

## PROGRAMMA DI ANALISI MATEMATICA T/T1

Elenco ufficiale degli argomenti svolti durante il corso

rivolto agli studenti di Ingegneria Civile (A-K) e agli studenti di Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio, Anno Accademico 2012/2013, Prof. F. Ferrari.

### ELEMENTI DI LOGICA ED INSIEMISTICA

Connettivi logici elementari: negazione, congiunzione e vel. Il connettivo logico di implicazione. Tavole di verità. Proposizioni ben formate, predicati e frasi aperte. Quantificatori esistenziale e universale. Assegnazione di insiemi per elencazione o tramite frasi aperte. Simboli di appartenenza ad un insieme, e di inclusione tra insiemi. Uguaglianza tra insiemi. Operazioni di unione, intersezione e differenza tra insiemi. Definizione di prodotto cartesiano tra insiemi, definizione di relazione tra insiemi e di grafico. Cenni alle relazioni d'ordine e di equivalenza su un insieme. Definizione di funzione, dominio, codominio e immagine di una funzione. Funzioni iniettive e suriettive. Funzioni invertibili sull'immagine e definizione di funzione inversa. Definizione di composizione tra funzioni.

### I NUMERI REALI

I numeri naturali, i numeri interi e i numeri razionali. Esistenza di numeri non razionali soluzioni di equazioni algebriche: la radice quadrata di 2 non è un numero razionale. Allineamento decimale dei numeri razionali e definizione dei numeri reali attraverso l'allineamento decimale. La radice  $n$ -esima aritmetica. Il valore assoluto di un numero reale. La relazione d'ordine di minore o uguale nei numeri reali. Definizione di maggiorante e minorante di un insieme. Definizione di massimo e minimo di un insieme. Definizione di estremo superiore e di estremo inferiore di un insieme limitato di numeri reali. Presentazione assiomatica dei numeri reali come struttura di campo dotato di ordine e assioma di esistenza dell'estremo superiore e inferiore di insiemi limitati. Caratterizzazione dell'estremo superiore e dell'estremo inferiore di un insieme limitato di  $\mathbb{R}$ . Metodo per induzione (cenni). La disuguaglianza di Bernoulli, Il binomio di Newton. Il binomio di Newton. Definizione di  $a^b$  con  $a > 0$  e  $b$  reale, definizione di  $\log_b c$  con  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  e  $c > 0$  Definizione di intervallo di  $\mathbb{R}$ . Definizione di intorno di raggio  $r$  centrato in un punto.

### NUMERI COMPLESSI

Definizione del campo dei numeri complessi. Numeri complessi coniugati. Forma algebrica e trigonometrica. Definizione di modulo e argomento di un numero complesso. Proprietà del modulo e disuguaglianza triangolare. Significato geometrico della somma e del prodotto di due numeri complessi. Formula di De Moivre. Formula di Eulero. Formula risolutiva per equazioni algebriche pure di grado  $n$ . Teorema fondamentale dell'algebra. Rappresentazione polare dei numeri complessi.

### SUCCESSIONI

Definizione di successione di numeri reali convergente e divergente. I teoremi sui limiti di successioni: unicità del limite, teoremi di confronto, dei due carabinieri. L'algebra dei limiti. Successioni monotone e loro limiti. La successione  $a^n$ . Teorema di esistenza del limite per successioni monotone. Il numero  $e$ . Limite del quoziente tra successioni limitate e successioni divergenti. Calcolo di limiti tra prodotti di successioni divergenti, limite di somme di successioni positivamente divergenti. Successioni infinite. Successioni asintotiche. Successioni infinite di ordine superiore, di ordine inferiore e dello stesso ordine. Successioni infinitesime. Successioni infinitesime di ordine inferiore, di ordine superiore e dello stesso ordine. Esempi di gerarchia tra infiniti:  $\log n$ ,  $n^a$ ,  $e^n$ ,  $n!$ ,  $n^n$ . Il criterio del rapporto per la convergenza di successioni positive.

## FUNZIONI DI VARIABILE REALE E CONTINUITÀ

Definizione di funzione reale di una variabile reale. Definizione di limite per funzioni reali di una variabile reale. Definizione di forma di indecisione nel calcolo dei limiti. Funzioni monotone crescenti e funzioni monotone decrescenti. Funzioni monotone strettamente crescenti e strettamente decrescenti. Funzioni costanti. Estensione dei risultati stabiliti per le successioni: algebra dei limiti ed esistenza del limite da destra e da sinistra di funzioni monotone. Definizione di funzione continua in un punto, definizione di funzione continua su un insieme. Teorema della permanenza del segno. Definizione di massimo e di minimo di una funzione. Definizione di punto estremante per una funzione: punto di massimo locale per una funzione e punto di minimo locale per una funzione. I teoremi di Weierstrass, degli zeri e dei valori intermedi. Esempi di funzioni a cui non si applica il teorema di Weierstrass. Richiami sulle funzioni: composizione di funzioni, funzioni invertibili e funzioni inverse. Continuità della composizione di due funzioni continue e il teorema di cambiamento di variabile nei limiti. Limiti da destra e da sinistra. Funzioni monotone e loro limiti. Asintoti. Le funzioni elementari e i rispettivi grafici: la funzione segno, la funzione valore assoluto, le funzioni potenza con esponenti reali, la funzione esponenziale (base maggiore di 1 e base  $b \in (0, 1)$ ) e la funzione logaritmo (base maggiore di 1 e base  $b \in (0, 1)$ ). Le funzioni trigonometriche e loro principali proprietà. Le funzioni circolari inverse: arcsin, arccos, arctan. Le funzioni iperboliche sinh, cosh e le loro inverse arcsinh, arccosh. La definizione della funzione  $f(x)^{g(x)}$ . Definizione di funzione pari e di funzione dispari. Costruzione del grafico della funzione inversa a partire dal grafico della funzione diretta. Calcolo del limite per  $x$  che tende a 0 di  $\frac{\sin x}{x}$ .

## CALCOLO DIFFERENZIALE

Definizione di funzione derivabile e di derivata di una funzione. Significato geometrico della derivata, equazione della retta tangente al grafico di una funzione. La definizione di differenziale di una funzione. Significato geometrico della derivata e del differenziale di una funzione. Relazione tra funzioni derivabili e funzioni continue. La definizione di  $o$  piccolo:  $f = o(g)$ . Funzioni asintotiche, funzioni infinitesime e funzioni infinite. Nozione di infinitesimo di ordine superiore, inferiore e dello stesso ordine. Definizione di infinito di ordine inferiore, superiore e dello stesso ordine. Il calcolo delle derivate di somme, prodotti e quozienti di funzioni derivabili. La derivata di  $f(x)^{g(x)}$ . Il teorema di derivabilità di funzioni composte. Il Teorema di derivabilità della funzione inversa. I Teoremi di Fermat, Cauchy, Rolle e del valor medio di Lagrange e loro applicazione allo studio della monotonia di una funzione: test di monotonia di una funzione derivabile in un intervallo, condizione sufficiente per la stretta monotonia di una funzione derivabile in un intervallo. Estremanti relativi: definizione, condizioni necessarie, condizioni sufficienti. Condizione necessaria per l'esistenza di punti estremanti locali per funzioni derivabili. Condizioni sufficienti in un intervallo per l'esistenza di punti estremanti locali di funzioni derivabili. Teorema di derivazione della funzione inversa. Derivate delle funzioni inverse principali: arcsin, arctan,  $\sqrt{\quad}$ , log. I Teoremi di De l'Hospital. Derivate di ordine superiore. Formula di Taylor con resto di Peano. Formula di Taylor con il resto di Lagrange. Polinomi di Taylor per funzioni elementari: sin, cos, sinh, cosh,  $\log(1+x)$ ,  $e^x$ . Condizioni puntuali sufficienti per l'esistenza di punti estremanti locali. Nozione di convessità e definizione di insieme convesso. Funzioni convesse: definizione di funzione convessa e di funzione concava per tangenti. Teorema sulle condizioni necessarie e sufficienti per la convessità / concavità di una funzione di classe  $C^1$  e per una funzione di classe  $C^2$ . Significato geometrico della convessità/concavità di una funzione.

## CALCOLO INTEGRALE

Somme di Riemann per funzioni limitate su intervalli chiusi e limitati: definizione di suddivisione di un intervallo, definizione di somma superiore e somma inferiore. Proprietà principali delle somme inferiori e superiori. Definizione di integrale per funzioni limitate. Significato geometrico dell'integrale di Riemann. La funzione di Dirichlet. Teorema di integrabilità secondo

Riemann delle funzioni continue su intervalli chiusi e limitati. Teorema di integrabilità secondo Riemann delle funzioni monotone limitate su intervalli chiusi e limitati. Proprietà dell'integrale: linearità, additività, monotonia, teorema della media integrale. Definizione di primitiva di una funzione. La funzione integrale. Il teorema di esistenza delle primitive delle funzioni continue (primo teorema fondamentale del calcolo integrale). Il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale. Caratterizzazione delle primitive delle funzioni continue. Definizione di funzione localmente Riemann integrabile. Esempi di funzioni le cui primitive non sono esprimibili per mezzo di funzioni elementari. Integrazione per scomposizione. I Teoremi di integrazione per sostituzione (cambiamento di variabile) e di integrazione per parti. Esempi di integrazione per parti: primitiva di  $\sin^2 x$  e primitiva di  $\log x$ . Metodi d'integrazione: metodo per scomposizione, metodo dei fratti semplici.

#### EQUAZIONI DIFFERENZIALI.

Equazioni differenziali lineari omogenee e non omogenee del primo e del secondo ordine. L'integrale generale di un'equazione lineare omogenea e non omogenea. Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti omogenee e non omogenee: costruzione dell'integrale generale. Il polinomio caratteristico di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti. Costruzione dell'integrale generale di un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti in relazione al segno del discriminante del polinomio caratteristico. Costruzione di soluzioni di equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti con il metodo per simpatia. Risoluzione di equazioni differenziali a variabili separabili nel caso lineare omogeneo a coefficienti variabili. Il metodo della variazione delle costanti di Lagrange nel caso di equazioni differenziali lineari del primo ordine a coefficienti variabili.

#### INTEGRALE GENERALIZZATO

Definizione di funzione integrabile in senso generalizzato. Significato geometrico dell'integrale generalizzato. Definizione di integrale convergente. L'integrale generalizzato di una funzione localmente integrabile secondo Riemann non-negativa converge o in alternativa diverge (non può essere irregolare). Il criterio del confronto per gli integrali generalizzati di funzioni non-negative. Il criterio del confronto asintotico per gli integrali generalizzati di funzioni non negative. Integrabilità della famiglia di funzioni  $|x|^{-\alpha}$  in un intorno di  $\infty$  e in un intorno di 0. Integrabilità generalizzata di  $e^{ax}$  in un intorno di  $+\infty$  con  $a < 0$ . Definizione di funzione assolutamente integrabile in senso generalizzato. Teorema: funzioni assolutamente integrabili in senso generalizzato sono integrabili in senso generalizzato. Esempio di una funzione integrabile in senso generalizzato che non è assolutamente integrabile in senso generalizzato.