ES 1 $\quad \mathbb{P}(Z \leq t) = \mathbb{P}(\log(2+X^2) \leq t)$

ma $\log(2+X^2) \leq t \iff 2+X^2 \leq e^t \iff X^2 \leq e^t - 2$

Quindi, se $e^t - 2 > 0$ cioè se $t > \log 2$, allora

$$-\sqrt{e^t-2} \leq X \leq \sqrt{e^t-2}.$$

Pertanto

$$\mathbb{P}(Z \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < \log 2 \\ \displaystyle\int_{-\sqrt{e^t-2}}^{\sqrt{e^t-2}} f(s)\,ds, & \text{se } t \geq \log 2 \end{cases}$$

dove $f(s) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(s-2)^2}{18}}$

Quindi una densità può essere ottenuta derivando la funzione di ripartizione rispetto a t, vale a dire (se $t \neq \log$

$$\frac{d}{dt}P(Z \leq t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < \log 2 \\ e^{-\frac{(\sqrt{e^t-2}-2)^2}{18}} \dfrac{e^t}{2\sqrt{e^t-2}} + e^{-\frac{(-\sqrt{e^t-2}-2)^2}{18}} \cdot \dfrac{e^t}{2\sqrt{e^t-2}} & \text{se } t < \log 2. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{se } t < \log 2 \\ \dfrac{e^t}{2\sqrt{e^t-2}} \left(e^{-\frac{(\sqrt{e^t-2}-2)^2}{18}} + e^{-\frac{(\sqrt{e^t-2}+2)^2}{18}} \right), & \text{se } t > \log 2 \end{cases}$$

ES. 2. La densità di X è $B(1,\frac{1}{3})$, mentre Y è uniforme su $\{1,2\dots 6\}$, quindi $p_Y(x)=\frac{1}{6}$ se $x\in\{1,\dots 6\}$, altrimenti

$p_Y(x)=0$.

$P(X=0, Y=3) = P(X=0)\cdot P(Y=3)$ perché indipendenti.

Quindi $P(X=0,Y=3) = (1-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{6} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{9}$. La variabile aleatoria Z conta i successi dell'evento $\{X=0, Y=3\}$, quindi se la probabilità che si verifichi tale evento è $\frac{1}{9}$ avremo che Z ha densità $B(7,\frac{1}{9})$. Quindi

$$P(Z\le 6) = 1-P(Z=7) = 1-\binom{7}{7}\left(\frac{1}{9}\right)^7\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^0 = 1-\frac{1}{9^7} = \frac{9^7-1}{9}$$

ES. 3 Affinché p sia una densità su $\mathbb{N}\cup\{0\}$ occorre che

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\,\frac{3^k}{17^{k+17}} = 1,$$

cioè sia convergente e converga a 1 (i termini sono tutti positivi) quindi per avere una densità è sufficiente la citata verifica)

D'altra parte

$$\sum_{k=0}^{\infty} c\,\frac{3^k}{17^{k+17}} = \frac{c}{17^{17}}\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{17}\right)^k}_{\text{serie geometrica di ragione } \frac{3}{17}\text{, converge.}} = \frac{c}{17^{17}}\,\frac{1}{1-\frac{3}{17}}$$

$$= \frac{c}{17^{17}}\cdot\frac{17}{14} = \frac{c}{17^{16}\cdot 14}$$

Se imponiamo $\frac{c}{17^{16}\cdot 14}=1$ ricaviamo $\boxed{c = 14\cdot 17^{16}}$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{\infty} k\,p(k) = \frac{14\cdot 17^{16}}{17^{17}}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{3}{17}\right)^k = \frac{14}{17}\cdot\frac{\frac{3}{17}}{\left(1-\frac{3}{17}\right)^2} = \cancel{\frac{14}{17}}\cdot\frac{3}{\cancel{17}}\cdot\frac{\cancel{17^2}}{14^2}$$

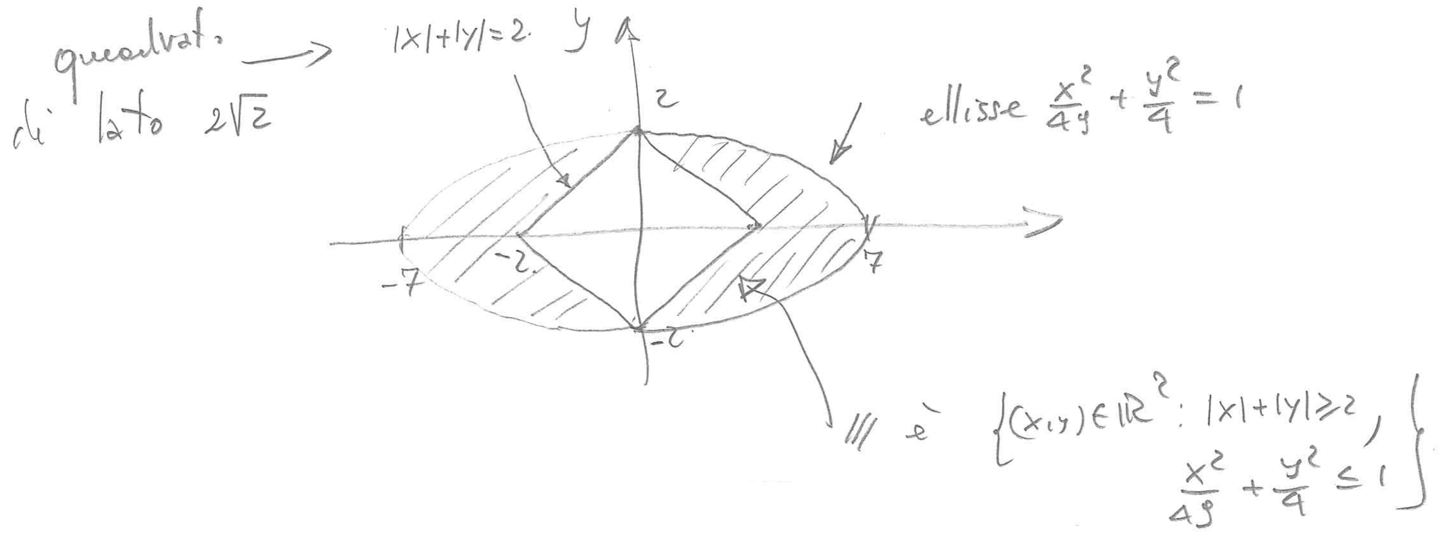
$$= \frac{3}{14}$$

si ricordi che $\sum_{k=0}^{\infty} k x^k = \frac{x}{(1-x)^2}$ se $|x|<1$

ES. 4 $\quad A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}$ $\quad X, Y$ di densità congiunta uniforme su A. Quindi la densità congiunta di X, Y è $\dfrac{\chi_A}{\text{area}(A)}$. In particolare $\text{Area}(A)=\iint_A 1\,dx\,dy$

$= \pi\cdot 7\cdot 2 = 14\pi$. Pertanto $\dfrac{\chi_A}{14\pi}$ è la densità congiunta di X e Y.

$$\mathbb{P}\left(|X|+|Y|\ge 2\right) = \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, |x|+|y|\ge 2\}} \frac{\chi_A(x,y)}{14\pi}\,dx\,dy = \frac{1}{14\pi}\iint_{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, |x|+|y|\ge 2,\ \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}} 1\,dx\,dy$$



$$= \frac{1}{14\pi}\left(\iint_{\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, \frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\}} 1\,dx\,dy - \iint_{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\, |x|+|y|\le 2\}} 1\,dx\,dy\right)$$

$$= \frac{1}{14\pi}\left(14\pi - (2\sqrt{2})^2\right) = \frac{1}{14\pi}\left(14\pi - 8\right)$$

Calcoliamo

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_A(x,y)\,dy}{14\pi} = \int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}} \frac{\chi_A(x,y)}{14\pi}, \quad \text{se } -7<x<7 \text{ (altrimenti 0)}$$

$$= \boxed{\frac{4\sqrt{1-\frac{x^2}{49}}}{14\pi}}, \quad \text{se } -7<x<7 \text{ (altrimenti 0)}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_A(x,y)\,dy = \frac{14\sqrt{1-\frac{y^2}{4}}}{14\pi} \quad (\text{se } -2<y<2, \text{ altrimenti } 0$$

X e Y non sono indipendenti perché in un intorno di $(0,0)$ $f_X(x)\,f_Y(y) \neq \frac{\chi_A(x,y)}{14\pi}$.

ES5. Domande di Teoria

ES6 $\quad \underline{P}(R \geq 6) = \underline{P}(R=6) + \underline{P}(R=7)$

dove R è la v.a. di densità ipergeometrica che conta le palline rosse in una sequenza di 9 estratte

$$\underline{P}(R=K) = \frac{\binom{7}{K}\binom{5}{9-K}}{\binom{12}{9}}. \quad \text{Quindi}$$

$$\underline{P}(R \geq 6) = \frac{\binom{7}{6}\binom{5}{3}}{\binom{12}{9}} + \frac{\binom{7}{7}\binom{5}{2}}{\binom{12}{9}}$$

$$= \frac{7!}{6!\,1!}\,\frac{5!}{3!\,2!}\,\frac{9!\,3!}{12!} + \frac{5!}{2!\,3!}\cdot\frac{9!\,3!}{12!}$$

$$= \frac{7\cdot\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot 11\cdot 2} + \frac{\cancel{10}}{\cancel{10}\cdot 11\cdot 2} = \frac{1}{11\cdot 2}\cdot(7+1) = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$$

Es 7 Domanda teoria

Es. 8. Calcoliamo la retta di regressione $y = ax + b$

con $a = \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)}$ e $b = E[Y] - \dfrac{Cov(X,Y)}{Var(X)} E[X]$.

$$E[X] = E[Y+W] = E[Y] + E[W] = E[Y] = 4$$

$$Cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = E[(Y+W)Y] - E[Y+W]E[Y]$$

$$= E[Y^2] + \underbrace{E[YW]}_{\substack{= E[Y]E[W] = 0 \\ \text{xché indip} \\ \text{perché } E[W]=0}} - (E[Y])^2 - \underbrace{E[W]E[Y]}_{= 0 \text{ xché } E[W]=0} = E[Y^2] - E[Y]^2$$

$= Var(Y) = 49$. Infine $Var(X) = Var(Y) + Var(W)$

$= 49 + 4 = 53$. Quindi $a = \dfrac{49}{53}$;

$b = 4 - \dfrac{49}{53} \cdot 4 = 4 \cdot \dfrac{4}{53} = \dfrac{16}{53}$. pertanto

$$y = \frac{49}{53} x + \frac{16}{53}.$$

Es. 9 Poiché i punti non sono allineati a tre a tre il numero dei triangoli che possono essere costruiti è pari a $\binom{10}{3} = \dfrac{10!}{3!7!} = \dfrac{\cancel{8}^{4} \cdot \cancel{9}^{3} \cdot 10}{\cancel{6}\,\cancel{2}} = 120$

Ogni lato del triangolo determina $10-3$ triangoli con un lato del triangolo dato. Essendoci 3 lati abbiamo 21 triangoli che hanno un lato in comune con il triangolo dato quindi $P = \dfrac{120-22}{120} = \dfrac{98}{120}$
$= \dfrac{29}{60}$