#1

$$\lim_{x\to 0} \frac{6\sin(3x) - 6\sinh(3x) + 54x^3 + 18x^4}{x^2\cos(3\pi x^2)\left(\cos^2(2x) - \cosh^2(2x)\right)} = -\frac{9}{4}$$

$$\sin(3x) \sim 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^4), \quad x \to 0.$$

$$\sinh(3x) \sim 3x + \frac{(3x)^3}{3!} + o(x^4), \quad x \to 0$$

(I termini pari sono nulli)

$$N \sim \cancel{18x} - \cancel{6\frac{(3x)^3}{3!}} - \cancel{18x} - \cancel{6\frac{(3x)^3}{3!}} + \cancel{54x^3} + 18x^4 + o(x^4)$$

$$\sim 18x^4, \quad x \to 0$$

$$D \sim x^2\left(\cos(2x) - \cosh(2x)\right)\left(\cos 2x + \cosh(2x)\right)$$

$$\sim x^2\left(\cancel{1} - \frac{(2x)^2}{2!} - \cancel{1} - \frac{(2x)^2}{2!}\right) \cdot 2 \sim -8x^4, \quad x \to 0$$

Quindi $\frac{N}{D} \sim -\frac{18}{8} \sim -\frac{9}{4}$.

#2

$$\lim_{n\to +\infty} \frac{n\left(\sqrt{n^4+6} - \sqrt{n^4+36}\right)}{\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2-36}} = -\frac{5}{7}$$

$$\frac{n\left(\sqrt{n^4+6} - \sqrt{n^4+36}\right)}{\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2-36}} = \frac{n\left(\cancel{n^4} + 6 - \cancel{n^4} - 36\right)}{\left(\sqrt{n^2+6} - \sqrt{n^2-36}\right)\left(\sqrt{n^4+6} + \sqrt{n^4+36}\right)}$$

$$= -\frac{30n\left(\sqrt{n^2+6} + \sqrt{n^2-36}\right)}{\left(\cancel{n^2} + 6 - \cancel{n^2} + 36\right)\left(\sqrt{n^4+6} + \sqrt{n^4+36}\right)} = \frac{-30\cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{6}{n^2}} + \sqrt{1-\frac{36}{n^2}}\right)}{42\cancel{n^2}\left(\sqrt{1+\frac{6}{n^4}} + \sqrt{1+\frac{36}{n^4}}\right)}$$

$$\frac{N}{D} \sim -\frac{30}{42}, \quad n \to +\infty$$

#3 $\quad y''+4y'+8y=5e^{2x}+\sin(2x)$

$y''+4y'+8y=0$ $\quad$ Eq. caratteristica $\lambda^2+4\lambda+8=0$

$\lambda_{1,2}=-2\pm\sqrt{4-8}=-2\pm i\,2$. Pertanto

$$V_2=\operatorname{span}\left\{e^{-2x}\cos(2x),\ e^{-2x}\sin(2x)\right\}$$

Cerchiamo una sol particolare di $y''+4y'+8y=5e^{2x}$ nella forma $Y_1=Ke^{2x}$. Quindi sostituendo

$$4Ke^{2x}+8Ke^{2x}+8Ke^{2x}=5e^{2x} \longrightarrow 20K=5 \longrightarrow K=\frac{1}{4}$$

Pertanto $Y_1=\dfrac{e^{2x}}{4}$.

Cerchiamo una soluzione di $y''+4y'+8y=\sin(2x)$ nella forma $Y_2=A\sin(2x)+B\cos(2x)$. Quindi sostituendo nell'eq. differenziale otteniamo:

$$\underline{-4A\sin(2x)}-4B\cos(2x)+4\big(2A\cos(2x)-\underline{2B\sin(2x)}\big)+8\big(\underline{A\sin(2x)}+B\cos(2x)\big)=\sin(2x)$$

Richiediamo quindi che:

$$\begin{cases}-4A-8B+8A=1\\ -4B+8A+8B=0\end{cases}\Longleftrightarrow\begin{cases}4A-8B=1\\ 8A+4B=0\end{cases}$$

$$A=\frac{\det\begin{vmatrix}1&-8\\0&4\end{vmatrix}}{16+64}=\frac{4}{80}=\frac{1}{20};\quad B=\frac{\det\begin{vmatrix}4&1\\8&0\end{vmatrix}}{80}=-\frac{1}{10}$$

Pertanto $Y_2=\dfrac{1}{20}\sin(2x)-\dfrac{1}{10}\cos(2x)$. Infine

$$LV_2=V_2+\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{20}\sin(2x)-\frac{1}{10}\cos(2x)$$

#4 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}}\,dx$, $\alpha>0$

$\dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}} > 0$, $\forall x>0$. Esaminiamo

$\displaystyle\int_0^1 \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}}\,dx$ utilizzando il criterio del confronto asintotico. $\log(1+x^\alpha) \sim x^\alpha$, $x \to 0$.

Quindi $\dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}} \sim \dfrac{x^\alpha}{x^8+x^{8\alpha}}$, $x \to 0$

Distinguiamo due casi

① Se $8>8\alpha$; allora $\dfrac{x^\alpha}{x^8+x^{8\alpha}} \sim \dfrac{x^\alpha}{x^{8\alpha}} \sim \dfrac{1}{x^{7\alpha}}$, $x\to 0$

Quindi la funzione sarà int. in s.g. se e solo se

$$\begin{cases} 8>8\alpha \\ 7\alpha<1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1>\alpha \\ \alpha<\frac{1}{7} \end{cases} \iff \frac{1}{7}<\alpha<1$$

② Se $8 \leq 8\alpha$, allora $\dfrac{x^\alpha}{x^8+x^{8\alpha}} \sim \dfrac{x^\alpha}{x^8} \sim \dfrac{1}{x^{8-\alpha}}$, $x\to 0$

Quindi la funzione sarà int. in s.g. se e solo se

$$\begin{cases} 8\leq 8\alpha \\ 8-\alpha<1 \end{cases} \iff \begin{cases} 1\leq\alpha \\ 7<\alpha \end{cases} \iff \alpha>7.$$

Studiamo ora il comportamento di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}}\,dx$

Dal teorema del confronto $\dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}} \leq \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^8}$, per ogni $x \geq 1$

inoltre $\dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x^8} = \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x} \cdot \dfrac{1}{x^7} \leq \dfrac{M}{x^7}$, $x \geq 1$

con $M \in \mathbb{R}$, $M>0$. Infatti $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\log(1+x^\alpha)}{x} = 0$

Pertanto $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}}dx$ converge per ogni $\alpha>0$, perché, dal Teorema del cfr., la convergenza dell'integ. dato dipende dalla conv. di $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^7}dx$. L'ultimo int. converge $(7>1)$.

Quindi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\log(1+x^\alpha)}{x^8+x^{8\alpha}}dx$, $\alpha>0$ converge se e solo se $\alpha \in \left(\frac{1}{7}, 1\right) \cup (7, +\infty)$.

\# 5 $\quad h, \sigma \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g = \sigma(x^2 \cdot h(\sqrt{x^2+2}))$

e $h(1)=2$ $h'(1)=3$, $h(\sqrt{3})=3$, $h'(\sqrt{3})=2$, calcolare $g'(1)$.

g è una funzione di classe C^1 perché composizione di funzioni C^1. Inoltre

$$g'(x) = \sigma'\left(x^2 \cdot h(\sqrt{x^2+2})\right) \cdot \left(2x\, h(\sqrt{x^2+2}) + \frac{x^2 \cdot \cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+2}} h'(\sqrt{x^2+2})\right)$$

e

$$g'(1) = \sigma'(h(\sqrt{3})) \cdot \left(2\, h(\sqrt{3}) + \frac{h'(\sqrt{3})}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= \sigma'(3) \cdot \left(2 \cdot 3 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = \sigma'(3)\left(6 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right).$$

#6 $f(x) = e^{7|x-5|} \dfrac{x}{3x+5}$

Il dominio naturale è $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$. Quindi $f: \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\} \to \mathbb{R}$

Inoltre se $x \neq 5$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\}$ f è derivabile perché composizione di funzioni derivabili. Pertanto f è derivabile in $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, 5\right\}$. Inoltre per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, 5\right\}$

$$f'(x) = 7 e^{7|x-5|} \operatorname{sgn}(x-5) \cdot \frac{x}{3x+5} + e^{7|x-5|} \frac{\cancel{3x}+5-\cancel{3x}}{(3x+5)^2}$$

$$= e^{7|x-5|} \left(\frac{7x \operatorname{sgn}(x-5)}{3x+5} + \frac{5}{(3x+5)^2} \right)$$

$$= e^{7|x-5|} \frac{7x(3x+5)\operatorname{sgn}(x-5) + 5}{(3x+5)^2} .$$

Si noti che $\lim_{x \to 5^+} f'(x) = \frac{141}{80}$ e $\lim_{x \to 5^-} f'(x) = -\frac{139}{80}$

quindi, effettivamente in 5 la f non è derivabile.

Studiamo ora il segno di f'.

$$\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, 5\right\} \\ f' > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, 5\right\} \\ 7x(3x+5)\operatorname{sgn}(x-5) + 5 > 0 \end{cases}$$

Se $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{5}{3}, 5\right\} \\ x < 5 \\ -7x(3x+5) + 5 > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x \in (-\infty, 5) \setminus \left\{-\frac{5}{3}\right\} \\ -21x^2 - 35x + 5 > 0 \end{cases}$

Risolviamo $21x^2+35x-5=0$

$$x_{1,2}=\frac{-35\pm\sqrt{35^2+420}}{42}=\frac{-35\pm\sqrt{1645}}{42}=\begin{cases}-\frac{35+\sqrt{1645}}{42}\\ \frac{-35+\sqrt{1645}}{42}\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\in(-\infty,5)\setminus\left\{-\frac{5}{3}\right\}\\ -\frac{35+\sqrt{1645}}{42}<x<\frac{35+\sqrt{1645}}{42}\end{cases}$$

. Si noti che

$$-\frac{35+\sqrt{1645}}{42}<-\frac{35+40}{42}=-\frac{75}{42}<-\frac{5}{3},$$ quindi

Se $x\in(-\infty,5)\setminus\left\{-\frac{5}{3}\right\}$ $\quad f'>0 \iff x\in\left(-\frac{35+\sqrt{1645}}{42},-\frac{5}{3}\right)$ $\cup\left(-\frac{5}{3},\frac{35+\sqrt{1645}}{42}\right)$, infatti vale anche

$$\frac{35+\sqrt{1645}}{42}<\frac{35+41}{42}<\frac{76}{42}<2<5.$$

Inoltre se

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3},5\right\}\\ x>5\\ 7x(3x+5)+5>0\end{cases}\iff\begin{cases}x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3},5\right\}\\ x>5\\ 21x^2+35x+5>0\end{cases},$$

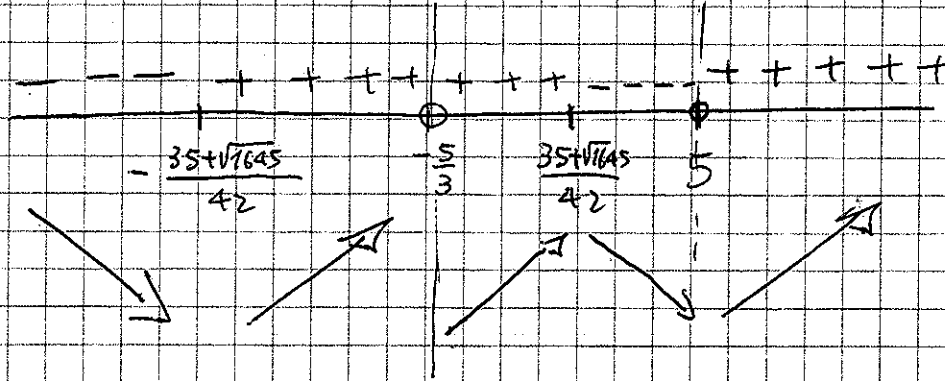
$\Delta=35^2-420=805$ e $x_{1,2}=\frac{-35\pm\sqrt{805}}{42}$

$$\begin{cases}x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{5}{3},5\right\}\\ x>5\\ x\in\left(-\infty,\frac{-35-\sqrt{805}}{42}\right)\cup\left(\frac{-35+\sqrt{805}}{42},+\infty\right)\end{cases}\iff S=(5,+\infty)$$

perché $\frac{-35+\sqrt{805}}{42}<\frac{-35+30}{42}<-\frac{5}{42}<5$

Riassumendo

$f' > 0$ in



Quindi f è monotona strettamente crescente in $\left(-\frac{35+\sqrt{1645}}{42}, -\frac{5}{3}\right)$ e in $\left(-\frac{5}{3}, \frac{35+\sqrt{1645}}{42}\right)$ e in $[5, +\infty)$.

#7 Calcolare $\int_6^5 6(x-6)^3 e^{(x-6)^2}\,dx = I$

posto $(x-6)^2 = t$ $\quad dt = 2(x-6)\,dx$, quindi

$$I = 3\int_0^1 t\,e^t\,dt = 3\left\{\left[te^t\right]_{t=0}^{t=1} - \int_0^1 e^t\,dt\right\}$$

$$= 3\left[te^t - e^t\right]_{t=0}^{t=1} = 3(e - e + 1) = 3$$

#8 $z \in \mathbb{C}$: $\left(z^3 + 5 - 20i\right)\left(z^2 - (20+4i)z + 80i\right) = 0$

$$z^3 + 5 - 20i = 0 \iff z_k = (425)^{1/6} e^{i\theta_k}$$

con $\theta_k = \frac{\varphi_0 + 2k\pi}{3}$, $k = 0,1,2$ e $\varphi_0 = -\operatorname{arctg}(4) + \pi$

$$z^2 - (20+4i)z + 80i = 0 \iff (z-20)(z-4i) = 0$$

$\iff z_3 = 20$ e $z_4 = 4i$.