Esercizio 1

La funzione di ripartizione per Z è $t \longmapsto \mathbb{P}(Z \leq t)$.

$$\{Z \leq t\} = \{e^{4X} \leq t\} = \{4x \leq \log t\} \quad \text{se } t > 0$$

$$\{e^{4X} \leq t\} = \emptyset \quad \text{se } t \leq 0$$

Poiché X ha densità $N(1,9)$, $f(s) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-1)^2}{18}}$.

Allora

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{\frac{1}{4}\log t} \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-1)^2}{18}} ds, & \text{se } t > 0. \end{cases}$$

Quindi una densità di Z è data da

$$\frac{d}{dt} \mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{se } t \leq 0 \\ \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{1}{4}\log t - 1)^2}{18}} \cdot \frac{1}{4t}; & t > 0 \end{cases}$$

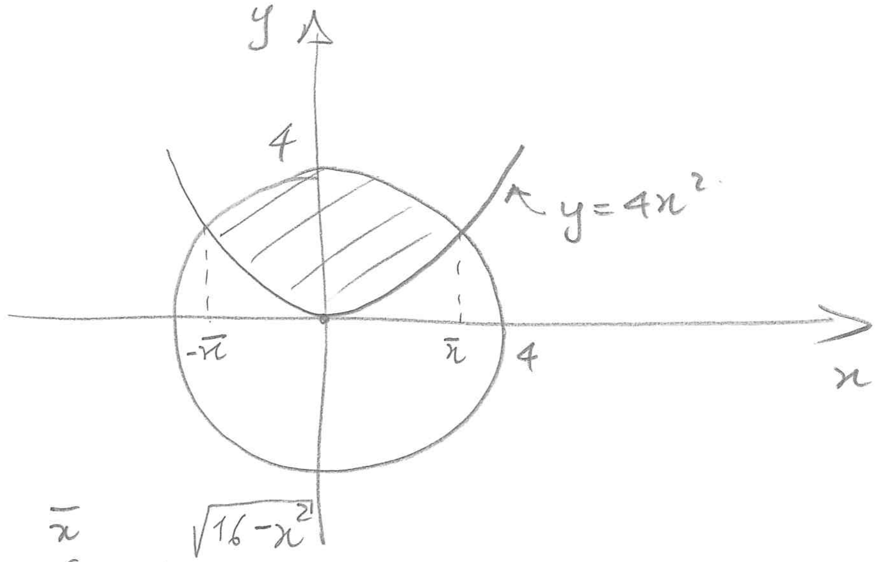
Esercizio 2

$$A = \{x^2 + y^2 \leq 4^2\}; \quad \mathbb{P}(Y \geq 4X^2) = \frac{1}{|A|} \int_{\{y \geq 4x^2\}} \chi_A(x,y)\, dx\, dy$$

$|A| = \pi 4^2 = 16\pi$ (area del cerchio di raggio 4).

$$\frac{\chi_A}{|A|} = \begin{cases} \frac{1}{16\pi}, & (x,y)\in A \\ 0, & (x,y)\in \mathbb{R}^2\setminus A \end{cases}$$

$$P(Y\ge 4X^2) = \frac{1}{16\pi}\iint_{\{y\ge 4x^2;\ x^2+y^2\le 16\}} dx\,dy$$



$$= \frac{1}{16\pi}\int_{-\bar x}^{\bar x}\left(\int_{4x^2}^{\sqrt{16-x^2}} dy\right)dx$$

dove $\pm\bar x$ sono soluzioni

di $\begin{cases} x^2+y^2=16 \\ y=4x^2 \end{cases} \iff \begin{cases} y+4y^2=64 \\ y=4x^2 \end{cases}$ $\begin{cases} y_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+64\cdot 4}}{8} \\ y=4x^2 \end{cases}$

quindi $\begin{cases} \frac{-1+\sqrt{257}}{8} = 4x^2 \end{cases} \to \bar x = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}$

(l'altro valore di y è negativo, quindi non ci sono soluzioni di $4x^2 = \frac{-1-\sqrt{257}}{32}$

Allora

$$P(Y \geq 4x^2) = \frac{1}{16\pi} \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}} \left(\sqrt{16-x^2} - 4x^2 \right) dx = \frac{4}{16\pi} \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}} \left(\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2} - x^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}}^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}} \sqrt{1-\frac{x^2}{16}}\, dx - \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_{x=-\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}}^{x=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}}$$

$$\frac{x}{4} = \sin\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{-1+\sqrt{257}}{32}}} \sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}\, dx - \frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{3} \left(\frac{-1+\sqrt{257}}{32} \right)^{3/2} + \frac{1}{3} \left(\frac{-1+\sqrt{257}}{32} \right)^{3/2} \right)$$

c.o.

$$= \frac{4}{2\pi} \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{-1+\sqrt{257}}}{16\sqrt{2}}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\, \cos\theta \, d\theta - \frac{1}{6\pi} \left(\frac{-1+\sqrt{257}}{32} \right)^{3/2}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{-1+\sqrt{257}}}{16\sqrt{2}}} \cos^2\theta \, d\theta - \frac{1}{6\pi} \left(\frac{-1+\sqrt{257}}{32} \right)^{3/2}$$

$$\boxed{\cos\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\arcsin \frac{\sqrt{-1+\sqrt{257}}}{16\sqrt{2}}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\, d\theta - \frac{1}{6\pi} \left(\frac{-1+\sqrt{257}}{32} \right)^{3/2}$$

$$= \frac{1}{\pi} \left(\arcsin \frac{\sqrt{-1+\sqrt{257}}}{16\sqrt{2}} + \frac{\sin 2\left(\arcsin\left(\frac{\sqrt{-1+\sqrt{257}}}{16\sqrt{2}}\right)\right)}{2} \right)$$

$$- \frac{1}{6\pi} \left(\frac{-1+\sqrt{257}}{32} \right)^{3/2}.$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{16\pi} \displaystyle\int_{-\sqrt{16-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} dy \,, & \text{se } -4 \le x \le 4 \\ 0 \,, & \text{se } x > 4 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y < -4 \\ \dfrac{1}{16\pi} \displaystyle\int_{-\sqrt{16-y^2}}^{\sqrt{16-y^2}} dy \,, & \text{se } -4 \le y \le 4 \\ 0 \,, & y > 4 \end{cases}$$

Sono dipendenti perché $f_X(x)\, f_Y(y) \neq \dfrac{\chi_A}{16\pi}$ su un insieme di misura nulla.

Es 3

Se il poligono regolare ha n lati, allora ha anche n vertici le diagonali sono i segmenti che uniscono due vertici non adiacenti. Quindi $\binom{n}{2} - n$ è il numero di diagonali. Cioè $\dfrac{n!}{2!(n-2)!} - n = \dfrac{n(n-1)}{2} - n = \dfrac{n(n-1-2)}{2}$

$$= \frac{n(n-3)}{2}$$

Esercizio 4 Affinché p sia una densità di probabilità su $\mathbb{N}$ bisogna che $p(x) \geq 0$ per $x \in \mathbb{N}$. La richiesta è soddisfatta perché $\sin \frac{1}{x^\alpha} \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ e per ogni $\alpha > 0$.

Inoltre affinché $\sum_{n=1}^{\infty} p(n) = 1$ bisogna che $\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ sia convergente. In particolare $\dfrac{\sin \frac{1}{n^\alpha}}{1+n^{4\alpha}+n^{\frac{1}{4}}} \overset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\frac{1}{n^\alpha}}{n^{4\alpha}+n^{\frac{1}{4}}}$

$$\sim \begin{cases} \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{1}{n^{4\alpha}}, & \text{se } 4\alpha > \frac{1}{4} \quad (i) \\ \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{1}{2n^{4\alpha}}, & \text{se } 4\alpha = \frac{1}{4} \quad (ii) \\ \dfrac{1}{n^\alpha} \dfrac{1}{n^{\frac{1}{4}}}, & \text{se } 4\alpha < \frac{1}{4} \quad (iii) \end{cases}$$

Quindi per (i) avremo convergenza se (e solo se) $\begin{cases} 4\alpha > \frac{1}{4} \\ \alpha + 4\alpha > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha > \frac{1}{16} \\ \alpha > \frac{1}{5} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \quad \alpha > \frac{1}{5}$.

Per (ii) c'è convergenza se (e solo se) $\begin{cases} 4\alpha = \frac{1}{4} \\ \alpha + 4\alpha > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{16} \\ \alpha > \frac{1}{5} \end{cases} S = \emptyset$

Per (iii) c'è conv. se (e solo se) $\begin{cases} 4\alpha < \frac{1}{4} \\ \alpha + \frac{1}{4} > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha < \frac{1}{16} \\ \alpha > \frac{3}{4} \end{cases} S = \emptyset$

Pertanto p è una densità di probabilità se e solo se $\alpha > \frac{1}{5}$ e

$$C(\alpha) = \frac{1}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{1}{n^\alpha}}{1+n^{4\alpha}+n^{1/4}}}.$$

Esercizio 5

Le prime tre palline devono essere estratte esattamente nell'ordine. Quindi $\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88}$ è che le prime tre palline siano rispettivamente 1, 2, 3 (nell'ordine).

Le rimanenti possono essere estratte anche in ordine diverso quindi i tre numeri possono permutare (4, 5, 6)

Quindi $3! \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86} \cdot \frac{1}{85}$ è la probabilità che dopo aver estratto le palline 1, 2, 3 vi sia l'uscita di 4, 5, 6 (non necessariamente nell'ordine).

Se ne conclude che la probabilità cercata è

$$\frac{1}{90} \cdot \frac{1}{89} \cdot \frac{1}{88} \cdot \frac{1}{87} \cdot \frac{1}{86} \cdot \frac{1}{85} \cdot 3!$$

Un altro modo per calcolare questa probabilità consiste nel considerare lo spazio di probabilità $\Omega = D_{90,6}$) cioè tutte le possibili disposizioni (o funzioni iniettive da 6 elementi in 90). L'evento A considerato corrisponde all'insieme delle disposizioni per cui le prime tre estrazioni sono assegnate rispettivamente da 1, 2 e 3, mentre le rimanenti 3 possono essere selezionate permutando i tre numeri rimasti cioè in 3! modi. Quindi $\#A = 3!$ Pertanto, essendo implicitamente assegnata una legge di probabilità uniforme

$$P(A) = \frac{\#A}{\# D_{90,6}} = \frac{3!}{\frac{90!}{84!}} = \frac{3!}{90 \cdot 85 \cdot 86 \cdot 87 \cdot 88 \cdot 89}$$

Es. 6 Domanda di Teoria

Es. 7 Domanda di Teoria

Es. 8 La probabilità che esca 5 nel lancio di un dado è pari a $\frac{1}{6}$. La probabilità che esattamente 4 palline delle 5 estratte senza rimpiazzo siano rosse è $\frac{\binom{25}{4}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{30}{5}}$.

Poiché il lancio del dado e l'estrazione delle palline sono eventi indipendenti, la probabilità che si realizzi l'uscita del numero 5 e che 4 palline siano rosse e una bianca è pari al prodotto delle due probabilità:

$$\bar{p} = \frac{1}{6}\cdot\frac{\binom{25}{4}\cdot\binom{5}{1}}{\binom{30}{5}} = \frac{1}{6}\,\frac{25!}{4!\,21!}\cdot\frac{5!}{1\cdot 4!}\cdot\frac{5!\,25!}{30!}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{5\cdot 22\cdot 23\cdot \cancel{24}\cdot\cancel{25}\cdot 5}{26\cdot 27\cdot \cancel{28}\cdot 29\cdot\cancel{30}} = \frac{5^3\cdot\cancel{22}\cdot 23}{6\cdot 7\cdot\cancel{26}\cdot 27\cdot 29} = \frac{5^3\cdot 11\cdot 23}{6\cdot 7\cdot 13\cdot 27\cdot 29}$$

Se il lancio e l'estrazione si ripetono 7 volte allora possiamo introdurre una variabile aleatoria che conta i successi, sia essa X con densità discreta $B(7,\bar{p})$.

Quindi $$\mathbb{P}(X\geq 4) = \sum_{k=4}^{7}\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=4}^{7}\binom{7}{k}\bar{p}^{k}\cdot(1-\bar{p})^{7-k}$$

$$= \binom{7}{4}\bar{p}^4(1-\bar{p})^3 + \binom{7}{5}\bar{p}^5(1-\bar{p})^2 + \binom{7}{6}\bar{p}^6(1-\bar{p}) + \bar{p}^7$$