INTEGRALI GENERALIZZATI

FAUSTO FERRARI

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Chimica e Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2006/2007

1. Prerequisiti

Con il simbolo di inclusione $\subset$ indicheremo un'inclusione non necessariamente *stretta*. Pertanto $I \subset \mathbb{R}$ con I intervallo significa considerare anche i casi in cui $I \equiv \mathbb{R}$. Per indicare l'inclusione propria useremo il simbolo $\subset\neq$.

Definizione 1.1 (Funzione integrale)**.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f \in C(I)$ e $a \in I$ un numero. La funzione $F : I \to \mathbb{R}$ così definita*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds \tag{1}$$

è una **funzione integrale** *per f.*

In base alla precedente definizione possiamo affermare che esistono infinite funzioni integrali. Infatti la scelta di un numero $a \in I$ determina una funzione integrale. Ricordiamo inoltre che la lettera che compare all'interno dell'integrale (1) è *muta*, nel senso che non rappresenta la variabile della funzione integrale. Essa è semplicemente parte del simbolo utilizzato per indicare l'integrale. Pertanto

$$\int_a^x f(s)ds = \int_a^x f(t)dt,$$

mentre se $x \neq y$, allora in generale

$$\int_a^x f(s)ds \neq \int_a^y f(s)ds,$$

come nel caso in cui $a \neq b$ si avrà

$$\int_a^x f(s)ds \neq \int_b^x f(s)ds$$

e

$$\int_a^x f(s)ds \neq \int_b^y f(s)ds.$$

Definizione 1.2. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in C(I)$. Ogni funzione $g \in C^1(I)$ tale che: per ogni $x \in I$*

$$g'(x) = f(x)$$

è detta **primitiva** *di f.*

Teorema 1.1 (Teorema fondamentale del calcolo)**.** *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in C(I)$. Allora ogni funzione integrale F è una primitiva di f. In particolare sia $a \in I$ e F la funzione integrale individuata da a per f cioè $F : I \to \mathbb{R}$ e per ogni $x \in I$*

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds.$$

Date: 26/01/2004.

Allora

1) $F \in C^1(I)$.
2) *Per ogni* $x \in I$,

$$F'(x) \equiv \Big(\int_a^x f(s)ds \Big)' = f(x).$$

2. Integrale improprio

Supponiamo di avere fissato un intervallo $I \subset \mathbb{R}$ e una funzione $f \in C(I)$. La funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(s)ds,$$

dove a è un numero fissato con $a \in I$, è ben definita in I, quindi è naturale chiedersi, per esempio se esistono $\lim_{x\to m} F(x)$ e $\lim_{x\to M} F(x)$, con $m = \inf I$ e $M = \sup I$ rispettivamente. Notiamo che a questo proposito non abbiamo formulano alcuna ipotesi in merito alla chiusura e/o alla limitatezza dell'intervallo I. Esaminiamo due casi emblematici.

ESEMPIO 1

Siano $I = (0,1)$ e $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$. La seguente funzione $F(x) = \int_x^{1/4} \frac{1}{\sqrt{t}} dt$ è ben definita su I, inoltre

$$F(x) = [2\sqrt{t}]_{t=x}^{t=1/4} = 1 - 2\sqrt{x}.$$

Pertanto $\lim_{x\to 0^+} F(x) = 1$. Dal punto di vista geometrico possiamo interpretare questo valore come l'area della porzione di piano delimitata dal grafico della funzione f e dagli assi cordinati e dalla retta $x = 1/4$. La funzione f non è limitata ($\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$) ed inoltre non è definita su di un insieme chiuso e limitato, quindi tale funzione non possiede, a priori, le proprietà in base alle quali possiamo applicare la definizione di integrale definito per mezzo delle somme di Cauchy Riemann.

ESEMPIO 2

Siano $I = [1, \infty[$ e $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$. La funzione $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$ è ben definita su I e $F(x) = [-\frac{1}{t}]_{t=1}^{t=x} = -\frac{1}{x} + 1$. Pertanto esiste $\lim_{x\to +\infty} F(x) = 1$. Analogamente a quanto già osservato nel precedente esempio tale valore corrisponde all'area della porzione di piano delimitata dal grafico della funzione dagli assi coordinati e dalla retta $x = 1$. Osserviamo che anche questa funzione non appartiene, a priori, alle funzioni per le quali possiamo scrivere le somme di Cauchy Riemann. Infatti, il dominio non è limitato!

ESEMPIO 3

Siano $I = (0,1)$ e $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. La seguente funzione $F(x) = \int_x^{1/4} \frac{1}{t} dt$ è ben definita su I, inoltre

$$F(x) = \log(\frac{1}{4}) - \log x.$$

Pertanto $\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$. Quindi, mentre per ogni $0 < \bar{x} < 1/4$ $F(\bar{x}) \in \mathbb{R}$ e tale numero individua l'area della porzione di piano individuata dal grafico della funzione, dall'asse delle ascisse e dalle rette d'equazioni $x = \bar{x}$ e $x = 1/4$, l'area della porzione di piano individuata dal grafico della funzione, dagli assi coordinati e dalla retta d'equazione $x = 1/4$ non è finita, perché $\lim_{x\to 0^+} F(x) = +\infty$.

ESEMPIO 4

Siano $I = [1, \infty[$ e $f : I \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$. La funzione $F(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ è ben definita su I e $F(x) = \log x$. L'interpretazione geometrica di $F(x)$ è immediata. Siccome $\lim_{x\to +\infty} F(x) = +\infty$ possiamo anche affermare che l'area della porzione di piano individuata dal grafico della funzione, dagli assi coordinati e dalla retta d'equazione $x = 1$ non è finita.

Alla luce di questi esempi daremo la seguente definizione di integrale improprio o generalizzato.

Definizione 2.1. *Sia* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervallo e* f *una funzione continua su* I. *Se esiste* $a \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$ *tale che*

$$\text{esiste finito } \lim_{x\to\inf I}\int_x^a f(t)dt \text{ e esiste finito } \lim_{x\to\sup I}\int_a^x f(t)dt,$$

allora la funzione f *è integrabile in senso generalizzato (s.g. in breve) e il numero*

$$\lim_{x\to\inf I}\int_x^a f(t)dt + \lim_{x\to\sup I}\int_a^x f(t)dt$$

è l'integrale improprio (detto anche integrale generalizzato) di f. *In tal caso scriveremo*

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt \equiv \lim_{x\to\inf I}\int_x^a f(t)dt + \lim_{x\to\sup I}\int_a^x f(t)dt.$$

In letteratura è anche diffusa l'espressione *"integrale convergente"* per indicare il fatto che una data funzione è integrabile in s.g. su I o di *"integrale divergente"* per indicare che una data funzione non è integrabile in s.g.

In generale il simbolo

$$\int_{\inf I}^{\sup I} f(t)dt$$

verrà utilizzato per indicare l'integrale generalizzato a prescindere dall'effettiva integrabilità in s.g. della funzione stessa.

Osserviamo inoltre che la definizione è ben posta, perché indipendente dalla scelta del punto a. Infatti, se $a_1, a_2 \in I \setminus \{\inf I, \sup I\}$ e $a_1 \neq a_2$, allora si ha

$$\int_{a_1}^x f(t)dt = \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \int_{a_2}^x f(t)dt$$

e

$$\int_x^{a_1} f(t)dt = \int_{a_2}^{a_1} f(t)dt + \int_x^{a_2} f(t)dt.$$

L'integrale $\int_{a_2}^{a_1} f(t)dt$ è reale, perché f su $[a_1, a_2]$ è continua. Quindi

$$\lim_{x\to\inf I}\int_x^{a_1} f(t)dt$$

è reale se e solo se è reale

$$\lim_{x\to\inf I}\int_x^{a_2} f(t)dt$$

e analogamente dicasi per

$$\lim_{x\to\sup I}\int_{a_1}^x f(t)dt$$

e

$$\lim_{x\to\sup I}\int_{a_2}^x f(t)dt.$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to\inf I}\int_x^{a_1} f(t)dt + \lim_{x\to\sup I}\int_{a_1}^x f(t)dt\\
&= \lim_{x\to\inf I}\int_x^{a_2} f(t)dt + \int_{a_2}^{a_1} f(t)dt + \lim_{x\to\sup I}\int_{a_2}^x f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt\\
&= \lim_{x\to\inf I}\int_x^{a_2} f(t)dt - \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt + \lim_{x\to\sup I}\int_{a_2}^x f(t)dt + \int_{a_1}^{a_2} f(t)dt\\
&= \lim_{x\to\inf I}\int_x^{a_2} f(t)dt + \lim_{x\to\sup I}\int_{a_2}^x f(t)dt.
\end{aligned}$$

Possiamo ulteriormente generalizzare la precedente definizione di integrale improprio estendendola al caso in cui il dominio della funzione in esame sia unione finita d'intervalli e che su ciascuno degli intervalli la funzione data sia continua. In tal caso diremo che la funzione è integrabile in senso generalizzato se f ristretta a ciascuno degli intervalli su cui f è continua è integrabile in s.g. e definiremo l'integrale improprio come la somma degli integrali impropri della funzione f ristretta agli intervalli su cui la funzione è continua.

Esempio. La funzione $f : [-1, 0[\cup]0, 1] :\to \mathbb{R}$, $f(x) =\mid x \mid^{1/3}$ è integrabile in senso generalizzato su $[-1, 0[\cup]0, 1]$ e

$$\int_{-1}^{1} \mid x \mid^{1/3} dx \equiv \int_{-1}^{0} \mid x \mid^{1/3} dx + \int_{0}^{1} \mid x \mid^{1/3} dx.$$

Teorema 2.1. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f \in C(I)$, $f \geq 0$ e $a \in I$. Allora*

1) *la funzione $F : I \to \mathbb{R}$ così definita*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è monotona crescente;

2) *se F è superiormente limitata, allora f è integrabile in s.g. e*

$$\int_a^{supI} f(t)dt = \sup_{[a,\sup I[} F(x).$$

ESERCIZIO Stabilire per quali valori di $\alpha \in]-\infty, 0[$ la funzione $f_\alpha : (0, 1] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ è integrabile in s.g.

ESERCIZIO Stabilire per quali valori di $\alpha \in]-\infty, 0[$ la funzione $f_\alpha : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = x^\alpha$ è integrabile in s.g.

ESERCIZIO Stabilire per quali valori di $\alpha \in]-\infty, 0[$ la funzione $f_\alpha : (x_0, b] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = (x - x_0)^\alpha$ è integrabile in s.g.

ESERCIZIO Stabilire per quali valori di $\alpha \in]-\infty, 0[$ la funzione $f_\alpha : [c, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = (k + x)^\alpha$ è integrabile in s.g. dove c e k sono costanti.

ESERCIZIO Stabilire per quali valori di $\alpha \in]-\infty, 0[$ la funzione $f_\alpha : (x_0, b] \to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) =\mid x - x_0 \mid^\alpha$ è integrabile in s.g.

ESERCIZIO Stabilire per quali valori di $\alpha \in]-\infty, 0[$ la funzione $f_\alpha : [c, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f_\alpha(x) = (k + x)^\alpha$ è integrabile in s.g. dove c e k sono costanti.

Nella maggioranza dei casi non è facile calcolare il valore dell'integrale improprio, d'altra parte ciò che interessa è sapere se si ha integrabilità in s. g. o meno. Pertanto il seguente risultato di confronto è particolarmente utile.

Teorema 2.2. *Siano f e g funzioni non negative $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f, g \in C(I)$. Se per ogni $x \in I$, $0 \leq f(x) \leq g(x)$ e g è integrabile in s.g. allora f è integrabile in s.g. e*

$$0 \leq \int_{\inf I}^{\sup I} f(x)dx \leq \int_{\inf I}^{\sup I} g(x)dx$$

Teorema 2.3. *Siano f e g funzioni non negative $f, g : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ intervallo e $f, g \in C(I)$. Se per ogni $x \in I$, $f(x) \leq g(x)$ e f non è integrabile in s.g. allora g non è integrabile in s.g.*

Teorema 2.4. *(Criterio di convergenza) Sia $I = [a, b[$ (b eventualmente $+\infty$) e $f \in C(I)$. La funzione f è integrabile in s.g. se e soleo se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta(\epsilon) > 0$:*

$$\mid \int_{x_1}^{x_2} f(t)dt \mid< \epsilon,$$

per ogni $x_1, x_2 \in [b - \delta(\epsilon), b[$.

Definizione 2.2. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in C(I)$. Se la funzione $\mid f \mid$ è integrabile in s. g. allora diremo che la funzione f è assolutamente integrabile in s.g.*

Teorema 2.5. *Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo e $f \in C(I)$. Se f è assolutamente integrabile in s.g., allora f è integrabile in s.g.*

Forniamo alcuni esempi interessanti Sia $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, tale che $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Integrando per parti risulta

$$\int_1^x f(t)dt = [-\frac{\sin t}{t^2}]_{t=1}^{t=x} + \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

Pertanto

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)dt \in \mathbb{R}.$$

Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} [-\frac{\sin t}{t^2}]_{t=1}^{t=x} = \sin 1$$

e

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x \frac{\cos t}{t^2} dt \in \mathbb{R}$$

perché $\frac{\cos x}{x^2}$ è assolutamente integrabile in s.g. e quindi semplicemente integrabile in senso generalizzato. D'altra parte vedremo che $\frac{\sin x}{x}$ non è assolutamente integrabile in s. g.

Teorema 2.6. *Siano f, g funzioni $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$, $f, g \in C([a, b[)$, b eventualmente $+\infty$. Supponiamo che esistano una costante positiva M ed un numero $q \in [a, b[$ tali che per ogni $x \in [q, b[$ $\mid f \mid \leq M \mid g \mid$. In tal caso se g è assolutamente integrabile in s.g. su $[a, b[$, allora f è assolutamente integrabile in s.g. su $[a, b[$.*