

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI  
CALCOLO DELLE PROBABILITÀ (Terzo appello, parte di  
probabilità, commissione F. Ferrari, G. Grammatico) del 10/07/2014

COGNOME....., NOME....., n. mat. ....

Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante o su un foglio protocollo. Gli studenti che supereranno la presente prova e che desiderano sostenere la prova B del 15/7/2014 devono iscriversi nelle apposite liste di AlmaEsami.

---

(1) [1,5 punti] Scrivere la definizione di speranza matematica e di varianza per una variabile aleatoria discreta. Rispondere poi al seguente quesito: siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie a valori in  $A = \{(4, 2); (1, 1); (2, 1); (2, 4)\}$  la cui densità di probabilità congiunta è data da  $p(x, y) = c(x^2 + y^2 + 1)$  per  $(x, y) \in A$  e 0 se  $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus A$ , per un opportuno valore di  $c$ . Calcolare  $c$ , le densità marginali e la retta di regressione per  $X$ ,  $Y$ .

---

(2) [1 punto] Scrivere la definizione di funzione di ripartizione per una variabile aleatoria continua. Rispondere poi al seguente quesito: sia  $X$  una variabile aleatoria, a valori reali, di densità  $N(2, 3^2)$ . Calcolare la densità di  $Z = (3^2 X + 2)^2$ .

---

(3) [1 punto] Scrivere la definizione di probabilità condizionale.

---

(4) [1 punto] Scrivere la definizione di variabili aleatorie indipendenti.

---

(5) [1,5 punti] Determinare per quali valori di  $\alpha > 0$  esiste  $c > 0$  tale che

$$p(x) = \begin{cases} c(\alpha^2 - 5\alpha + 7)^x, & x \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}), \end{cases}$$

è una densità di probabilità su  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ . Calcolare esplicitamente il valore di  $c$  al variare di  $\alpha$

---

(6) [1,5 punti] Una compagnia aerea accetta 154 prenotazioni per un volo che può trasportare 124 passeggeri. Supponendo che la percentuale di rinunce prima della partenza sia pari al 4%, calcolare la probabilità che almeno due passeggeri tra quelli che hanno prenotato non partano.

---

(7) [1 punto, **non utile per il superamento della prova**] Stabilire, motivando esaurientemente la risposta, quale dei due seguenti eventi è più probabile. In una cucciolata di 4 gatti due gatti sono di sesso maschile e due gatti di sesso femminile. In una cucciolata di 4 gatti il numero di gatti di uno stesso sesso è maggiore del numero dei gatti dell'altro sesso.

---

(8) [2 punti] Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie continue con densità congiunta uniforme a valori in  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x + y \leq 5, x \geq 0, y \geq 0\}$ . Calcolare  $P((X - 5)^2 + Y^2 \geq 5^2)$ . Determinare le densità marginali  $f_X$  e  $f_Y$  e stabilire se sono indipendenti.

---

(9) [1,5 punto] In una lotteria vengono estratti 5 numeri tra 55. Calcolare la probabilità che tra i numeri estratti vi siano esattamente 3 dei numeri giocati, calcolare poi la probabilità che i primi 3 numeri giocati vengano sorteggiati esattamente nell'ordine.