1# Calcolare

$$\int_0^{\pi/16} \frac{\sin(4x+3)}{\sin^2(4x+3)+4\cos(4x+3)+4}\,dx = I$$

Posto $\cos(4x+3) = t \qquad dt = -4\sin(4x+3)dx$, quindi

$$I = -\frac{1}{4}\int_{\cos 3}^{\cos(\frac{\pi}{4}+3)} \frac{dt}{(1-t^2)+4t+4}, \quad \text{perché} \quad \cos^2(4x+3)+\sin^2(4x+3)=1$$

e $\sin^2(4x+3) = 1-\cos^2(4x+3) = 1-t^2$. Pertanto

$$I = -\frac{1}{4}\int_{\cos 3}^{\cos(\frac{\pi}{4}+3)} \frac{dt}{-t^2+4t+5}dt = \frac{1}{4}\int_{\cos 3}^{\cos(\frac{\pi}{4}+3)} \frac{A}{t-5}+\frac{B}{t+1}\,dt \quad , \text{dove}$$

$$\frac{1}{t^2-4t-5} = \frac{1}{\underset{(t-5)(t+1)}{t^2-4t-5}} = \frac{A}{t-5} \quad \frac{B}{t+1}. \quad \text{Quindi}$$

$$\frac{At+A+Bt-5B}{(t-5)(t+1)} = \frac{1}{t^2-4t-5}, \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A+B=0 \\ A-5B=1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=-B \\ -6B=1 \end{cases}$$

$A=\frac{1}{6}$, $B=-\frac{1}{6}$. Pertanto

$$I = \frac{1}{4}\int_{\cos 3}^{\cos(\frac{\pi}{4}+3)} \left[\frac{1}{6(t-5)} - \frac{1}{6(t-1)}\right]dt = \frac{1}{24}\Big[\log|t-5| - \log|t-1|\Big]_{t=\cos 3}^{t=\cos(\frac{\pi}{4}+3)}$$

$$= \frac{1}{24}\log\left[\frac{5-\cos(\frac{\pi}{4}+3)}{1-\cos(\frac{\pi}{4}+3)}\cdot\frac{1-\cos 3}{5-\cos 3}\right].$$

#2 Determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}^+$ converge la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(5n^{-\alpha})}{n^{5\alpha}+n^{1/2}}$

La serie è definitivamente a termini positivi,

perchè $5n^{-\alpha} \to 0$, per $n \to +\infty$, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

Studiamo quindi il carattere della serie con il criterio del confronto asintotico $(\alpha > 0)$

$$\frac{\sin(5n^{-\alpha})}{n^{5\alpha}+n^{1/2}} \sim \frac{5n^{-\alpha}}{n^{5\alpha}+n^{1/2}}, \quad \text{per } n \to +\infty$$

D'altra parte se $5\alpha > \frac{1}{2}$ allora $\frac{5n^{-\alpha}}{n^{5\alpha}+n^{1/2}} \sim \frac{5}{n^{5\alpha+\alpha}}$, per $n \to +\infty$

se $5\alpha \le \frac{1}{2}$ allora $\frac{5n^{-\alpha}}{n^{5\alpha}+n^{1/2}} \sim \frac{5}{n^{1/2+\alpha}}$

Pertanto la serie converge se $\begin{cases} 5\alpha > \frac{1}{2} \\ 6\alpha > 1 \end{cases} \vee \begin{cases} 5\alpha \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}+\alpha > 1 \end{cases}$

ovvero $\begin{cases} \alpha > \frac{1}{10} \\ \alpha > \frac{1}{6} \end{cases} \vee \begin{cases} \alpha \le \frac{1}{10} \\ \alpha > \frac{1}{2} \end{cases}$, ovvero $\alpha > \frac{1}{6}$.

Quindi la serie converge se e solo se $\alpha > \frac{1}{6}$.

#3 Calcolare l'integrale generale dell'eq. differenziale

$$y'' + y' - 6y = 3e^{2x} + x^2$$

Cominciamo con l'eq. omogenea $y''+y'-6y=0$; l'equazione caratteristica è: $\lambda^2+\lambda-6=0$ le cui soluzioni sono $\lambda=-3$, $\lambda=2$. Quindi $V_2 = \text{span}\{e^{-3x}, e^{+2x}\}$.

Cerchiamo una soluzione con il metodo per simpatia di

$$y''+y'-6y = 3e^{2x}.$$

Poiché il coefficiente dell'esponenziale e^{2x} è soluzione dell'eq. caratteristica di molteplicità uno cercheremo una soluzione nella forma

$y_1 = kxe^{2x}$. Quindi $y_1' = ke^{2x} + 2kxe^{2x}$

$y_1'' = 2ke^{2x} + 2ke^{2x} + 4kxe^{2x}$. Sostituendo nell'equazione differenziale

$$4ke^{2x} + \cancel{4kxe^{2x}} + ke^{2x} + \cancel{2kxe^{2x}} - \cancel{6kxe^{2x}} = 3e^{2x}.$$ Pertanto

$5k = 3$ da cui $k = \frac{3}{5}$. Pertanto $y_1 = \frac{3}{5}xe^{2x}$.

Cerchiamo una soluzione sempre con il metodo per simpatia dell'equazione differenziale

$$y'' + y' - 6y = x^2.$$

nella forma $y_2 = Ax^2 + Bx + C$. $y_2' = 2Ax + B$, $y_2'' = 2A$.

Quindi

$$2A + 2Ax + B - 6(Ax^2 + Bx + C) = x^2,$$ da cui

$$-6Ax^2 + (2A - 6B)x + 2A + B - 6C = x^2.$$ Pertanto

$$\begin{cases} -6A = 1 \\ 2A - 6B = 0 \\ 2A + B - 6C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} - 6B = 0 \\ -\frac{1}{3} + B - 6C = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{18} \\ C = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right) \end{cases} \quad \begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{18} \\ C = \frac{1}{6}\left(\frac{-6-1}{18}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{6} \\ B = -\frac{1}{18} \\ C = -\frac{7}{108} \end{cases} \qquad y_2 = -\frac{x^2}{6} - \frac{x}{18} - \frac{7}{108}$$

Quindi $LV_2 = \mathrm{span}\{e^{-3x}, e^{2x}\} + \frac{3}{5}xe^{2x} - \frac{x^2}{6} - \frac{x}{18} - \frac{7}{108}$.

4 Calcolare

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\cos^2(3x^2+2x) - \cosh^2(3x^2+2x)}{(\cos^2(3x^2+2x) + \cosh^2(3x^2+2x))^3 \, (3x - \operatorname{tg}(3x))^{2/3}} = -\frac{1}{3^{4/3}}$$

$3x^2 + 2x \xrightarrow[x \to 0^-]{} 0$. Posto $t = 3x^2 + 2x$ si ha:

$$\cos^2 t - \cosh^2 t \sim (\cos t - \cosh t)(\cos t + \cosh t) \quad , t \to 0$$

$$\sim \left(\cancel{1} - \frac{t^2}{2} - \cancel{1} - \frac{t^2}{2}\right)(1+1) \sim -2t^2.$$

Quindi

$$N \sim \cos^2(3x^2+2x) - \cosh^2(3x^2+2x) \sim -2(3x^2+2x)^2 \sim -8x^2, \quad x \to 0$$

$$3x - \operatorname{tg}(3x) \sim \cancel{3x} - \cancel{3x} - \frac{(3x)^3}{3} \sim 9(-x)^3, \quad x \to 0^-$$

Pertanto, ricordando che $\cos^2(3x^2+4x) + \cosh^2(3x^2+4x) \sim 2$, $x \to 0^-$

$$D \sim 8 \cdot \left[9(-x)^3\right]^{2/3} \sim 8 \cdot 3^{\frac{4}{3}}(-x)^2, \quad x \to 0^-.$$

Quindi $\quad \dfrac{N}{D} \sim \dfrac{-8x^2}{8 \cdot 3^{\frac{4}{3}} x^2} \sim -\dfrac{1}{3^{\frac{4}{3}}}, \quad x \to 0^-$

#5 Monotonia

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-|x+10| - |x^2+10x|}$

f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \{-10, 0\}$. Pertanto per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{-10, 0\}$

$$f'(x) = \left[-\operatorname{sgn}(x+10) - (2x+10)\operatorname{sgn}(x^2+10x)\right] e^{-|x+10| - |x^2+10x|}$$

$$\begin{cases} f'(x) < 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-10, 0\} \end{cases} \iff \begin{cases} -\operatorname{sgn}(x+10) - (2x+10)\operatorname{sgn}(x^2+10x) < 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-10, 0\} \end{cases}$$

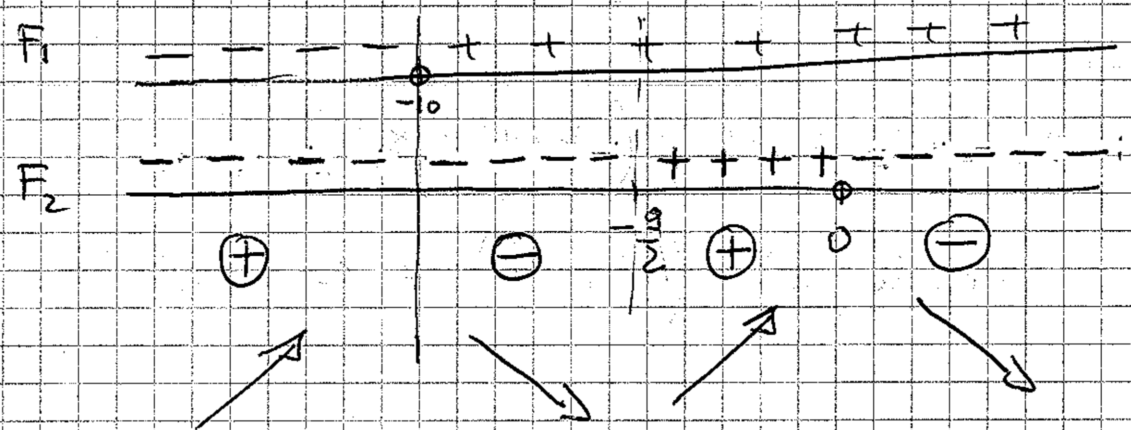
$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(x+10)\left(-1 - (2x+10)\operatorname{sgn} x\right) < 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{10, 0\} \end{cases}$$

$F_1: \ \text{Sgn}(x+10) > 0 \iff x > -10$

$F_2: \ -1-(2x+10)\,\text{Sgn}\,x > 0 \iff \begin{cases} -1+2x+10>0 \\ x<0 \end{cases} \lor$

$\lor \begin{cases} -1-2x-10>0\\ x>0\end{cases} \iff \begin{cases} x>-\frac{9}{2} \\ x<0\end{cases} \lor \begin{cases} x<-\frac{11}{2} \\ x>0 \end{cases}$

$\iff x\in\left(-\frac{9}{2},0\right)$. Pertanto $f'<0$ in $\mathbb{R}\setminus\{-10,0\}$ se e solo se



Cioè f è decrescente in $\left[-10,-\frac{9}{2}\right]$ ed è decrescente in $[0,+\infty)$. Pertanto in 0 si realizza un p.to di massimo relativo $f(0)= e^{-10}$.

In $-\frac{9}{2}$ si realizza un p.to di minimo relativo

$$f\left(-\frac{9}{2}\right)= e^{-\left|\frac{-9+20}{2}\right|-\left|\frac{81}{4}-45\right|} = e^{-\frac{11}{2}-\frac{99}{4}} = e^{\frac{-22-99}{4}}$$

$$= e^{-\frac{121}{4}}.$$

Infine in -10 si realizza un punto di massimo relativo $f(-10) = 1$

Poiché $f\in C(\mathbb{R})$ e $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$, in -10 si realizza il massimo assoluto per f.

\# 6 Sia $h \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$g(x) = \sinh(x \cdot h(x^2))$. Sapendo che $h(2)=2$

$h'(2)=3$ $h(4)=3$ $h'(4)=2$, calcolare $g'(2)$.

g è composizione di funzioni derivabili, quindi anche g è derivabile e

$$g'(x) = \cosh(x \cdot h(x^2))\left(h(x^2) + 2x^2 h'(x^2)\right)$$

Pertanto

$$g'(2) = \cosh(2 \cdot h(4))\left(h(4) + 8 h'(4)\right)$$

$$= \cosh(6) \cdot (3 + 16) = \cosh(6) \cdot 19$$

\# 7 Calcolare le soluzioni di .

$$(z^4 + 2 - 3i)(z^2 + (6-3i)z + 8 - 6i) = 0$$

$$z^4 + 2 - 3i = 0 \quad \vee \quad z^2 + (6-3i)z + 8 - 6i = 0$$

$z^4 = -2 + 3i$ $\qquad |-2+3i| = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$

$$\bar{\theta} = \arg(-2+3i) = -\arctan\frac{3}{2} + \pi$$

$z_k = (13)^{1/8} e^{i\theta_k}$ con $\theta_k = \dfrac{\bar{\theta} + 2k\pi}{4}$, $k = 0,1,2,3$.

Inoltre $z^2+(6-3i)z+8-6i=0$

$$z^2+(2+4-3i)z+2(4-3i)=0$$

$$(z+2)(z+4-3i)=0 \iff z_4=-2 \ \vee \ z_5=-4+3i$$

Pertanto le 6 soluzioni sono $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$.

#8 $$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^n+6^{-n}+n^{20}}{n^{300}-3\cdot 2^{n+1}+2^{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{-3\cdot 2^{n+1}+2^{n-1}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n}{(-6+\frac{1}{2})2^n} = -\frac{2}{11}$$

Infatti $N \sim 2^n$ e $D \sim -3\cdot 2^{n+1}+2^{n-1} \sim (-6+\frac{1}{2})2^n$
$\sim \left(-\frac{11}{2}\right)2^n$.