① Calcolare

$$\int_{\sqrt{5/2}}^{\sqrt{10}} (2x^3-5x)\, e^{-2x^2} dx.$$

Posto $x^2=t$ $dt=2x\,dx$, quindi $\int_{\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{10}} (2x^3-5x)e^{-2x^2}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_{\sqrt{\frac{5}{2}}}^{\sqrt{10}} (2x^2-5)\,2x\,e^{-2x^2}dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{5}{2}}^{10} (2t-5)\,e^{-2t}dt.$$

Integrando per parti otterremo

$$=\frac{1}{2}\left[+\frac{e^{-2t}}{2}(2t-5)\right]_{t=\frac{5}{2}}^{t=10} - \frac{1}{2}\int_{5/2}^{10} e^{-2t}\,dt = \frac{15}{2}\cdot\frac{e^{-20}}{2} + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{-2t}}{2}\right]_{t=\frac{5}{2}}^{t=10}$$

$$= \frac{15}{4}e^{-20} + \frac{1}{4}\left(e^{-20}-e^{-5}\right) = 4e^{-20} - \frac{e^{-5}}{4}.$$

②

$$f(x) = \exp\left(\frac{|x^2-9|+14x}{x-3}\right)$$

Il dominio naturale è $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. Quindi $f: \mathbb{R}\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$.

La funzione è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$ perché composizione di funzioni derivabili in $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. Pertanto per ogni $x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$

$$f'(x) = \exp\left(\frac{|x^2-9|+14x}{x-3}\right)\frac{(2x\,\mathrm{sgn}(x^2-9)+14)(x-3)-(|x^2-9|+14x)}{(x-3)^2}$$

Osserviamo che $\lim_{x\to -3^-} f'(x) = \frac{36}{36}e^{14} = e^{14}$

$\lim_{x\to-3^+} f'(x) = e^{14}\frac{-120+84}{36} = -e^{14}$. Pertanto f è derivabile soltanto in $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$. Per determinare in quali intervalli è monotona studiamo il segno di f' in $\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}$.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\}. \end{cases}$$

In particolare se $x^2-9>0$ avremo

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x^2-9>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \end{cases} \iff \begin{cases} (2x+14)(x-3)-(x^2-9+14x)>0 \\ x^2-9>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} 2x^2-6x+\cancel{14x}-42-x^2+9-\cancel{14x}>0 \\ x<-3 \quad \vee \quad x>3 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-6x-33>0 \\ x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \end{cases}$$

Risolvendo l'equazione associata otteniamo $x_{1,2}=3\pm\sqrt{9+33}=3\pm\sqrt{42}$, pertanto

$$\begin{cases} f'>0 \\ x^2-9>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \end{cases} \iff \begin{cases} x<3-\sqrt{42} \quad \vee \quad x>3+\sqrt{42} \\ x\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty) \\ 3-\sqrt{42}<-3 \end{cases} \iff x\in(-\infty,3-\sqrt{42})\cup(3+\sqrt{42})$$

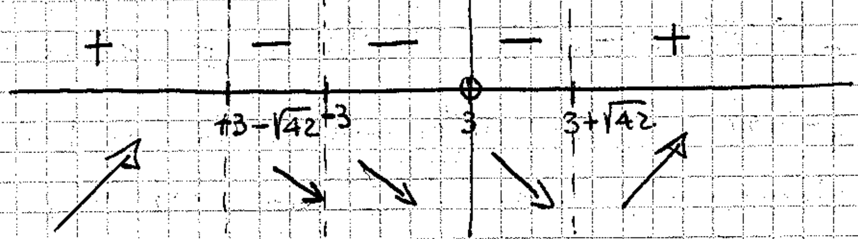
perché $6<\sqrt{42}<7$ e quindi

Nel caso in cui $x^2-9<0$ dovremo risolvere

$$\begin{cases} f'(x)>0 \\ x^2-9<0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \end{cases} \iff \begin{cases} (-2x+14)(x-3)-(9-x^2+14x)>0 \\ x\in(-3,3) \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{-3,3\} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2x^2+6x+\cancel{14x}-42-9+x^2-\cancel{14x}>0 \\ x\in(-3,3) \end{cases} \iff \begin{cases} -x^2+6x-51>0 \\ x\in(-3,3) \end{cases}$$

$\frac{\Delta}{4}=9-51=-42<0$, quindi la disequazione non è mai soddisfatta. Pertanto il segno di f' è il seguente



in -3 non è derivabile, ma la funzione e' continua in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ e quindi anche in 3

La funzione è monotona decrescente in $[3-\sqrt{42}, -3]$ ed è monotona decrescente in $[-3, 3)$. Inoltre è decrescente in $(3, 3+\sqrt{42}]$. D'altra parte f è continua in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, quindi f è monotona decrescente (strettamente) in $[3-\sqrt{42}, 3)$ e in -3 c'è un punto angoloso; f è monotona decrescente (strettamente) in $(3, 3+\sqrt{42}]$.

③ $$(z^4-256i)\left(z^2-(16+3i)z+12(4+3i)\right)=0$$

Risolviamo $z^4-256i=0$ cioè $z^4=256i$

$|256i|=256$, $\arg(256i)=\frac{\pi}{2}$. Quindi

$$z_k=\sqrt[4]{256}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}\right)=4e^{i\theta_k}$$

con $\theta_k=\dfrac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$.

Risolviamo $z^2-(16+3i)z+12(4+3i)=0$. Osserviamo che

$16+3i=12+4+3i$ e $12(4+3i)$ è l'addendo di grado zero. Quindi possiamo fattorizzare il polinomio:

$$z^2-(16+3i)z+12(4+3i)=\left(z-(4+3i)\right)\left(z-12\right)$$

Pertanto

$z^2-(16+3i)z+12(4+3i)=0$ se e solo se $z=4+3i$ e $z=12$.

④ $$y''+4y=\sin(2x)+3x+2$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata $y''+4y=0$.
L'equazione caratteristica è: $\lambda^2+4=0$, quindi $\lambda_1=2i$ e $\lambda_2=-2i$.
Pertanto l'integrale generale dell'equazione omogenea associata è:
$V_2=\operatorname{span}\{\cos(2x), \sin(2x)\}$. Determiniamo ora una soluzione di $y''+4y=\sin(2x)$ e una soluzione di $y''+4y=3x+2$.

Nel caso $y''+4y=\sin(2x)$ notiamo che 2 è soluzione di molteplicità uno di $\lambda^2+4=0$. Quindi applicando il metodo per simpatia ricercheremo una soluzione di $y''+4y=\sin(2x)$ nella forma $\varphi(x)=x\cdot(A\cos(2x)+B\sin(2x))$ con $A, B\in\mathbb{R}$

costanti da determinare. Quindi

$$\varphi'(x) = A\cos(2x) + B\sin(2x) + x\left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right)$$

$$\varphi''(x) = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) + \left(-2A\sin(2x) + 2B\cos(2x)\right) + x\left(-4A\cos 2x - 4B\sin(2x)\right)$$

e sostituendo otteniamo

$$\varphi'' + 4\varphi = -2A\sin(2x) + 2B\cos(2x) - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x .$$

Quindi da $\varphi''+4\varphi = \sin(2x)$ deve essere soddisfatta

$$-4A\sin(2x) + 4B\cos(2x) = \sin(2x).$$

Richiederemo quindi che $\begin{cases} -4A-1=0 \\ 4B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-\frac{1}{4} \\ B=0 \end{cases}$

Dunque $\varphi = -\frac{x}{4}\cos(2x)$.

Determiniamo ora una soluzione di $y''+4y = 3x+2$.
Ricercheremo una soluzione con il metodo per simpatia nella forma di un polinomio di grado uno. Cercheremo cioè una soluzione nella forma $\psi = \alpha x+\beta$ con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ da determinare. In particolare $\psi' = \alpha$ e $\psi''=0$. Sostituiamo ricavando

$$4(\alpha x+\beta) = 3x+2 .$$

Imponiamo pertanto $\begin{cases} 4\alpha = 3 \\ 4\beta = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha = \frac{3}{4} \\ \beta = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Quindi $\psi = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$.

Pertanto l'integrale generale dell'equazione $y''+4y = \sin(2x)+3x+2$ è

$$LV_2 = \operatorname{span}\{\cos(2x), \sin(2x)\} - \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$= \left\{\varphi \in C^2(\mathbb{R}) : \varphi = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x - \frac{x}{4}\cos(2x) + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

⑤ Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x) = \dfrac{x^2 + \sin\left(\frac{5}{2}\pi x\right)}{5x^8 + \cos^2(x) + 2}$

Calcolare $f'(x_0)$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ e calcolare $f'(0)$.

$$f'(x_0) = \frac{\left(2x_0 + \frac{5}{2}\pi\cos\left(\frac{5}{2}\pi x_0\right)\right)\left(5x_0^8 + \cos^2(x_0) + 2\right) - \left(x_0^2 + \sin\left(\frac{5}{2}\pi x_0\right)\right)\left(40x_0^7 - 2\cos x_0 \sin x_0\right)}{\left(5x_0^8 + \cos^2(x_0) + 2\right)^2}$$

$$f'(0) = \frac{\frac{5}{2}\pi \cdot (1+2)}{(1+2)^2} = \frac{5}{6}\pi.$$

⑥

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x + 5x^2) - e^{4x^2}}{\cos(2+5x)\left(\log(1+2x-5x^2) - 2x\right)}$$

$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^3)$, $t \to 0$, $\quad e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $t \to 0$

$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, $t \to 0$. Inoltre

$(2x+5x^2)^2 \sim 4x^2$, $x \to 0$ e $(2x-5x^2)^2 \sim 4x^2$, $x \to 0$.

Pertanto

$\cos(2x+5x^2) \sim 1 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$, $x \to 0$

$e^{4x^2} \sim 1 + 4x^2 + o(x^2)$, $x \to 0$

$\log(1+2x-5x^2) \sim 2x - 5x^2 - \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$, $x \to 0$.

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(2x+5x^2) - e^{4x^2}}{\cos(2+5x)\left(\log(1+2x-5x^2) - 2x\right)} = \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{1} - 2x^2 - \cancel{1} - 4x^2 + o(x^2)}{\cos(2+5x)\left(\cancel{2x} - 5x^2 - 2x^2 + o(x^2) - \cancel{2x}\right)}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-6x^2}{\cos(2+5x)\left(-7x^2\right)} = \frac{6}{7\cos 2}.$$

⑦ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-\arctan(2n))^3}{n^\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$

La serie è a termini definitamente positivi perché

$|\arctan(2n)| < \frac{\pi}{2}$, mentre $2n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Applichiamo il criterio asintotico

$$\frac{(2n-\arctan(2n))^3}{n^\gamma} \sim \frac{8n^3}{n^\gamma}, \quad n \to +\infty$$

Quindi $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-\arctan(2n))^3}{n^\gamma}$ convergerà se e solo se convergerà la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{n^{\gamma-3}}$.

Si tratta di una serie armonica generalizza di esponente $\gamma-3$. Tale serie convergerà se e solo se $\gamma-3>1$, cioè se e solo se $\gamma>4$.

⑧ Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2 - 5\left(3+\frac{1}{n}\right)+6}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}-\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)}$$

$$\frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2 - 5\left(3+\frac{1}{n}\right)+6}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}-\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)} = \frac{\left(3+\frac{1}{n}-3\right)\left(3+\frac{1}{n}-2\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}-\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)} = \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}-\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)}$$

(N.B. sviluppando i calcoli a numeratore avremmo comunque ottenuto $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$).

Il denominatore costituisce una forma di indecisione, quindi

$$= \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}-\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)} \cdot \frac{\sqrt{n+\frac{15}{n}}+\sqrt{n+\frac{12}{n}}}{\sqrt{n+\frac{15}{n}}+\sqrt{n+\frac{12}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}+\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\cancel{n}+\frac{15}{n}-\cancel{n}-\frac{12}{n}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}+\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \sim \frac{\frac{2\sqrt{n}}{n}}{\frac{3}{\sqrt{n}}} \sim \frac{2}{3}, \quad n \to +\infty$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(3+\frac{1}{n}\right)^2-5\left(3+\frac{1}{n}\right)+6}{\sqrt{n}\left(\sqrt{n+\frac{15}{n}}-\sqrt{n+\frac{12}{n}}\right)} = \frac{2}{3}.$$

---

⑧ Esercizio contenuto nel testo della seconda prova parziale insieme agli esercizi ①, ②, ④, ⑥, ⑦

$$h(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt - \frac{x}{3}.$$

Il dominio naturale d'esistenza è $\mathbb{R}$ perché $e^{-t^2} \in C(\mathbb{R})$, quindi per ogni x, $\int_0^x e^{-t^2}dt$ è ben definito.

Pertanto $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Verifichiamo se la funzione è pari o dispari oppure non ha tali proprietà di simmetria. La questione si pone in base al fatto che il dominio è simmetrico rispetto a 0.

In particolare, per ogni $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ e

$$h(-x) = \int_0^{-x} e^{-t^2}dt + \frac{x}{3} = -\int_0^x e^{-s^2}ds + \frac{x}{3} = -\left(\int_0^x e^{-s^2}ds - \frac{x}{3}\right)$$

avendo posto $-s = t$, $dt = -ds$

$$= -h(x).$$

La funzione h è quindi dispari.

Dal primo teorema fondamentale del calcolo integrale e dall'algebra delle derivate risulta che h è derivabile su $\mathbb{R}$ e

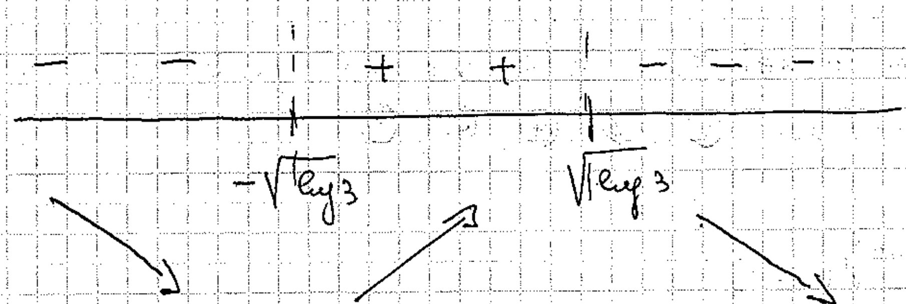
$$h'(x) = e^{-x^2} - \frac{1}{3}, \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}$$

Quindi studiamo il segno di h'

$$\begin{cases} h'>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} e^{-x^2}-\frac{1}{3}>0 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} -x^2>\log\frac{1}{3} \\ x\in\mathbb{R}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -x^2>-\log 3 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff \begin{cases} x^2<\log 3 \\ x\in\mathbb{R}\end{cases} \iff$$

$$-\sqrt{\log 3}<x<\sqrt{\log 3}$$



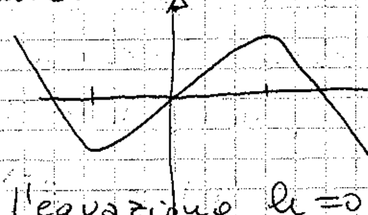
Pertanto h è strettamente crescente in $[-\sqrt{\log 3}, \sqrt{\log 3}]$ mentre è strettamente decrescente in $(-\infty, -\sqrt{\log 3}]$ e sarà strettamente decrescente in $[\sqrt{\log 3}, +\infty)$.

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$. Infatti

$\int_0^{\infty} e^{-t^2}dt$ è convergente, come è convergente

$\int_0^{-\infty} e^{-t^2}dt$. (Possiamo verificare tale affermazione osservando che $e^{-t^2}<e^{-t}$ per $t>0$. Quindi dal Teorema del confronto risulta $\int_0^x e^{-t^2}dt < \int_0^x e^{-t}dt = 1-e^{-x}$ e $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} < 1$) Mentre x è divergente.

La funzione h è nulla in 0. Quindi il grafico è indicativamente il seguente.



Pertanto dal teorema di Bolzano segue che l'equazione $h=0$ ha esattamente tre soluzioni