#1

$$\left((z+2i)^5+2+7i\right)\left(z^2+2iz+45-14\sqrt{3}\,i\right)=0$$

$$(z+2i)^5+2+7i=0 \quad \vee \quad z^2+2iz+45-14\sqrt{3}\,i=0.$$

Se $z+2i=v$, allora

$v^5=-2-7i$. Quindi $|-2-7i|=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$ e

$\theta_0=\arg(-2-7i)=\arctan\frac{7}{2}+\pi$. Pertanto

$$v_k=(53)^{\frac{1}{10}}\,e^{i\varphi_k}, \quad \text{dove } \varphi_k=\frac{\theta_0+2k\pi}{5}, \quad k=0,1,2,3,4.$$

Pertanto $z_k=v_k-2i$, $k=0,1,2,3,4$.

Inoltre da $z^2+2iz+45-14\sqrt{3}\,i=0$ segue che

$z_5=-i+u_5$ e $z_6=-i+u_6$ dove u_5 e u_6 sono

soluzioni di $u^2=-1-45+14\sqrt{3}\,i$, cioè $u^2=-46+14\sqrt{3}\,i$.

Da $14\sqrt{3}\,i=2\cdot 7\cdot\sqrt{3}\,i$, segue che $(i7+\sqrt{3})^2=-46+14\sqrt{3}\,i$;

pertanto $u_5=i7+\sqrt{3}$ e $u_6=-i7-\sqrt{3}$.

Quindi $z_5=-i+i7+\sqrt{3}=6i+\sqrt{3}$ e $z_6=-i-i7-\sqrt{3}=-8i-\sqrt{3}$

Le soluzioni dell'equazione sono

$$z_k=v_k-2i, \quad 0,1,2,3,4, \quad \text{e} \quad z_5=\sqrt{3}+6i, \; z_6=-\sqrt{3}-8i.$$

#2

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x+4x^2)-\sinh(x-4x^2)}{(\cos^2(5x)-1)\cos(x^2+5\pi)}=\frac{8}{25}$$

$\sin(x+4x^2)\underset{x\to 0}{\sim} x+4x^2-\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$; $\sinh(x-4x^2)\underset{x\to 0}{\sim} x-4x^2+\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$

$\cos 5x\underset{x\to 0}{\sim} 1-\frac{25x^2}{2}+o(x^3)$, $\cos^2(5x)\underset{x\to 0}{\sim} 1-25x^2+o(x^3)$

$\cos(x^2+5\pi)\underset{x\to 0}{\sim} -1$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0}\frac{N}{D}=\lim_{x\to 0}\frac{8x^2}{-25x^2\cdot\cos(5\pi)}=\frac{8}{25}.$$

#3

$$f(x)=\log\left(3|x|x^2-x\right)$$

Il dominio naturale è l'insieme dei numeri reali per cui $3|x|x^2-x>0$. Quindi

$$\underbrace{\begin{cases} x\geq 0\\ 3|x|x^2-x>0\end{cases}}_{\text{I}} \quad \vee \quad \underbrace{\begin{cases} x<0\\ 3|x|x^2-x>0\end{cases}}_{\text{II}}$$

Risolviamo I.

$$\begin{cases} x\geq 0\\ (3x^2-1)x>0\end{cases} \iff \begin{cases} x>0\\ 3x^2-1>0\end{cases} \quad (x \text{ è positivo}) \iff$$

$$\begin{cases} x>0\\ x<-\frac{1}{\sqrt{3}} \vee x>\frac{1}{\sqrt{3}}\end{cases} \iff x\in\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$$

Risolviamo II

$$\begin{cases} x<0\\ -x(3x^2+1)>0\end{cases} \iff \begin{cases} x<0\\ 3x^2+1>0\end{cases} \quad (-x \text{ è positivo})$$

$\iff x\in(-\infty,0)$. Pertanto il dominio naturale di f è $D=(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{\sqrt{3}},+\infty\right)$.

$f : (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(3|x|x^2 - x)$

è derivabile in $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$ perché composizione di funzioni derivabili su $(-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

Calcoliamo f'. Per ogni $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$

$$f'(x) = \frac{1}{3|x|x^2 - x} \left(3 \operatorname{sgn}(x) \cdot x^2 + 6x|x| - 1\right)$$

Studiamo il segno della derivata prima.

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) = D \end{cases}$$

Ricordando che $3|x|x^2 - x > 0$ in D, il precedente sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} 3x^2 \operatorname{sgn} x + 6x|x| - 1 > 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right). \end{cases}$$

In particolare le soluzioni si ottengono risolvendo i due seguenti sistemi

$$\underset{Ⓐ}{\begin{cases} -3x^2 - 6x^2 - 1 > 0 \\ x \in (-\infty, 0) \end{cases}} \quad \vee \quad \underset{Ⓑ}{\begin{cases} 3x^2 + 6x^2 - 1 > 0 \\ x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \end{cases}}$$

A

$S = \emptyset$ perché $-3x^2 - 6x^2 - 1 < 0$

B

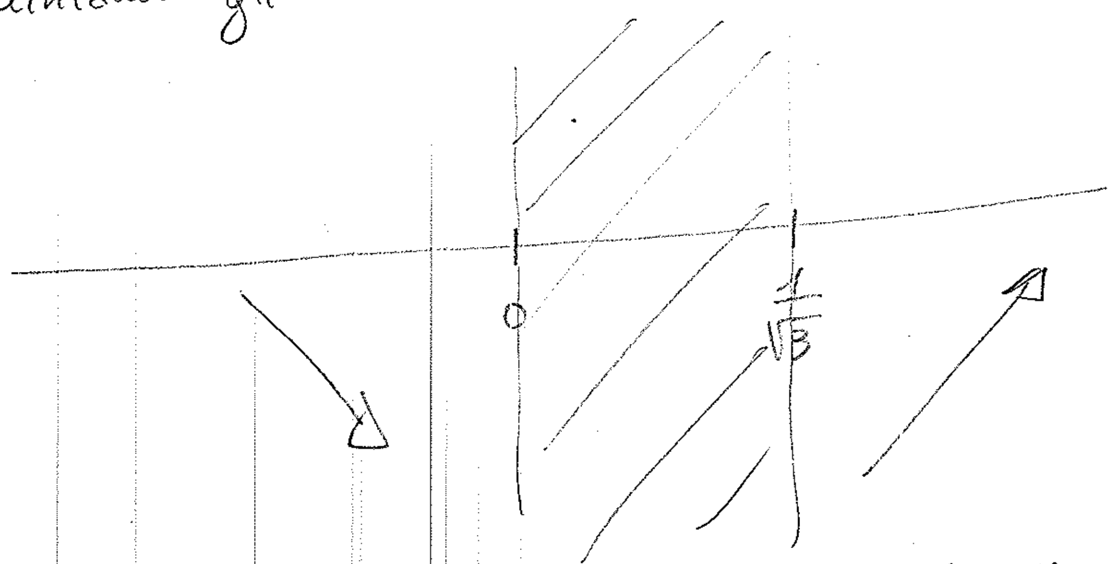
$$\begin{cases} 9x^2 > 1 \\ x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \end{cases} \iff \begin{cases} x \in \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}, +\infty\right) \\ x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \end{cases}$$

$$\iff x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right).$$

Riassumendo $\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \end{cases} \iff x \in \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right).$

Quindi $\begin{cases} f'(x) < 0 \\ x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right) \end{cases} \iff x \in (-\infty, 0).$

Determiniamo gli intervalli di monotonia



f è monotona decrescente in $(-\infty, 0)$ (strettamente dec.)

f è monotona crescente (strettamente) in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right)$.

Inoltre $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to -\infty} f = +\infty$

e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

#4

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n+5^n+n^{105}}{10e^n+5^{n+5}+15n^{105}} = \frac{1}{5^5}$$

$e^n+5^n+n^{105} \sim 5^n$, $n \to +\infty$, perché $5>3>e$ e le successioni esponenziali di base maggiore di uno sono infiniti di ordine superiore rispetto a qualunque polinomio.

Analogamente $10e^n+5^{n+5}+15n^{105} \sim 5^{n+5}$, $n\to+\infty$.

Quindi

$$\frac{e^n+5^n+n^{105}}{10e^n+5^{n+5}+15n^{105}} \sim \frac{5^n}{5^{n+5}} \sim \frac{1}{5^5}, \quad n\to+\infty.$$

#5

$$y''-9y'+20y=3e^{4x}+3x.$$

Risolviamo l'equazione omogenea associata $y''-9y'+20y=0$

$\lambda^2-9\lambda+20=0 \iff (\lambda-5)(\lambda-4)=0 \iff \lambda_1=5, \lambda_2=4.$

$V_2=\{\varphi\in C^2(\mathbb{R}) : \varphi=c_1e^{5x}+c_2e^{4x}, \ c_1,c_2\in\mathbb{R}\}=\mathrm{span}\{e^{5x},e^{4x}\}.$

Determiniamo una soluzione di $y''-9y'+20y=3e^{4x}$ con il metodo per simpatia. Poiché 4 è soluzione di molteplicità uno, cerchiamo una soluzione nella forma $\psi=Kxe^{4x}$. Ora, $\psi'=Ke^{4x}+4Kxe^{4x}$,

$\psi''=4Ke^{4x}+4Ke^{4x}+16Kxe^{4x}$. Quindi

$$\underbrace{8Ke^{4x}+16Kxe^{4x}}_{\psi''} -9\underbrace{K(1+4x)e^{4x}}_{\psi'}+20\underbrace{Kxe^{4x}}_{\psi}=3e^{4x}$$

$$8K+\cancel{16Kx}-9K-\cancel{36Kx}+\cancel{20Kx}=3\ ; \quad K=-3.$$

Quindi $\psi = -3xe^{4x}$.

Determiniamo una soluzione di $y''-9y'+20y=3x$.

Cerchiamo una soluzione sotto forma di un polinomio di primo grado $\eta = Ax+B$. In particolare $\eta'=A$ $\eta''=0$. Quindi $-9A+20(Ax+B)=3x$.

$(20A-3)x-9A+20B=0$. Dal principio d'identità dei polinomi risulta $\begin{cases} 20A-3=0 \\ -9A+20B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{3}{20} \\ -\frac{27}{20}+20B=0 \end{cases} \iff \begin{cases} A=\frac{3}{20} \\ B=\frac{27}{400} \end{cases}.$

Pertanto $\eta = \frac{3}{20}x+\frac{27}{400}$. Infine:

$$LV_2 = V_2 - 3xe^{4x}+\frac{3}{20}x+\frac{27}{400}.$$

$\boxed{\#6}$

$$K(x)=\left(\arctan(3x^2+7)\right)^{\sqrt{7x+3}}, \quad K: \left[-\frac{3}{7},+\infty\right) \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Per ogni $x\in\left(-\frac{3}{7},+\infty\right)$, $K(x)=e^{\sqrt{7x+3}\,\log\left(\arctan(3x^2+7)\right)}$.

Quindi per ogni $x\in\left(-\frac{3}{7},+\infty\right)$

$$K'(x) = e^{\sqrt{7x+3}\,\log(\arctan(3x^2+7))}\left\{\frac{7\log(\arctan(3x^2+7))}{2\sqrt{7x+3}}+\frac{6x\sqrt{7x+3}}{\left[1+(3x^2+7)^2\right]\arctan(3x^2+7)}\right\}$$

In particolare

$$K'(1) = (\arctan 10)^{\sqrt{10}} \left\{ \frac{7 \log(\arctan 10)}{2\sqrt{10}} + \frac{6\sqrt{10}}{101 \arctan 10} \right\}.$$

$\boxed{\#7}$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t+4}}{\sqrt{t+4}+1}\,dt = 5-2\sqrt{5}+2\log\frac{\sqrt{5}+1}{3}$$

Posto $\sqrt{t+4} = s$, $ds = \frac{1}{2\sqrt{t+4}}\,dt$, quindi

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{t+4}}{\sqrt{t+4}+1}\,dt = \int_2^{\sqrt{5}} \frac{2s^2}{s+1}\,ds = 2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{s^2+1-1}{s+1}\,ds$$

$$= 2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{s^2-1}{s+1}\,ds + 2\int_2^{\sqrt{5}} \frac{1}{s+1}\,ds = 2\int_2^{\sqrt{5}} (s-1)\,ds + 2\Big[\log|s+1|\Big]_{s=2}^{s=\sqrt{5}}$$

$$= 2\left[\frac{(s-1)^2}{2}\right]_{s=2}^{s=\sqrt{5}} + 2\log\frac{\sqrt{5}+1}{3} = (\sqrt{5}-1)^2 - 1 + 2\log\frac{\sqrt{5}+1}{3}$$

$$= 5-2\sqrt{5}\cancel{+1}\cancel{-1} + 2\log\frac{\sqrt{5}+1}{3} = 5-2\sqrt{5}+2\log\frac{\sqrt{5}+1}{3}.$$

$\boxed{\#8}$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\tan\left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}\right)}{4x^3+x^7}\,dx, \quad \gamma > 0.$$

$\dfrac{\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}}{4x^3+x^7} \in C(0,+\infty)$. Esaminiamo la convergenza di $\displaystyle\int_0^1 \frac{\tan\left(\frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}\right)}{4x^3+x^7}\,dx$; la funzione è positiva, quindi utilizziamo il criterio di convergenza asintotico. In particolare

$$\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1} \sim x^\gamma, \quad x \to 0 \quad (\text{per } \gamma>0),$$

quindi

$$\frac{\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}}{4x^3+x^7} \sim \frac{1}{4x^{3-\gamma}}, \quad x \to 0.$$

L'integrale $\int_0^1 \frac{1}{4x^{3-\gamma}} dx$ converge se e solo se

$3-\gamma < 1$, quindi $\gamma > 2$.

Esaminiamo ora la convergenza di $\int_1^{+\infty} \frac{\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}}{4x^3+x^7} dx$.

La funzione $\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1} \sim \tan 1$ per $x \to +\infty$, $(\gamma>0)$

inoltre $\frac{\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}}{4x^3+x^7}$ è positiva in $(1,+\infty)$.

Quindi applichiamo il criterio asintotico di convergenza.

$$\frac{\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}}{4x^3+x^7} \sim \frac{\tan 1}{x^7}, \quad x \to +\infty$$

poiché

Pertanto $\int_1^{+\infty} \frac{\tan 1}{x^7} dx < +\infty$

se ne deduce che $\int_0^{+\infty} \frac{\tan \frac{x^\gamma}{x^\gamma+1}}{4x^3+x^7} dx$ con $\gamma>0$, converge

se e solo se $\gamma > 2$.