Derivate di composizioni et simil. *Il simbolo $*$ denota un esercizio non standard.*

a) Calcolare $f'(x)$ e il suo dominio, dove $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$. Verificare per quali valori di x si ha che $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.

b) Calcolare $f'(x)$ e il suo dominio, dove

$$f(x) = e^{-|2x+1|}.$$

Verificare per quali valori di x si ha che $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.

c) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e si ponga $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(x + \sin(x)).$$

(i) Calcolare $h'(x)$ per x in $\mathbb{R}$. (ii$*$) Cosa possiamo dire su $A = \{x \in \mathbb{R}\colon\ h'(x) = 0\}$? (iii$*$) Mostrare che non esiste $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile, tale che $f(x + \sin(x)) = x$ per ogni x in $\mathbb{R}$.

d) Siano $f(x) = \cos(\arcsin(x))$ e $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 < x < 1$. Calcolare $f'(x)$, $f(0)$, $g'(x)$ e $g(0)$. Cosa possiamo dedurne su f e g?

e) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e si ponga $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = f(f(f(x))).$$

Calcolare $h'(x)$ per x in $\mathbb{R}$. Calcolare $h'(0)$ sapendo che $f(0) = 1$, $f'(0) = \pi$, $f(1) = e$, $f'(1) = \sqrt{2}$, $f'(e) = 5$. (Nota: non è detto che tutti i dati siano utili alla formulazione della risposta).

f) Sia $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile e si ponga $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = x \cdot f(x - x^2 + 1) + e^{f(x)}.$$

Calcolare $h'(x)$ per x in $\mathbb{R}$. Di quali dati su f abbiamo bisogno per poter calcolare $h'(0)$? E per poter calcolare $h'(1)$?

g) Siano $a, b\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili e si ponga $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$h(x) = a(x)^2 + b(x)^2.$$

(i) Calcolare $h'(x)$ per x in $\mathbb{R}$. (ii$*$) Si considerino i punti $(a(x), b(x))$ nel piano cartesiano. Cosa rappresenta $h(x)$? Supponiamo che h assuma il valore massimo in x_0. Mostrare che i vettori $(a(x_0), b(x_0))$ e $(a'(x_0), b'(x_0))$ sono perpendicolari. Illustrare questo fatto con una figura.