

COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA E ELEMENTI DI  
CALCOLO DELLE PROBABILITA' (Secondo appello, parte di  
probabilità, commissione F. Ferrari, G. Grammatico) del 26/06/2014

COGNOME....., NOME....., n. mat. ....  
Riconsegnare il testo. Rispondere alle domande, con esaurienti motivazioni, nel riquadro sottostante o su un foglio protocollo. Gli studenti che supereranno la presente prova e che desiderano sostenere la prova di Analisi Matematica 2 devono iscriversi nelle apposite liste di AlmaEsami.

---

(1) Sia  $X$  una variabile aleatoria, a valori reali, di densità  $N(1, 3^2)$ . Calcolare la densità di  $Z = e^{4X}$ .

---

(2) Siano  $X$  e  $Y$  due variabili aleatorie continue con densità congiunta uniforme in  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 4\}$ . Calcolare  $P(Y \geq 4X^2)$ . Determinare le densità marginali  $f_X$  e  $f_Y$  e stabilire se sono indipendenti.

---

(3) [ **non utile per il superamento della prova** ] Calcolare quante sono le diagonali di un poligono regolare di  $\alpha$  lati (chiamiamo diagonale di un poligono il segmento che congiunge due vertici non adiacenti).

---

(4) Determinare per quali valori di  $\alpha > 0$  esiste  $c > 0$  tale che

$$p(x) = \begin{cases} c \frac{\sin \frac{1}{x^\alpha}}{1 + x^{4\alpha} + x^{\frac{1}{4}}}, & x \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus (\mathbb{N} \cup \{0\}), \end{cases}$$

è una densità di probabilità su  $\mathbb{N} \cup \{0\}$ .

---

(5) Calcolare la probabilità che estraendo, senza rimpiazzo, 6 palline da un'urna con 90 palline numerate da 1 a 90 le prime 3 siano esattamente nell'ordine le palline 1, 2, 3 e le rimanenti siano quelle con i numeri in sequenza da 4 fino a 6, ma non necessariamente nell'ordine.

---

(6) Scrivere l'enunciato del Teorema del limite centrale.

---

(7) Scrivere la definizione di funzione di densità di probabilità per una variabile aleatoria continua.

---

(8) Si lancia un dado (sei facce) equilibrato e si estraggono senza rimpiazzo 5 palline da un contenitore in cui si trovano  $5^2$  palline rosse e 5 palline bianche. Calcolare la probabilità che il dado indichi 5 e vi siano esattamente 4 palline rosse tra quelle estratte. Calcolare la probabilità che ripetendo 7 volte il lancio del dado e l'estrazione delle 5 si verifichi per almeno 4 volte che contemporaneamente il dado indichi 5 e vi siano esattamente 4 palline rosse tra le 5 palline estratte.