perché, come visto sopra, annulla il denominatore, mentre l'altra soluzione è accettabile.

In modo del tutto analogo si procede per risolvere la seconda equazione, cioè:

$$\frac{(-1+i)z-1-i}{z^2+2iz-1} = 11-2i\,.$$

che è equivalente a

$$\begin{gathered} \frac{(-1+i)z-1-i+(z^2+2iz-1)(-11+2i)}{z^2+2iz-1} = 0 \\ \frac{(-1+i)z-1-i+(-11+2i)z^2+(-22i-4)z+11-2i}{z^2+2iz-1} = 0 \\ \frac{(-11+2i)z^2-(5+21i)z+10-3i}{z^2+2iz-1} = 0\,; \end{gathered}$$

perciò cerchiamo gli zeri del numeratore, diversi da $-i$ che, come visto sopra, annulla il denominatore.

Il discriminante del trinomio a numeratore è

$$(5+21i)^2 - 4(-11+2i)(10-3i) = 25+210i-441+440-80i-132i-24 = -2i$$

e come visto sopra le radici quadrate di $-2i$ sono $\pm(-1+i)$ e quindi le soluzioni dell'equazione sono

$$z = \frac{5+21i \pm (-1+i)}{2(-11+2i)}\,,$$

cioè

$$z = \frac{4+22i}{-22+4i} = \frac{2+11i}{-11+2i} \qquad\qquad z = \frac{6+20i}{-22+4i} = \frac{3+10i}{-11+2i}\,.$$

La prima soluzione è già stata trovata in precedenza, e si è visto che è uguale a $-i$ ed è quindi da scartare, perché annulla il denominatore. La seconda, espressa in forma algebrica, è:

$$z = \frac{(3+10i)(-11-2i)}{|-11+2i|^2} = \frac{-33-110i-6i+20}{(-11)^2+2^2} = -\frac{13}{125} - \frac{116}{125}\,i$$

ed è accettabile.

Possiamo quindi concludere che l'equazione ha le due soluzioni:

$$z = \frac{13}{125} - \frac{134}{125}\,i\,, \qquad\qquad z = -\frac{13}{125} - \frac{116}{125}\,i\,.$$

(14) Dobbiamo calcolare le radici cubiche di e^{1+2i}. A tale scopo occorre determinarne il modulo e un argomento. Visto che l'esponenziale di un numero complesso ha come modulo l'esponenziale della parte reale e come argomento il coefficiente dell'immaginario, il numero e^{1+2i} ha modulo e e un argomento è 2.

Perciò abbiamo le soluzioni

$$z = e^{1/3}\left(\cos\frac{2}{3} + i\sin\frac{2}{3}\right)\,,$$
$$z = e^{1/3}\left(\cos\frac{2+2\pi}{3} + i\sin\frac{2+2\pi}{3}\right)\,,$$
$$z = e^{1/3}\left(\cos\frac{2+4\pi}{3} + i\sin\frac{2+4\pi}{3}\right)\,.$$

(15) $z = \pm 37^{1/4}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{6}\right) + \left(\sqrt{6} \pm 37^{1/4}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{6}\right)\right) i\,.$

(16) $z = 1-i\,,\ z = -1-3i\,.$

(17) $z = \pm\frac{\sqrt{5}+2\sqrt{2}}{3}\,i\,,\ z = \pm\frac{\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{3}\,i\,.$

(18) $z = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\,i\,,\ z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\,i\,,\ z = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,i\,,$
$z = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,i\,,\ z = \big(1+\sqrt{2}\,\big)i\,,\ z = \big(1-\sqrt{2}\,\big)i\,.$

(19) $\quad z=\dfrac{1}{2}+\sqrt[4]{2}\cos\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)+\left(\dfrac{3}{2}+\sqrt[4]{2}\sin\left(\dfrac{3}{8}\pi\right)\right)i\,,$

$$z=\frac{1}{2}-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+i\left(\frac{3}{2}-\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)i\,,$$

$$z=-\frac{1}{2}+\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+\left(-\frac{3}{2}+\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)i\,,$$

$$z=-\frac{1}{2}-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+\left(-\frac{3}{2}-\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)i\,.$$

(20) $\quad z=\sqrt[4]{2}\cos\left(\dfrac{5}{8}\pi\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\sin\left(\dfrac{5}{8}\pi\right)\right)i\,,$

$$z=-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{5}{8}\pi\right)+\left(-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{5}{8}\pi\right)\right)i\,,$$

$$z=\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)i\,,$$

$$z=-\sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{3}{8}\pi\right)+\left(-\sqrt{2}-\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{3}{8}\pi\right)\right)i\,.$$

(21) Per le proprietà dell'esponenziale complesso, se $e^{1/z}=-1-2i$, allora $1/z$ ha parte reale uguale a $\log|-1-2i|$ e coefficiente dell'immaginario uguale a uno degli argomenti di $-1-2i$. Si ha $|-1-2i|=\sqrt{5}$ e un argomento di $-1-2i$ è $\arctan 2+\pi$, quindi gli argomenti di tale numero sono i numeri reali della forma $\arctan 2+(2k+1)\pi$ con $k\in\mathbb{Z}$. Perciò

$$\frac{1}{z}=\log\sqrt{5}+\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)i\,,$$

quindi si hanno le soluzioni

$$z=\frac{1}{\log\sqrt{5}+\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)i}=\frac{\log\sqrt{5}-\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)i}{\big(\log\sqrt{5}\,\big)^2+\big(\arctan 2+(2k+1)\pi\big)^2}\,,$$

qualunque sia $k\in\mathbb{Z}$.

(22) $\quad z=\dfrac{\log 2}{4}+\left(k+\dfrac{1}{8}\right)\pi+\left(-\dfrac{\log 2}{4}+\left(k+\dfrac{1}{8}\right)\pi\right)i\,,\ k\in\mathbb{Z}\,.$

(23) Calcoliamo anzitutto le derivate parziali di f in $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=\frac{(e^{x+y}-2x)(x^2+z^2+1)-2x(e^{x+y}-x^2+y)}{(x^2+z^2+1)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=\frac{e^{x+y}+1}{x^2+z^2+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=\frac{-2z(e^{x+y}-x^2+y)}{(x^2+z^2+1)^2}\,.$$

Da ciò segue che

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(2,3,0) &= \frac{(e^5-4)5-4(e^5-4+3)}{5^2} = \frac{e^5-16}{25} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(2,3,0) &= \frac{e^5+1}{5} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(2,3,0) &= 0\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$\nabla f(2,3,0) = \left(\frac{e^5-16}{25}, \frac{e^5+1}{5}, 0\right).$$

(24) Le componenti di f sono le funzioni f_1 e f_2 tali che $f_1(x,y,z) = xy^2z^5$ e $f_2(x,y,z) = 2y/(x^2+1)$

Pertanto

$$\begin{aligned}
Jf_{(x,y,z)} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_1}{\partial z}(x,y,z) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y,z) & \frac{\partial f_2}{\partial z}(x,y,z) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} y^2z^5 & 2xyz^5 & 5xy^2z^4 \\ -\frac{2xy}{(x^2+1)^2} & \frac{1}{x^2+1} & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

quindi

$$Jf_{(1,2,\sqrt{2})} = \begin{pmatrix} 16\sqrt{2} & 16\sqrt{2} & 80 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(25) $$Jf_{(2,-1)} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \\ -\frac{4}{25} & 0 \end{pmatrix}.$$

(26) $$Jf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} yze^{xyz} & xze^{xyz} & xye^{xyz} \\ 2xy^3 & 3x^2y^2 & 0 \\ 0 & -\frac{2yz}{(y^2+1)^2} & \frac{1}{y^2+1} \end{pmatrix}.$$

(27) Calcoliamo anzitutto le derivate parziali prime di f. Si ha

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) &= \frac{z\sqrt{x} - (y^2+xz)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{2xz-(y^2+xz)}{2x^{3/2}} = \frac{xz-y^2}{2x^{3/2}} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) &= \frac{2y}{\sqrt{x}} \\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) &= \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}\,.
\end{aligned}$$

Passiamo ora al calcolo delle derivate seconde; poiché f è di classe C^2, l'ordine di derivazione è ininfluente. Possiamo perciò scegliere l'ordine di derivazione in modo da semplificare i calcoli. Nel nostro caso ciò significa che, con quando è possibile, è opportuno evitare di derivare $\frac{\partial f}{\partial x}$. Abbiamo quindi:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{xz-y^2}{2x^{3/2}} = \frac{1}{2}\frac{zx^{3/2}-(xz-y^2)\frac{3\sqrt{x}}{2}}{(x^{3/2})^2} = \\
&= \frac{2xz-3(xz-y^2)}{4x^{5/2}} = \frac{3y^2-xz}{4x^{5/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{2y}{\sqrt{x}} = 2y\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2} = -\frac{y}{x^{3/2}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{2y}{\sqrt{x}} = \frac{2}{\sqrt{x}} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}\sqrt{x} = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}\sqrt{x} = 0\,.
\end{aligned}$$

Perciò:

$$Hf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} \frac{3y^2-xz}{4x^{5/2}} & -\frac{y}{x^{3/2}} & \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ -\frac{y}{x^{3/2}} & \frac{2}{\sqrt{x}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(28) Calcoliamo le derivate parziali prime di f. Si ha

$$\nabla f(x,y,z) = (yz+z^2, xz, xy+2xz)\,.$$

Quindi

$$Hf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & z & y+2z \\ z & 0 & x \\ y+2z & x & 2x \end{pmatrix},$$

da cui segue

$$Hf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

(29) $$Hf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{x^2y} & \frac{xy-1}{xy^2} \\ \frac{xy-1}{xy^2} & \frac{-xy+2\log x}{y^3} \end{pmatrix}.$$

(30) $$Hf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 2ye^z & 2xe^z & 2xye^z \\ 2xe^z & -2 & x^2e^z \\ 2xye^z & x^2e^z & x^2ye^z \end{pmatrix}.$$

(31) L'equazione differenziale è lineare del primo ordine.

Per risolverla, moltiplichiamo entrambi i membri per una primitiva del coefficiente del termine $y(t)$. Tale coefficiente è $-2t$, una sua primitiva è la funzione $t \mapsto -t^2$; quindi, moltiplicando per l'esponenziale di tale funzione, otteniamo l'equazione

$$e^{-t^2}y'(t) - 2te^{-t^2}y(t) = -4t^3e^{-t^2}$$
$$\frac{d}{dt}\left(e^{-t^2}y(t)\right) = -4t^3e^{-t^2}$$

e, integrando tra 0 e t,

$$e^{-t^2}y(t) - e^{-0^2}y(0) = \int_0^t \left(-4s^3e^{-s^2}\right)\,ds\,.$$

Poiché $y(0) = 1$, si ha

$$e^{-t^2}y(t) = 1 + \int_0^t \left(-4s^3e^{-s^2}\right)\,ds$$
$$y(t) = e^{t^2} - e^{t^2}\int_0^t 4s^3e^{-s^2}\,ds\,.$$

Calcoliamo l'integrale; effettuando la sostituzione $s^2 = r$, e quindi $2s\,ds = dr$, con una integrazione per parti, si ottiene

$$\int_0^t 4s^3e^{-s^2}\,ds = \int_0^{t^2} 2re^{-r}\,dr = \left[-2re^{-r}\right]_0^{t^2} + \int_0^{t^2} 2e^{-r}\,dr =$$
$$= \left[-2re^{-r}\right]_0^{t^2} + \left[-2e^{-r}\right]_0^{t^2} = -2t^2e^{-t^2} - 2e^{-t^2} + 2\,.$$

Perciò

$$y(t) = e^{t^2} - e^{t^2}\left(-2t^2e^{-t^2} - 2e^{-t^2} + 2\right) = -e^{t^2} + 2t^2 + 2\,.$$

(32) L'equazione differenziale è lineare del primo ordine.

Per risolvere il problema di Cauchy occorre anzitutto trovare una primitiva del coefficiente di $y(t)$, cioè della funzione $t \mapsto 4t/(t^2+6)$. Visto che la derivata del denominatore è $2t$, una primitiva è la funzione $t \mapsto 2\log(t^2+6)$. Moltiplicando entrambi i membri dell'equazione differenziale per l'esponenziale di tale funzione, cioè per

$$e^{2\log(t^2+6)} = \left(e^{\log(t^2+6)}\right)^2 = (t^2+6)^2\,,$$

otteniamo

$$(t^2+6)^2y'(t) + 4t(t^2+6)y(t) = \frac{8t}{t^2+6}\,,$$
$$\frac{d}{dt}\big((t^2+6)^2y(t)\big) = \frac{8t}{t^2+6}\,.$$

Una primitiva della funzione $t \mapsto 8t/(t^2+6)$ è $t \mapsto 4\log(t^2+6)$, quindi integrando tra 0 e t si ottiene

$$(t^2+6)^2 y(t) - 6^2 y(0) = 4\log(t^2+6) - 4\log 6\,.$$

Poiché $y(0) = 0$, si ha

$$(t^2+6)^2 y(t) = 4\log(t^2+6) - 4\log 6\,.$$

La soluzione del problema di Cauchy è quindi:

$$y(t) = \frac{4\log(t^2+6) - 4\log 6}{(t^2+6)^2}\,.$$

(33) $y(t) = 4t^2 - 3\,.$

(34) L'equazione differenziale è a variabili separabili. La funzione $y \mapsto y^2 - y$ non si annulla per $y = 3$. Dall'equazione si ricava quindi

$$\frac{y'(t)}{\big(y(t)\big)^2 - y(t)} = \frac{t-2}{t^2-4t}$$
$$\int_2^t \frac{y'(\tau)}{\big(y(\tau)\big)^2 - y(\tau)}\,d\tau = \int_2^t \frac{\tau-2}{\tau^2-4\tau}\,d\tau\,.$$

Effettuando la sostituzione $y(\tau) = \xi$, visto che $y(2) = 3$, si ottiene

$$\int_3^{y(t)} \frac{1}{\xi^2-\xi}\,d\xi = \int_2^t \frac{\tau-2}{\tau^2-4\tau}\,d\tau\,.$$

Si ha

$$\int_2^t \frac{\tau-2}{\tau^2-4\tau}\,d\tau = \left[\frac{1}{2}\log|\tau^2-4\tau|\right]_2^t$$

e

$$\frac{1}{\xi^2-\xi} = \frac{1-\xi+\xi}{\xi^2-\xi} = \frac{1-\xi}{\xi^2-\xi} + \frac{\xi}{\xi^2-\xi} = -\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi-1}\,,$$

perciò

$$\int_3^{y(t)} \frac{1}{\xi^2-\xi}\,d\xi = \int_3^{y(t)} \left(\frac{1}{\xi-1} - \frac{1}{\xi}\right) d\xi = \big[\log|\xi-1| - \log|\xi|\big]_3^{y(t)} = \left[\log\left|\frac{\xi-1}{\xi}\right|\right]_3^{y(t)}\,.$$

Quindi deve essere

$$\left[\log\left|\frac{\xi-1}{\xi}\right|\right]_3^{y(t)} = \left[\frac{1}{2}\log|\tau^2-4\tau|\right]_2^t\,.$$

Notiamo che per $\tau = 2$ si ha $\tau^2 - 4\tau < 0$ e per $\xi = 3$ si ha $(\xi-1)/\xi > 0$, pertanto eliminando i valori assoluti si ottiene

$$\left[\log\frac{\xi-1}{\xi}\right]_3^{y(t)} = \left[\frac{1}{2}\log(4\tau-\tau^2)\right]_2^t\,,$$

$$\log \frac{y(t)-1}{y(t)} - \log \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \log(4t - t^2) - \frac{1}{2} \log 4 \,.$$

Naturalmente deve essere $t \in \,]0, 4[\,$, altrimenti non è definito $\log(4t - t^2)$. Da qui otteniamo

$$\log \frac{y(t)-1}{y(t)} = \log \sqrt{4t - t^2} - \log 3 \,,$$

quindi

$$\frac{y(t)-1}{y(t)} = \frac{\sqrt{4t - t^2}}{3} \,.$$

Perciò

$$1 - \frac{1}{y(t)} = \frac{\sqrt{4t - t^2}}{3} \,,$$

$$\frac{1}{y(t)} = 1 - \frac{\sqrt{4t - t^2}}{3} \,,$$

$$y(t) = \frac{3}{3 - \sqrt{4t - t^2}} \,.$$

Determiniamo l'intervallo in cui è definita la soluzione. Come osservato sopra deve essere $t \in \,]0, 4[\,$, inoltre t deve essere tale che $3 - \sqrt{4t - t^2} \neq 0$, cioè $4t - t^2 \neq 9$. Il polinomio $t^2 - 4t + 9$ ha discriminante negativo, pertanto non si annulla mai, quindi la condizione $3 - \sqrt{4t - t^2} \neq 0$ è sempre verificata. Infine nel risolvere l'equazione abbiamo supposto che fosse $\big(y(t)\big)^2 - y(t) \neq 0$, cioè $y(t) \neq 0$ e $y(t) \neq 1$. Per $t \in \,]0, 4[$ tali condizioni sono verificate, pertanto il problema di Cauchy ha la soluzione

$$y \colon \,]0, 4[\, \to \mathbb{R} \,, \qquad y(t) = \frac{3}{3 - \sqrt{4t - t^2}} \,.$$

(35) L'equazione differenziale è a variabili separabili. Il problema di Cauchy equivale a

$$\begin{cases} \dfrac{y'(t)}{\big(y(t)\big)^3} = 4t + 6 \\ y(0) = 1 \,; \end{cases}$$

dall'equazione, integrando e ricordando che $y(0) = 1$, si ottiene:

$$\int_0^t \frac{y'(\tau)}{\big(y(\tau)\big)^3} \, d\tau = \int_0^t (4\tau + 6) \, d\tau$$

$$\left[-\frac{1}{2} \big(y(\tau)\big)^{-2} \right]_0^t = \big[2\tau^2 + 6\tau \big]_0^t$$

$$-\frac{1}{2} \big(y(t)\big)^{-2} + \frac{1}{2} \big(y(0)\big)^{-3} = 2t^2 + 6t$$

$$-\frac{1}{2} \big(y(t)\big)^{-2} + \frac{1}{2} = 2t^2 + 6t$$

$$\big(y(t)\big)^{-2} = -4t^2 - 12t + 1 \,.$$

Poiché $\big(y(t)\big)^{-2} > 0$, deve essere $-4t^2 - 12t + 1 > 0$. Il trinomio $-4t^2 - 12t + 1$ si annulla per

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - (-4)}}{-4} = \frac{6 \pm \sqrt{40}}{-4} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}\,;$$

pertanto deve essere $t \in \big]\big(-3 - \sqrt{10}\,\big)/2, \big(-3 + \sqrt{10}\,\big)/2\big[$. Per tali t si ha

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{-4t^2 - 12t + 1}}\,.$$

Nel risolvere l'equazione abbiamo supposto $y(t) \neq 0$, questa condizione è verificata dalla soluzione trovata. Perciò il problema di Cauchy ha la soluzione

$$y\colon \left]\frac{-3 - \sqrt{10}}{2}, \frac{-3 + \sqrt{10}}{2}\right[\to \mathbb{R}\,, \qquad y(t) = \frac{1}{\sqrt{-4t^2 - 12t + 1}}\,.$$

(36) $\quad y\colon \big]-2 + \sqrt{16 - \pi/2}, -2 + \sqrt{16 + \pi/2}\big[\to \mathbb{R}\,, \qquad y(t) = \tan(t^2 + 4t - 12)\,.$

(37) L'equazione è lineare a coefficienti costanti. Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^2 + 4\lambda + 3$, che si annulla per

$$\lambda = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3} = -2 \pm 1\,;$$

quindi le radici sono -1 e -3. Perciò l'omogenea associata ha le soluzioni e^{-t} e e^{-3t}.

Visto che -3 è radice semplice dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea nella forma $v(t) = ate^{-3t}$, con a costante da determinarsi. Si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= ae^{-3t} - 3ate^{-3t} \\ v''(t) &= -3ae^{-3t} - 3ae^{-3t} + 9ate^{-3t} = -6ae^{-3t} + 9ate^{-3t}\,. \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione differenziale, v risulta essere soluzione se e solo se per ogni t reale si ha:

$$-6ae^{-3t} + 9ate^{-3t} + 4(ae^{-3t} - 3ate^{-3t}) + 3ate^{-3t} = e^{-3t}$$

cioè

$$-2ae^{-3t} = e^{-3t}$$

e quindi affinché v sia soluzione dovrà essere $a = -1/2$.

Perciò l'integrale generale è

$$\left\{ c_1 e^{-t} + c_2 e^{-3t} - \frac{1}{2}\,te^{-3t} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(38) Per risolvere il problema di Cauchy occorre anzitutto determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) = e^{2t} + 4\sin(4t)$$

che è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 6\lambda + 8$. Le radici di questo polinomio sono

$$\lambda = 3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 1 \cdot 8} = 3 \pm 1 = \begin{cases} 2 \\ 4 \end{cases}$$

e quindi l'integrale generale dell'equazione omogenea è

$$\left\{ c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} .$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Visto che il termine non omogeneo è somma di due addendi, una soluzione si può ottenere come somma di soluzioni delle due equazioni non omogenee

$$\begin{aligned} y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) &= e^{2t} , \\ y''(t) - 6y'(t) + 8y(t) &= 4 \sin(4t) . \end{aligned}$$

Il numero 2 è radice del polinomio caratteristico, quindi una soluzione della prima equazione va cercata nella forma $v(t) = ate^{2t}$, con $a \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= ae^{2t} + 2ate^{2t} \\ v''(t) &= 2ae^{2t} + 2ae^{2t} + 4ate^{2t} = 4ae^{2t} + 4ate^{2t} \end{aligned}$$

perciò a deve essere tale che

$$4ae^{2t} + 4ate^{2t} - 6\big(ae^{2t} + 2ate^{2t}\big) + 8ate^{2t} = e^{2t} ,$$

cioè $-2ae^{2t} = e^{2t}$, quindi $a = -1/2$.

I numeri $\pm 4i$ non sono radici del polinomio caratteristico, quindi una soluzione della seconda equazione va cercata nella forma $v(t) = a \sin(4t) + b \cos(4t)$, con $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha

$$\begin{aligned} v'(t) &= 4a \cos(4t) - 4b \sin(4t) \\ v''(t) &= -16a \sin(4t) - 16b \cos(4t) \end{aligned}$$

perciò a e b debbono essere tali che, $\forall t \in \mathbb{R}$, si abbia

$$\begin{aligned} -16a \sin(4t) - 16b \cos(4t) - 6\big(4a \cos(4t) - 4b \sin(4t)\big) + 8\big(a \sin(4t) + b \cos(4t)\big) &= \\ = 4 \sin(4t) & \end{aligned}$$

cioè

$$(-8a + 24b) \sin(4t) + (-24a - 8b) \cos(4t) = 4 \sin(4t) .$$

I coefficienti delle funzioni $\sin(4t)$ e $\cos(4t)$ nei due membri dell'uguaglianza devono essere uguali, quindi si deve avere

$$\begin{cases} -8a + 24b = 4 \\ -24a - 8b = 0 ; \end{cases}$$

dalla seconda equazione si ottiene $b = -3a$, perciò la prima diventa $-80a = 4$ e quindi $a = -1/20$ e $b = 3/20$.

Quindi una soluzione dell'equazione non omogenea è

$$-\frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t)$$

e l'integrale generale è

$$\left\{ c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t) \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cerchiamo c_1 e c_2 tali che la funzione

$$u(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t)$$

verifichi le condizioni

$$\begin{cases} u(0) = 0 \\ u'(0) = 0\,. \end{cases}$$

Visto che

$$u'(t) = 2c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{4t} - \frac{1}{2}\,e^{2t} - te^{2t} - \frac{1}{5}\cos(4t) - \frac{3}{5}\sin(4t)$$

deve essere

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \dfrac{3}{20} = 0 \\ 2c_1 + 4c_2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = 0\,. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $c_1 = -c_2 - 3/20$, sostituendo nella seconda si ottiene

$$-2c_2 - \frac{3}{10} + 4c_2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = 0\,,$$

cioè $2c_2 - 1 = 0$ e quindi $c_2 = 1/2$ e $c_1 = -13/20$.

Perciò la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(t) = -\frac{13}{20}\,e^{2t} + \frac{1}{2}\,e^{4t} - \frac{1}{2}\,te^{2t} - \frac{1}{20}\sin(4t) + \frac{3}{20}\cos(4t)\,.$$

(39) L'equazione è lineare a coefficienti costanti non omogenea.

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^2 + 1$, che ha le radici $\pm i$. L'integrale generale dell'omogenea in ambito reale è quindi

$$\{\, c_1 \sin t + c_2 \cos t \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R} \}\,.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Il numero i è radice del polinomio caratteristico, quindi $\cos t$ è soluzione dell'omogenea associata, pertanto la soluzione va cercata nella forma $v(t) = at\cos t + bt\sin t$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Abbiamo

$$\begin{aligned} v'(t) &= a\cos t - at\sin t + b\sin t + bt\cos t\,, \\ v''(t) &= -a\sin t - a\sin t - at\cos t + b\cos t + b\cos t - bt\sin t = \\ &= -2a\sin t - at\cos t + 2b\cos t - bt\sin t\,; \end{aligned}$$

affinché v sia soluzione deve essere, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$(-2a\sin t - at\cos t + 2b\cos t - bt\sin t) + (at\cos t + bt\sin t) = \cos t\,,$$

cioè

$$-2a\sin t + 2b\cos t = \cos t\,,$$

perciò deve essere $a = 0$ e $b = 1/2$.

Quindi l'integrale generale è

$$\left\{ c_1\sin t + c_2\cos t + \frac{1}{2}\,t\sin t \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(40) $\quad y(t) = -\dfrac{1}{3}\,e^{-3t} - te^{-3t} + \dfrac{1}{3}\,e^{3t}$.

(41) $\quad \{\, c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + (t+2)e^t \mid c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$.

(42) $\quad y(t) = \dfrac{1}{3}\,e^{3t} - 2te^{3t} + t + \dfrac{2}{3}$.

(43) L'equazione differenziale è lineare omogenea a coefficienti costanti. Il suo polinomio caratteristico è

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4\lambda - 2\,.$$

Occorre determinare le radici di tale polinomio. Come si verifica facilmente esso si annulla per $\lambda = 1$; dividendo per $\lambda - 1$ si ha:

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & -3 & 4 & -2 \\ 1 & & 1 & -2 & 2 \\ \hline & 1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

e quindi il polinomio si fattorizza in $(\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda+2)$. Il secondo fattore si annulla per

$$\lambda = 1 \pm \sqrt{1^2 - 1\cdot 2} = 1 \pm \sqrt{-1} = 1 \pm i\,.$$

Perciò le radici del polinomio caratteristico sono 1, $1-i$ e $1+i$, quindi tre soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale sono: e^t, $e^t\cos t$ $e^t\sin t$.

Pertanto l'integrale generale è $\{\, c_1e^t\cos t + c_2e^t\sin t + c_3e^t \mid c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}$.

(44) L'equazione da risolvere è lineare non omogenea a coefficienti costanti.

Il polinomio caratteristico dell'omogenea associata è $\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1$, che, come si verifica facilmente, si annulla per $\lambda = 1$; quindi tale polinomio si fattorizza in $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ e perciò (oltre alla radice $\lambda = 1$) ha le radici $\lambda = \pm i$. L'integrale generale della omogenea, rimanendo in ambito reale, è quindi

$$\left\{ c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Cerchiamo una soluzione dell'equazione non omogenea. Visto che il termine non omogeneo è $\cos t$ e che i è radice del polinomio caratteristico, la soluzione si può cercare nella forma $v(t) = at\cos t + bt\sin t$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned} v'(t) &= a\cos t - at\sin t + b\sin t + bt\cos t \\ v''(t) &= -a\sin t - a\sin t - at\cos t + b\cos t + b\cos t - bt\sin t = \\ &= -2a\sin t - at\cos t + 2b\cos t - bt\sin t \\ v'''(t) &= -2a\cos t - a\cos t + at\sin t - 2b\sin t - b\sin t - bt\cos t = \\ &= -3a\cos t + at\sin t - 3b\sin t - bt\cos t \end{aligned}$$

quindi v è soluzione se, $\forall t \in \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} &(-3a\cos t + at\sin t - 3b\sin t - bt\cos t) - (-2a\sin t - at\cos t + 2b\cos t - bt\sin t) + \\ &\qquad + (a\cos t - at\sin t + b\sin t + bt\cos t) - (at\cos t + bt\sin t) = \cos t, \end{aligned}$$

cioè

$$(2a - 2b)\sin t + (-2a - 2b)\cos t = \cos t,$$

perciò a e b devono soddisfare il sistema

$$\begin{cases} 2a - 2b = 0 \\ -2a - 2b = 1; \end{cases}$$

dalla prima equazione segue $a = b$, sostituendo nella seconda otteniamo $-4a = 1$, quindi la soluzione è $a = b = -\dfrac{1}{4}$.

Quindi una soluzione dell'equazione non omogenea è $-\dfrac{1}{4}t\sin t - \dfrac{1}{4}t\cos t$ e l'integrale generale è

$$\left\{ c_1 e^t + c_2 \cos t + c_3 \sin t - \frac{1}{4}t\sin t - \frac{1}{4}t\cos t \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(45) $$\left\{ c_1 e^t + c_2 e^{-t} + c_3 t e^{-t} + \frac{1}{4} t e^t \;\middle|\; c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \right\}.$$

(46) $$y(t) = \frac{23}{9} e^{-3t} + \frac{11}{3} t e^{-3t} + 4t - \frac{23}{9}.$$

(47) La funzione f è di classe C^∞. Si ha

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2-3, 2y-2z+4, -2y+4z-8)$$

quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2-3=0 \\ 2y-2z+4=0 \\ -2y+4z-8=0\,. \end{cases}$$

La prima equazione è verificata per $x=\pm 1$. Sommando la seconda e la terza equazione si ottiene $2z-4=0$ e quindi $z=2$, che, sostituito nella seconda equazione, ci dà $y=0$.

Perciò i punti critici per f sono $(1,0,2)$ e $(-1,0,2)$. Per classificarli calcoliamo la matrice hessiana. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial x}(3x^2-3) = 6x \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}(3x^2-3) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(3x^2-3) = 0 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial y}(2y-2z+4) = 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(2y-2z+4) = -2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= \frac{\partial}{\partial z}(-2y+4z-8) = 4\,.
\end{aligned}$$

Perciò

$$Hf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 6x & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Hf_{(1,0,2)} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad Hf_{(-1,0,2)} = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo se queste matrici sono definite, studiando il segno dei minori di nord-ovest.

Per $Hf_{(1,0,2)}$ si ha

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= 6 > 0 \\
\Delta_2 &= 6 \cdot 2 = 12 > 0 \\
\Delta_3 &= 6 \cdot 2 \cdot 4 - 6 \cdot (-2) \cdot (-2) = 24 > 0
\end{aligned}$$

e quindi essa è definita positiva, perciò $(1,0,2)$ è punto di minimo locale per f.

Per $Hf_{(-1,0,2)}$ si ha

$$\Delta_1 = -6 < 0$$
$$\Delta_2 = -6 \cdot 2 = -12 < 0$$

e questo è sufficiente per concludere che essa è non definita, quindi $(-1,0,2)$ è punto di sella per f.

Pertanto i punti critici di f sono $(1,0,2)$, di minimo locale, e $(-1,0,2)$ di sella.

(48) La funzione f è di classe C^∞. Si ha

$$\nabla f(x,y,z) = (3x^2 + 4x - 12 - 4y, -4x + 4y, 3z^2 - 6z),$$

perciò i punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 4x - 12 - 4y = 0 \\ -4x + 4y = 0 \\ 3z^2 - 6z = 0\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione segue $y = x$, sostituendo questo valore di y nella prima equazione si ottiene $3x^2 - 12 = 0$ e quindi abbiamo le soluzioni $x = 2$ e $x = -2$, a cui corrisponde $y = 2$ e $y = -2$, rispettivamente. Le terza equazione ha le soluzioni $z = 0$ e $z = 2$. Perciò il sistema ha le quattro soluzioni $(2,2,0)$, $(-2,-2,0)$, $(2,2,2)$ e $(-2,-2,2)$; questi sono i punti critici di f.

Per classificarli calcoliamo la matrice hessiana. Abbiamo

$$Hf_{(x,y,z)} = \begin{pmatrix} 6\,x + 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6\,z - 6 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$Hf_{(2,2,0)} = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}, \qquad Hf_{(-2,-2,0)} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix},$$

$$Hf_{(2,2,2)} = \begin{pmatrix} 16 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \qquad Hf_{(-2,-2,2)} = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Determiniamo se queste matrici sono definite, studiando il segno dei minori di nord-ovest.

Per $Hf_{(2,2,0)}$ si ha

$$\Delta_1 = 16 > 0$$
$$\Delta_2 = 16 \cdot 4 - (-4)^2 = 48 > 0$$
$$\Delta_3 = -6\Delta_2 = -288 < 0$$

e quindi essa è non definita e $(2,2,0)$ è punto di sella.

Per $Hf_{(-2,-2,0)}$ si ha

$$\Delta_1 = -8 < 0$$
$$\Delta_2 = -8 \cdot 4 - (-4)^2 = -48 < 0$$

e questo è sufficiente per concludere che la matrice è non definita e $(-2,-2,0)$ è punto di sella.

Per $Hf_{(2,2,2)}$ si ha

$$\Delta_1 = 16 > 0$$
$$\Delta_2 = 16 \cdot 4 - (-4)^2 = 48 > 0$$
$$\Delta_3 = 6\Delta_2 = 288 > 0$$

e quindi essa è definita positiva e $(2,2,2)$ è punto di minimo locale.

Per $Hf_{(-2,-2,2)}$ si ha

$$\Delta_1 = -8 < 0$$
$$\Delta_2 = -8 \cdot 4 - (-4)^2 = -48 < 0$$

e questo è sufficiente per concludere che la matrice è non definita e $(-2,-2,2)$ è punto di sella.

Perciò f ha i punti ciritici $(2,2,0)$, $(-2,-2,0)$ e $(-2,-2,2)$, che sono punti di sella, e $(2,2,2)$, che è punto di minimo locale.

(49) La funzione f è di classe C^∞. Si ha

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{2x(x+y) - (x^2+2y^2+z^2+3)}{(x+y)^2} = \frac{x^2+2xy-2y^2-z^2-3}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{4y(x+y) - (x^2+2y^2+z^2+3)}{(x+y)^2} = \frac{-x^2+4xy+2y^2-z^2-3}{(x+y)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{2z}{x+y}$$

perciò i punti critici di f sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2+2xy-2y^2-z^2-3=0 \\ -x^2+4xy+2y^2-z^2-3=0 \\ z=0\,, \end{cases}$$

quindi

$$\begin{cases} x^2+2xy-2y^2-3=0 \\ -x^2+4xy+2y^2-3=0 \\ z=0\,. \end{cases}$$

Sommando membro a membro le prime due equazioni otteniamo $6xy-6=0$, cioè $xy=1$. Poiché per $x=0$ il sistema non è verificato, deve essere $y=1/x$, quindi la prima equazione diventa $x^2+2-2/x^2-3=0$, cioè $x^4-x^2-2=0$, da cui, visto che x^2 non può essere negativo, $x^2=2$, quindi $x=\pm\sqrt{2}$.

Perciò i punti critici per f sono $\bigl(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0\bigr)$ e $\bigl(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\bigr)$.

Per classificarli calcoliamo la matrice hessiana. Abbiamo

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{(2x+2y)(x+y)^2-2(x^2+2xy-2y^2-z^2-3)(x+y)}{(x+y)^4} = \\
&= \frac{6y^2+2z^2+6}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y,z) &= \frac{(2x-4y)(x+y)^2-2(x^2+2xy-2y^2-z^2-3)(x+y)}{(x+y)^4} = \\
&= \frac{-6xy+2z^2+6}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(x,y,z) &= \frac{-2z}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z) &= \frac{(4x+4y)(x+y)^2-2(-x^2+4xy+2y^2-z^2-3)(x+y)}{(x+y)^4} = \\
&= \frac{6x^2+2z^2+6}{(x+y)^3} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(x,y,z) &= \frac{-2z}{(x+y)^2} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,z) &= \frac{2}{x+y}\,.
\end{aligned}$$

Quindi

$$Hf_{(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$Hf_{(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

La matrice $Hf_{(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0)}$ è diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale negativi, quindi ha autovalori negativi, pertanto è definita negativa e $\bigl(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0\bigr)$ è punto di massimo per f. La matrice $Hf_{(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)}$ è diagonale con tutti gli elementi sulla diagonale positivi, quindi ha autovalori positivi, pertanto è definita positiva e $\bigl(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\bigr)$ è punto di minimo per f.

Perciò f ha i punti critici $\bigl(-\sqrt{2},-1/\sqrt{2},0\bigr)$, che è punto di minimo locale, e $\bigl(\sqrt{2},1/\sqrt{2},0\bigr)$, che è punto di massimo locale.

(50) I punti critici di f sono $(2,0,3)$, $(2,0,-3)$, $(-2,0,3)$, $(-2,0,-3)$, punti di sella, e $(0,0,0)$, punto di minimo locale.

(51) I punti critici di f sono $(3/2, 3/2, 0)$, punto di minimo locale, e $(8/3, 8/3, 1)$, punto di sella.

(52) I punti critici di f sono $(-1,0)$, punto di minimo locale, $(5/3, 0)$, punto di massimo locale e $(1,2)$, $(1,-2)$, punti di sella.

(53) L'insieme V è una ellisse, quindi è compatto, f è continua, perciò per il teorema di Weierstrass $f(V)$ ha massimo e minimo. Inoltre V è connesso, quindi per il teorema dei valori intermedi $f(V)$ è un intervallo. Possiamo concludere che $f(V) = [\min f(V), \max f(V)]$. Quindi dobbiamo determinare massimo e minimo (assoluti) di $f\big|_V$. A tal fine cerchiamo gli estremanti locali di $f\big|_V$.

Posto

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = 10x^2 + y^2,$$

V è l'insieme di livello 1 di g. Il gradiente di g è $(20x, 2y)$ che è nullo solo per $(x,y) = (0,0)$, che non appartiene a V; perciò se $(x,y) \in V$ è estremante locale per $f\big|_V$ allora si può applicare il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Poiché $\nabla f(x,y) = (20x, 4y^3)$, dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 20x = 20\lambda x \\ 4y^3 = 2\lambda y \\ 10x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} (1-\lambda)x = 0 \\ (2y^2 - \lambda)y = 0 \\ 10x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

La prima equazione è fattorizzata, pertanto l'insieme delle soluzioni del sistema è l'unione degli insiemi delle soluzioni dei seguenti due sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ (2y^2 - \lambda)y = 0 \\ 10x^2 + y^2 = 1\,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ (2y^2 - \lambda)y = 0 \\ 10x^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Il primo diventa

$$\begin{cases} x = 0 \\ (2y^2 - \lambda)y = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

che ha (trascurando il valore di λ) le due soluzioni $x = 0$, $y = \pm 1$. Dal secondo si ottiene

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ (2y^2 - 1)y = 0 \\ 10x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e dalla seconda equazione si ottiene $y = 0$ oppure $y = \pm 1/\sqrt{2}$, quindi, utilizzando l'ultima equazione, abbiamo le sei soluzioni

$$(x, y) = \left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right) , \quad (x, y) = \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) , \quad (x, y) = \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) .$$

Gli eventuali estremanti locali per $f\big|_V$ sono perciò da ricercarsi tra gli otto punti trovati.

I valori che f assume in tali punti sono

$$\begin{aligned}
&f(0, \pm 1) = 10 \cdot 0^2 + (\pm 1)^4 = 1 \\
&f\left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}}, 0 \right) = 10 \left(\pm \frac{1}{\sqrt{10}} \right)^2 + 0^4 = 1 \\
&f\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 10 \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{3}{4} \\
&f\left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 10 \left(\pm \frac{1}{2\sqrt{5}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^4 = \frac{3}{4} .
\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\min f(V) = \min \left\{ 1, \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4}, \qquad \max f(V) = \max \left\{ 1, \frac{3}{4} \right\} = 1 ,$$

perciò $f(V) = \left[\frac{3}{4}, 1 \right]$.

(54) L'insieme V è una ellisse, quindi è compatto, f è continua, perciò per il teorema di Weierstrass $f(V)$ ha massimo e minimo. Inoltre V è connesso, quindi per il teorema dei valori intermedi $f(V)$ è un intervallo. Possiamo concludere che $f(V) = [\min f(V), \max f(V)]$. Quindi dobbiamo determinare massimo e minimo (assoluti) di $f\big|_V$. A tal fine cerchiamo gli estremanti locali di $f\big|_V$.

Posto

$$g \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} , \qquad g(x, y) = x^2 + 4y^2 ,$$

V è l'insieme di livello 9 di g ; tale funzione è di classe C^∞ e si ha, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x, y) = (2x, 8y)$, che si annulla solo nell'origine, punto non appartenente a V ; per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se (x, y) è estremante locale per $f\big|_V$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$. Poiché $\nabla f(x, y) = (2x, 1)$, ogni estremante locale per $f\big|_V$ verifica il sistema

$$\begin{cases} 2x = \lambda 2x \\ 1 = \lambda 8y \\ x^2 + 4y^2 = 9 \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ 1 - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 9\,. \end{cases}$$

La prima equazione è verificata se $x = 0$ oppure $\lambda = 1$. Nel primo caso il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 1 - 8\lambda y = 0 \\ 4y^2 = 9 \end{cases}$$

e quindi abbiamo le soluzioni $x = 0$, $y = \pm 3/2$, $\lambda = \pm 1/12$. Nel secondo caso il sistema diventa:

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 1 - 8y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 9\,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione abbiamo $y = 1/8$, quindi la terza diventa $x^2 + (1/16) = 9$, cioè $x^2 = 143/16$; abbiamo quindi le soluzioni $x = \pm\sqrt{143}/4$, $y = 1/8$, $\lambda = 1$.

Perciò solo i punti $(0, 3/2)$, $(0, -3/2)$, $\big(\sqrt{143}/4, 1/8\big)$, $\big(-\sqrt{143}/4, 1/8\big)$ possono essere estremanti locali per $f\big|_V$. Si ha

$$f\left(0, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$
$$f\left(0, -\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$
$$f\left(\pm\frac{\sqrt{143}}{4}, \frac{1}{8}\right) = \left(\pm\frac{\sqrt{143}}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} = \frac{145}{16}\,.$$

Si ha quindi

$$\min f(V) = \min\left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{145}{16}\right\} = -\frac{3}{2} \qquad \max f(V) = \max\left\{\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}, \frac{145}{16}\right\} = \frac{145}{16}\,.$$

Perciò $f(V) = \left[-\frac{3}{2}, \frac{145}{16}\right]$.

(55) L'insieme V è una ellisse, quindi è compatto, f è continua, perciò per il teorema di Weierstrass $f(V)$ ha massimo e minimo. Inoltre V è connesso, quindi per il teorema dei valori intermedi $f(V)$ è un intervallo. Possiamo concludere che $f(V) = [\min f(V), \max f(V)]$. Quindi dobbiamo determinare massimo e minimo (assoluti) di $f\big|_V$. A tal fine cerchiamo gli estremanti locali di $f\big|_V$.

Posto

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x,y) = 9x^2 + 4y^2\,,$$

V è l'insieme di livello 16 di g; tale funzione è di classe C^∞ e si ha, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x,y) = (18x, 8y)$, che è diverso da zero per ogni $(x,y) \in V$, visto che $(0,0) \notin V$; quindi per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se (x,y) è estremante locale per $f\big|_V$, allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$.

Si ha $\nabla f(x,y) = (y,x)$, quindi ogni estremante locale per $f\big|_V$ verifica il sistema

$$\begin{cases} y = \lambda 18x \\ x = \lambda 8y \\ 9x^2 + 4y^2 = 16\,. \end{cases}$$

Il sistema delle prime due equazioni si può scrivere

$$\begin{cases} 18\lambda x - y = 0 \\ x - 8\lambda y = 0 \\ 9x^2 + 4y^2 = 16 \end{cases}$$

ed è è lineare omogeneo rispetto alle incognite x e y. Se fosse $x = y = 0$ non sarebbe verificata l'equazione $9x^2 + 4y^2 = 16$, quindi questo sistema deve avere soluzione non nulla. Pertanto λ deve essere tale che il determinante della matrice dei coefficienti è 0; cioè $-144\lambda^2 + 1 = 0$, quindi si ha $\lambda = \pm 1/12$.

Se $\lambda = 1/12$ si ha $y = (3/2)x$, quindi l'ultima equazione diventa $18x^2 = 16$, da cui segue $x = \pm 2\sqrt{2}/3$ e quindi $y = \pm\sqrt{2}$.

Se $\lambda = -1/12$ si ha $y = -(3/2)x$, quindi l'ultima equazione diventa $18x^2 = 16$, da cui segue $x = \pm 2\sqrt{2}/3$ e quindi $y = \mp\sqrt{2}$.

Pertanto solo i punti

$$\big(2\sqrt{2}/3, \sqrt{2}\big)\,, \qquad \big(-2\sqrt{2}/3, -\sqrt{2}\big)\,, \qquad \big(2\sqrt{2}/3, -\sqrt{2}\big)\,, \qquad \big(-2\sqrt{2}/3, \sqrt{2}\big)$$

possono essere estremanti locali per $f\big|_V$. Il valore di f in tali punti è

$$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} + 3 = \frac{13}{3}$$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} + 3 = \frac{13}{3}$$

$$f\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} + 3 = \frac{5}{3}$$

$$f\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}\right) = -\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{2} + 3 = \frac{5}{3}\,.$$

Il minimo e il massimo di $f(V)$ sono anche minimo e massimo locale per $f\big|_V$, quindi sono uno dei valori trovati. Perciò si ha

$$\min f(V) = \min\left\{\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right\} = \frac{5}{3}, \qquad \max f(V) = \max\left\{\frac{13}{3}, \frac{5}{3}\right\} = \frac{13}{3},$$

quindi $f(V) = \left[\frac{5}{3}, \frac{13}{3}\right]$.

(56) L'insieme V è la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, quindi è chiuso, limitato e connesso; f è continua, perciò per i teoremi di Weierstrass e dei valori intermedi $f(V)$ è un intervallo limitato e ha massimo e minimo. Per determinare tale intervallo dobbiamo determinare massimo e minimo di $f\big|_V$ e quindi cerchiamo anzitutto gli estremanti locali.

Posto

$$g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = x^2 + y^2,$$

V è l'insieme di livello 1 di g; tale funzione è di classe C^∞ e si ha, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\nabla g(x,y) = (2x, 2y)$, che si annulla solo in $(0,0)$, che non appartiene a V. Perciò, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se (x,y) è un estremante locale per $f\big|_V$ allora esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$. Dobbiamo quindi risolvere il sistema

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x = 2\lambda x \\ 6y^2 = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \,. \end{cases}$$

La seconda equazione si può scrivere nella forma $y(3y - \lambda) = 0$, quindi è verificata per $y = 0$ oppure $\lambda = 3y$.

Nel primo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x = 2\lambda x \\ y = 0 \\ x^2 = 1 \,, \end{cases}$$

quindi $x = \pm 1$ e rimane una equazione da cui si può ricavare λ, che però non ci interessa. Abbiamo quindi i punti $(1,0)$ e $(-1,0)$.

Nel secondo caso il sistema diventa

$$\begin{cases} 3x^2 - 6x = 6xy \\ \lambda = 3y \\ x^2 + y^2 = 1 \,; \end{cases}$$

la prima equazione si può scrivere nella forma $x(x - 2 - 2y) = 0$, quindi è verificata per $x = 0$ e per $x = 2y + 2$. Otteniamo così i due sistemi

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 3y \\ y^2 = 1 \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 2 \\ \lambda = 3y \\ (2y+2)^2 + y^2 = 1\,. \end{cases}$$

Il primo sistema è verificato per $y = \pm 1$ e abbiamo i punti $(0,1)$. L'ultima equazione del secondo sistema è equivalente a $5y^2 + 8y + 3 = 0$, che ha le soluzioni

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 5 \cdot 3}}{5} = \frac{-4 \pm 1}{5} = \begin{cases} -1 \\ -\dfrac{3}{5} \end{cases}$$

a cui corrisponde, rispettivamente, $x = 0$ e $x = 4/5$; perciò abbiamo i punti $(0,1)$ e $(4/5, -3/5)$.

Possiamo concludere che gli unici punti che possono essere estremanti locali per $f\big|_V$ sono: $(0,1)$ $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(4/5,-3/5)$.

Abbiamo

$$\begin{aligned} f(0,1) &= 2 \\ f(0,-1) &= -2 \\ f(1,0) &= -2 \\ f(-1,0) &= -4 \\ f\left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) &= \frac{64}{125} - 3\,\frac{16}{25} - 2\,\frac{27}{125} = -\frac{230}{125} = -\frac{46}{25}\,. \end{aligned}$$

Perciò $\min f(V) = -4$, $\max f(V) = 2$ e $f(V) = [-4, 2]$.

(57) $f(V) = \left[-\sqrt{7}, \sqrt{7}\right]$.

(58) $f(V) = \left[-\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right]$.

(59) L'insieme V è la sfera di centro l'origine e raggio 1, quindi è compatto e connesso; f è continua, perciò per i teoremi di Weierstrass e dei valori intermedi $f(V)$ è un intervallo chiuso e limitato. Per determinare tale intervallo dobbiamo determinare massimo e minimo di $f\big|_V$ e quindi cerchiamo gli estremanti locali.

Posto

$$g \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2\,,$$

V è l'insieme di livello 9 di g, che è di classe C^∞. Si ha, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 2y, 2z),$$

che si annulla solo in $(0,0,0)$, che non appartiene a V; perciò, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se (x,y,z) è un estremante locale per $f\big|_V$ allora esiste

$\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$. Abbiamo quindi il sistema

$$\begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ 4y = 2\lambda y \\ 4z + 4 = 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\,, \end{cases}$$

che si può scrivere nella forma

$$\begin{cases} x(1-\lambda) = 0 \\ y(2-\lambda) = 0 \\ 2z + 2 = \lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9\,. \end{cases}$$

La prima equazione è verificata per $x = 0$ o $\lambda = 1$.

Se $\lambda = 1$ il sistema diventa

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 0 \\ z = -2 \\ x^2 + 4 = 9\,, \end{cases}$$

quindi si hanno i due punti $(x,y,z) = \big(\pm\sqrt{5}, 0, -2\big)$.

Se $x = 0$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(2-\lambda) = 0 \\ 2z + 2 = \lambda z \\ y^2 + z^2 = 9\,. \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata per $y = 0$ o $\lambda = 2$.

Se $\lambda = 2$ allora

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 2 \\ 2z + 2 = 2z \\ y^2 + z^2 = 9\,, \end{cases}$$

che non ha soluzioni.

Se $y = 0$ allora

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ 2z + 2 = \lambda z \\ z^2 = 9\,, \end{cases}$$

quindi si hanno i due punti $(0, 0, \pm 3)$.

Pertanto possono essere estremanti locali per $f\big|_V$ solo i punti

$$\big(\sqrt{5},0,-2\big)\,, \qquad \big(-\sqrt{5},0,-2\big)\,, \qquad (0,0,3)\,, \qquad (0,0,-3)\,.$$

Il valore di f in tali punti è

$$\begin{aligned}
&f\big(\sqrt{5},0,-2\big) = \big(\sqrt{5}\,\big)^2 + 2(-2)^2 + 4(-2) = 5\\
&f\big(-\sqrt{5},0,-2\big) = \big(-\sqrt{5}\,\big)^2 + 2(-2)^2 + 4(-2) = 5\\
&f(0,0,3) = 2\cdot 3^2 + 4\cdot 3 = 30\\
&f(0,0,-3) = 2(-3)^2 + 4(-3) = 6\,.
\end{aligned}$$

Perciò si ha

$$\min f(V) = \min\{\,5,6,30\,\} = 5\,, \qquad\qquad \max f(V) = \max\{\,5,6,30\,\} = 30\,,$$

quindi $f(V) = [5,30]$.

(60) L'insieme V è la parte di spazio racchiusa da un ellissoide di centro l'origine, quindi è compatto e connesso,. La funzione f è continua, quindi $f(V)$ è un intervallo chiuso e limitato. Dobbiamo determinare gli estremi di questo intervallo, cioè massimo e minimo (assoluti) di $f\big|_V$. Cerchiamo anzitutto gli estremi locali per $f\big|_V$.

Posto

$$g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad x^2 + 9y^2 + z^2\,,$$

V è l'insieme di livello 9 di g, che è di classe C^∞. Si ha, $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3$,

$$\nabla g(x,y,z) = (2x, 18y, 2z)\,,$$

che si annulla solo in $(0,0,0)$, che non appartiene a V; perciò, per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, se (x,y,z) è un estremante locale per $f\big|_V$ allora esiste $\lambda\in\mathbb{R}$ tale che $\nabla f(x,y,z) = \lambda\nabla g(x,y,z)$. Dobbiamo quindi risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases}
2(x+1) = 2\lambda x\\
-6y = 18\lambda y\\
-6z = 2\lambda z\\
x^2 + 9y^2 + z^2 = 9\,,
\end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases}
x + 1 - \lambda x = 0\\
(3\lambda + 1)y = 0\\
(\lambda + 3)z = 0\\
x^2 + 9y^2 + z^2 = 9\,.
\end{cases}$$

La seconda equazione è verificata per $y = 0$ oppure $\lambda = -1/3$.

Se $\lambda = -1/3$ il sistema diventa

$$\begin{cases} x = -\dfrac{3}{4} \\ \lambda = -\dfrac{1}{3} \\ z = 0 \\ \dfrac{9}{16} + 9y^2 = 9\,; \end{cases}$$

l'ultima equazione è verificata per $y^2 = 15/16$, pertanto abbiamo le due soluzioni $(x, y, z) = \bigl(-3/4, \pm\sqrt{15}/4, 0\bigr)$.

Se $y = 0$, il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 1 - \lambda x = 0 \\ y = 0 \\ (\lambda + 3)z = 0 \\ x^2 + z^2 = 9\,. \end{cases}$$

La seconda equazione è verificata per $z = 0$ oppure $\lambda = -3$.

Se $\lambda = -3$, si ha

$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = 0 \\ \lambda = -3 \\ \dfrac{1}{16} + z^2 = 9\,. \end{cases}$$

L'ultima equazione è verificata per $z^2 = 143/16$, pertanto abbiamo le due soluzioni $(x, y, z) = \bigl(-1/4, 0, \pm\sqrt{143}/4\bigr)$.

Infine se $z = 0$, il sistema diventa

$$\begin{cases} x + 1 - \lambda x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 = 9 \end{cases}$$

e quindi abbiamo le due soluzioni $(x, y, z) = (\pm 3, 0, 0)$.

Possono quindi essere estremanti relativi per $f\big|_V$ solo i punti

$$\left(-\frac{3}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right), \qquad \left(-\frac{1}{4}, 0, \pm\frac{\sqrt{143}}{4}\right), \qquad (\pm 3, 0, 0)\,.$$

Calcoliamo il valore di f in tali punti.

$$f\left(-\frac{3}{4}, \pm\frac{\sqrt{15}}{4}, 0\right) = \left(1 - \frac{3}{4}\right)^2 - 3\,\frac{15}{16} = -\frac{11}{4}$$

$$
\begin{aligned}
&f\left(-\frac{1}{4}, 0, \pm\frac{\sqrt{143}}{4}\right) = \left(1-\frac{1}{4}\right)^2 - 3\,\frac{143}{16} = -\frac{105}{4}\\
&f(3,0,0) = (1+3)^2 = 16\\
&f(-3,0,0) = (1-3)^2 = 4\,.
\end{aligned}
$$

Quindi

$$
\begin{aligned}
\min f(V) &= \min\left\{-\frac{11}{4}, -\frac{105}{4}, 16, 4\right\} = -\frac{105}{4}\\
\max f(V) &= \max\left\{-\frac{11}{4}, -\frac{105}{4}, 16, 4\right\} = 16\,,
\end{aligned}
$$

perciò $f(V) = \left[-\frac{105}{4}, 16\right]$.

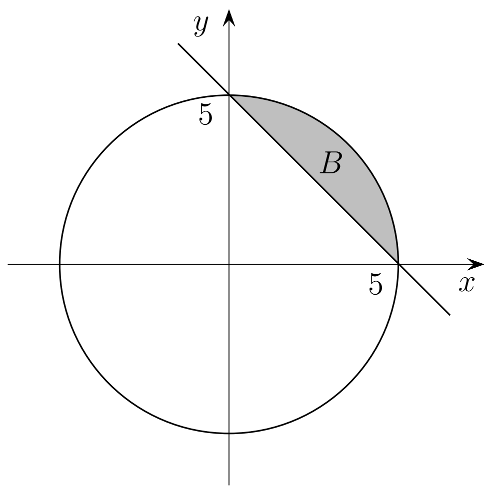
(61) $f(V) = \left[-\sqrt{11}, \sqrt{11}\,\right]$.

(62) $f(V) = [-5, 3]$.

(63) Utilizziamo il teorema di riduzione. Per questo scriviamo B come insieme semplice. Le disuguaglianze che definiscono B non cambiano scambiando x con y, quindi è indifferente rappresentare B come insieme x-semplice o y-semplice.

Ricaviamo y dalle disequazioni che definiscono B; si ha $y \geq 5-x$ e $y^2 \leq 25-x^2$. Questa seconda disequazione non è mai verificata se $x^2 > 25$, mentre se $x^2 \leq 25$, cioè se $x \in [-5,5]$, essa equivale a

$$
-\sqrt{25-x^2} \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\,.
$$



Se $(x,y) \in B$ allora si ha sia $y \geq 5-x$ che $y \geq -\sqrt{25-x^2}$; ma $x \in [-5,5]$, quindi $5-x \geq 0$, perciò se $y \geq 5-x$ è anche $y \geq -\sqrt{25-x^2}$. Perciò le ordinate di punti di B sono individuate dalle disequazioni

$$
5-x \leq y \leq \sqrt{25-x^2}\,.
$$

Da ciò segue che se $(x,y) \in B$ deve essere $5-x \leq \sqrt{25-x^2}$. Nel caso che ci interessa è $5-x \geq 0$ e quindi possiamo elevare al quadrato, ottenendo

$$
\begin{gathered}
(5-x)^2 \leq 25-x^2\\
25-10x+x^2 \leq 25-x^2\\
x(x-5) \leq 0
\end{gathered}
$$

e, visto che è $x-5 \leq 0$, dovrà essere $x \geq 0$. Perciò B è y semplice e

$$
B = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [0,5]\,, 5-x \leq y \leq \sqrt{25-x^2} \right\}.
$$

Abbiamo quindi

$$\iint_B y\,dx\,dy = \int_0^5 \int_{5-x}^{\sqrt{25-x^2}} y\,dy\,dx = \int_0^5 \left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=5-x}^{y=\sqrt{25-x^2}} dx =$$

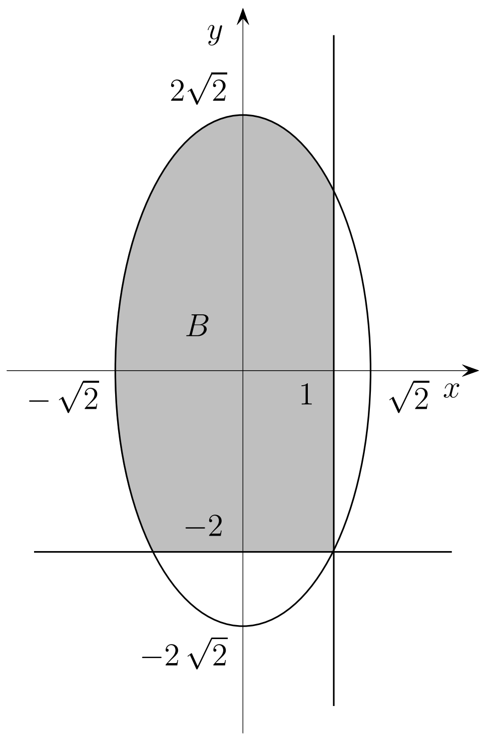
$$= \int_0^5 \left(\frac{25-x^2}{2} - \frac{(5-x)^2}{2}\right) dx = \int_0^5 (-x^2+5x)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2}\right]_0^5 = -\frac{125}{3} + \frac{125}{2} = \frac{125}{6}\,.$$

(64) Utilizziamo il teorema di riduzione. Dobbiamo rappresentare l'insieme B come insieme semplice. Ricavando x oppure y dalle disuguaglianze che definiscono B si ottengono disuguaglianze simili, quindi è indifferente rappresentarlo come insieme x-semplice o y-semplice. Scriviamo B come insieme y-semplice.

Se $(x,y) \in B$ allora $x \le 1$; inoltre si ha $4x^2 + y^2 \le 8$, quindi deve essere $4x^2 \le 8$, cioè $x \in \left[-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right]$. Perciò se $(x,y) \in B$ allora $x \in \left[-\sqrt{2}, 1\right]$. Se x soddisfa questa condizione, si ha $(x,y) \in B$ se e solo se $4x^2 + y^2 \le 8$ e $y \ge -2$, cioè

$$\begin{cases} -\sqrt{8-4x^2} \le y \le \sqrt{8-4x^2} \\ y \ge -2\,, \end{cases}$$



quindi

$$y \in \left[\max\left\{-\sqrt{8-4x^2}, -2\right\}, \sqrt{8-4x^2}\right].$$

Dobbiamo determinare il massimo tra -2 e $-\sqrt{8-4x^2}$, quindi risolviamo la disequazione $-\sqrt{8-4x^2} \le -2$, cioè $\sqrt{8-4x^2} \ge 2$. Entrambi i membri sono non negativi, pertanto la disequazione equivale a $8 - 4x^2 \ge 4$, che è verificata per $x \in [-1,1]$. Perciò se $x \in [-1,1]$ allora $\max\left\{-\sqrt{8-4x^2}, -2\right\} = -2$, mentre se $x \in \left[-\sqrt{2}, -1\right]$ allora $\max\left\{-\sqrt{8-4x^2}, -2\right\} = -\sqrt{8-4x^2}$.

Quindi abbiamo

$$B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in \left[-\sqrt{2}, -1\right], -\sqrt{8-4x^2} \le y \le \sqrt{8-4x^2}\right\} \cup$$

$$\cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \in [-1,1], -2 \le y \le \sqrt{8-4x^2}\right\}.$$

Perciò

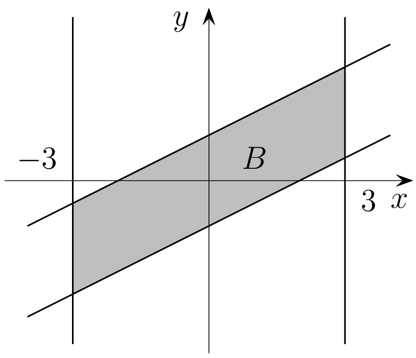
$$A(B) = \iint_B 1\,dx\,dy = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \int_{-\sqrt{8-4x^2}}^{\sqrt{8-4x^2}} 1\,dy\;dx + \int_{-1}^{1} \int_{-2}^{\sqrt{8-4x^2}} 1\,dy\;dx =$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\sqrt{2}}^{-1} 2\sqrt{8-4x^2}\,dx + \int_{-1}^{1}\big(\sqrt{8-4x^2}+2\big)\,dx = \\
&= \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} 2\sqrt{8-8\sin^2 t}\,\sqrt{2}\,\cos t\,dt + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sqrt{8-8\sin^2 t}\,\sqrt{2}\,\cos t\,dt + 4 = \\
&= \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} 8\cos^2 t\,dt + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 4\cos^2 t\,dt + 4 = \\
&= \int_{-\pi/2}^{-\pi/4} 4\big(1+\cos(2t)\big)\,dt + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\big(1+\cos(2t)\big)\,dt + 4 = \\
&= \big[4t + 2\sin(2t)\big]_{-\pi/2}^{-\pi/4} + \big[2t+\sin(2t)\big]_{-\pi/4}^{\pi/4} + 4 = \\
&= (-\pi-2) - (-2\pi) + (\pi/2+1) - (-\pi/2-1) + 4 = 2\pi + 4\,.
\end{aligned}
$$

(65) Per calcolare l'integrale utilizziamo il teorema di riduzione.

Se $(x,y)\in B$, allora $x\in[-3,3]$. Inoltre deve essere $-2\le x-2y\le 2$, cioè $-2\le 2y-x\le 2$ e quindi

$$\frac{x}{2}-1\le y\le \frac{x}{2}+1\,.$$



Pertanto B è y-semplice e

$$B=\left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; x\in[-3,3]\,, \frac{x}{2}-1\le y\le\frac{x}{2}+1\right\}.$$

Quindi si ha

$$
\begin{aligned}
\iint_B y^2\,dx\,dy &= \int_{-3}^{3}\int_{x/2-1}^{x/2+1} y^2\,dy\,dx = \int_{-3}^{3}\left[\frac{1}{3}\,y^3\right]_{y=x/2-1}^{y=x/2+1} dx = \\
&= \int_{-3}^{3}\frac{1}{3}\left(\left(\frac{x}{2}+1\right)^3-\left(\frac{x}{2}-1\right)^3\right)dx = \int_{-3}^{3}\left(\frac{1}{2}\,x^2+\frac{2}{3}\right)dx = \\
&= \left[\frac{1}{6}\,x^3+\frac{2}{3}\,x\right]_{-3}^{3} = 13\,.
\end{aligned}
$$

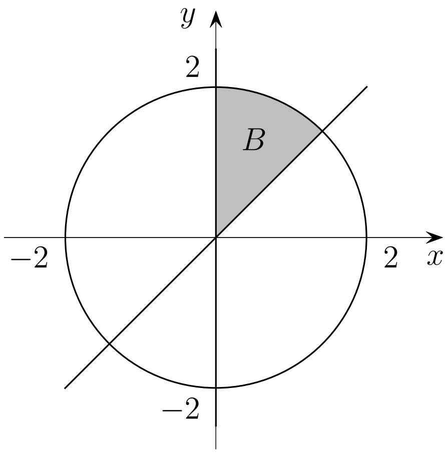
(66) Vista la simmetria dell'insieme B è utile passare in coordinate polari.

Poniamo

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta\,; \end{cases}$$

cioè effettuiamo il cambiamento di variabili

$$(x,y)=\phi(\rho,\theta)=(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\,.$$



Poiché il determinante della matrice jacobiana di ϕ nel punto (ρ,θ) è uguale a ρ, per il teorema di cambiamento di variabili abbiamo

$$\iint_B y\,dx\,dy = \iint_E \rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,,$$

con

$$
\begin{aligned}
B &= \{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \mid (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in B \} \\
&= \left\{ (\rho,\theta) \in \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \;\middle|\; \rho^2 \le 4, 0 \le \rho\cos\theta \le \rho\sin\theta \right\} .
\end{aligned}
$$

Poiché $\rho \ge 0$, la disuguaglianza $\rho^2 \le 4$ è verificata per $\rho \in [0,2]$. La disuguaglianza $0 \le \rho\cos\theta \le \rho\sin\theta$ equivale a $0 \le \cos\theta \le \sin\theta$, quindi deve essere $\cos\theta \ge 0$, cioè $\theta \in [0,\pi/2] \cup [3\pi/2, 2\pi]$ (ricordiamo che $\theta \in [0,2\pi]$); se $\cos\theta \ge 0$ allora

$$
\sin\theta \ge \cos\theta \iff \tan\theta \ge 1
$$

e quindi deve essere $\pi/4 \le \theta \le \pi/2$. Perciò $E = [0,2] \times [\pi/4, \pi/2]$.

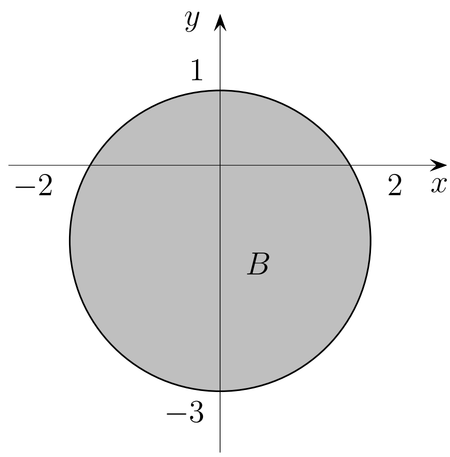
Applicando il teorema di riduzione otteniamo

$$
\begin{aligned}
\iint_E \rho^2 \sin\theta \, d\rho \, d\theta &= \int_0^2 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \rho^2 \sin\theta \, d\theta \; d\rho = \int_0^2 \rho^2 \, d\rho \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \, d\theta = \\
&= \left[\frac{\rho^3}{3} \right]_0^2 \left[-\cos\theta \right]_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{8}{3} \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3} .
\end{aligned}
$$

(67) L'insieme B è il cerchio di centro $(0,-1)$ e raggio 2 , pertanto per calcolare l'integrale è utile passare in coordinate polari, opportunamente modificate in modo da tenere conto che il centro del cerchio non è l'origine.

Poniamo

$$
\begin{cases}
x = \rho\cos\theta \\
y + 1 = \rho\sin\theta ,
\end{cases}
$$



quindi consideriamo la funzione cambiamento di variabili $\phi\colon \mathbb{R}_+ \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$
\phi(\rho,\theta) = (\rho\cos\theta, -1 + \rho\sin\theta) .
$$

Il determinante della matrice jacobiana di ϕ nel punto (ρ,θ) è uguale a ρ . Perciò

$$
\iint_B y \, dx \, dy = \iint_E \rho(-1 + \rho\sin\theta) \, d\rho \, d\theta ,
$$

con

$$
\begin{aligned}
E &= \{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi] \mid \phi(\rho,\theta) \in B \} = \\
&= \left\{ (\rho,\theta) \in [0,+\infty[\times [0,2\pi] \;\middle|\; \rho^2 \le 4 \right\} = [0,2] \times [0,2\pi] .
\end{aligned}
$$

Quindi si ha

$$
\begin{aligned}
\iint_B y \, dx \, dy &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} (-\rho + \rho^2 \sin\theta) \, d\theta \; d\rho = \int_0^2 \left[-\rho\theta - \rho^2 \cos\theta \right]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} d\rho = \\
&= -\int_0^2 2\pi\rho \, d\rho = -\left[\pi\rho^2 \right]_0^2 = -4\pi .
\end{aligned}
$$

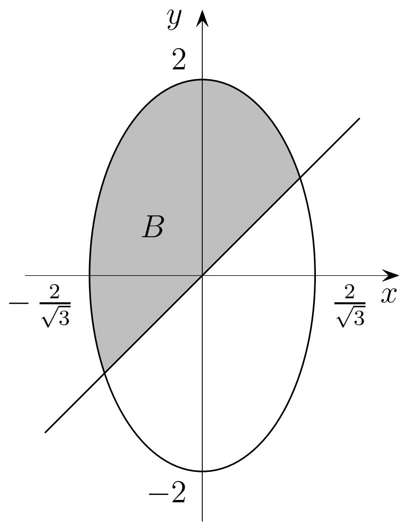
(68) L'insieme B è la parte di piano racchiusa da un'ellisse, quindi passiamo in coordinate polari, modificate in modo da ottenere un integrale su un rettangolo.

Quindi poniamo

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,\rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta\,, \end{cases}$$

cioè consideriamo la funzione cambiamento di variabili $\phi\colon \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ tale che

$$\phi(\rho, \theta) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\,\rho\cos\theta, \rho\sin\theta\right) .$$



Il determinante della matrice jacobiana di ϕ nel punto (ρ, θ) , è $\rho/\sqrt{3}$. Perciò

$$\iint_B (x+y)\,dx\,dy = \iint_E \frac{\rho}{\sqrt{3}}\left(\frac{\rho}{\sqrt{3}}\cos\theta+\rho\sin\theta\right) d\rho\,d\theta\,,$$

con

$$E = \{\,(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\,\times [0, 2\pi] \mid \phi(\rho, \theta) \in B\} =$$
$$= \left\{\,(\rho, \theta) \in [0, +\infty[\,\times [0, 2\pi]\;\middle|\; \rho^2 \le 4, \rho\sin\theta \ge \frac{\rho}{\sqrt{3}}\cos\theta\right\} .$$

Si ha $\rho\sin\theta \ge (1/\sqrt{3})\rho\cos\theta$ se, e solo se, $\sin\theta \ge (1/\sqrt{3})\cos\theta$. In questa espressione vale l'uguaglianza se $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$, cioè $\theta = \pi/6 + k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Poiché consideriamo solo $\theta \in [0, 2\pi]$ si ha quindi $\theta = \pi/6$ o $\theta = 7\pi/6$. Si verifica facilmente che è $\sin\theta \ge (1/\sqrt{3})\cos\theta$ per $\theta \in [\pi/6, 7\pi/6]$. Perciò $E = [0, 2] \times [\pi/6, 7\pi/6]$ e si ha

$$\begin{aligned}\iint_B y\,dx\,dy &= \int_0^2 \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \frac{\rho}{\sqrt{3}}\left(\rho\cos\theta + \frac{\rho}{\sqrt{3}}\sin\theta\right) d\theta\;d\rho = \\ &= \int_0^2 \rho^2\,d\rho \int_{\pi/6}^{7\pi/6} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cos\theta + \frac{1}{3}\sin\theta\right) d\theta = \\ &= \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sin\theta\right]_{\pi/6}^{7\pi/6} + \frac{1}{3}\left[-\cos\theta\right]_{\pi/6}^{7\pi/6}\right) = \\ &= \frac{8}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 0\,.\end{aligned}$$

(69) $\displaystyle A(B) = \int_{-1}^{1}\int_{-3x}^{2-x} 1\,dy\,dx = 4\,.$

(70) $\displaystyle \iint_B y^2\,dx\,dy = \int_{-3}^{3}\int_{2x-2}^{2x+2} y^2\,dy\,dx = 320\,.$

(71) $\displaystyle \iint_B x\,dx\,dy = \int_{-2}^{3}\int_{x^2-2}^{x+4} x\,dy\,dx = \frac{125}{12}\,.$

(72) $$\iint_B x\,dx\,dy = \int_{-2}^{2}\int_{y^2-4}^{\sqrt{16-4y^2}} x\,dx\ dy = \frac{64}{15}\,.$$

(73) $$\iint_B \sqrt{1+x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_1^3\int_0^{2\pi} \rho\sqrt{1+\rho^2}\,d\theta\ d\rho = 2\pi\left(10^{3/2}-2^{3/2}\right).$$

(74) $$\iint_B x^2\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\rho^3\cos^2\theta\,d\theta\ d\rho = \pi\,.$$

(75) $$\iint_B (x^2+y^2+4)\,dx\,dy = \int_0^2\int_{\pi/4}^{7\pi/4} r(r^2-2r\sin\theta+5)\,d\theta\ dr = 21\pi\,.$$