Correzione del secondo appello di Analisi Matematica L-A (CdL in Ingegneria Elettronica e in Ingegneria Automatica) A.A. 2005/2006

ESERCIZIO 1

Le soluzioni dell'equazione $(3z^3 + 5 + 4i)(z^2 + 9iz - 14) = 0$ si ottengono risolvendo

$$3z^3 + 5 + 4i = 0$$

e

$$z^2 + 9iz - 14 = 0.$$

Per quanto riguarda la prima equazione, abbiamo $z^3 = -\frac{5}{3} - i\frac{4}{3}$ e $-\frac{5}{3} - i\frac{4}{3} = \frac{1}{3}\sqrt{41}e^{i\theta}$, dove

$$\theta = \arctan\frac{4}{5} + \pi.$$

Quindi le soluzioni della prima equazione sono per $k = 0, 1, 2$

$$z_k = \sqrt[6]{\frac{41}{9}}e^{i\theta_k}$$

e $\theta_k = \frac{\theta + 2k\pi}{3}$, $k = 0, 1, 2$.

Mentre possiamo fattorizzare il polinomio della seconda equazione scrivendo

$$z^2 + 9iz - 14 = (z + 2i)(z + 7i) = 0.$$

Pertanto le soluzioni saranno $z_4 = -2i$ e $z_5 = -7i$.

ESRECIZIO 2

Per determinare il dominio d'esistenza dobbiamo risolvere il sistema

$$-1 \leq \frac{| x - 7 |}{| x - 10 |} \leq 1 \text{ e } x \neq 10.$$

Ovvero, equivalentemente,

$$| x - 7 | \leq | x - 10 | \quad \text{e } x \neq 10.$$

Pertanto le soluzioni si ottengono risolvendo il seguente sistema

$$x^2 - 14x + 49 \leq x^2 - 20x + 100 \text{ e } x \neq 10,$$

ovvero, risolvendo $6x \leq 51$, otteniamo $x \leq \frac{51}{6}$

$$D = (-\infty, \frac{51}{6}].$$

La funzione è inoltre derivabile in $D \setminus \{7, \frac{51}{6}\}$ e in $D \setminus \{7, \frac{51}{6}\}$ vale

$$f'(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{(x-7)^2(x-10)^2}} \frac{\operatorname{sgn}(x-7) \mid x-10 \mid - \operatorname{sgn}(x-10) \mid x-7 \mid}{(x-10)^2}.$$

Quindi dobbiamo risolvere

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in D \setminus \{7, \frac{51}{6}\}. \end{cases}$$

Il precedente sistema ha soluzione se e solo se

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(x-7)\operatorname{sgn}(x-10) < 0 \\ x \in D \setminus \{7, \frac{51}{6}\}. \end{cases}$$

Quindi dal test di monotonia segue che la funzione è monotona strettamente crescente in $[7, \frac{51}{6}]$.

Inoltre $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$. Quindi esiste un solo asintoto di equazione $y = \frac{\pi}{2}$. Inoltre 7 è punto di minimo (assoluto) per f, mentre $\frac{51}{6}$ è punto di massimo assoluto per f.

ESERCIZIO 3

$$\lim_{n \to \infty} n^5 \frac{\sqrt{n^5+5} - \sqrt{n^5+10}}{\sqrt{n^5+5} + \sqrt{n^5+10}} = \lim_{n \to \infty} n^5 \frac{\sqrt{n^5+5} - \sqrt{n^5+10}}{\sqrt{n^5+5} + \sqrt{n^5+10}} \frac{\sqrt{n^5+5} - \sqrt{n^5+10}}{\sqrt{n^5+5} + \sqrt{n^5+10}} = -\frac{5}{4}.$$

ESERCIZIO 4

Poiché $n^5 = o(e^{3n})$, per $n \to \infty$, e $\log(n+3) = o(e^{3n})$ per $n \to \infty$, ne segue che

$$\lim_{n \to \infty} \frac{e^{3n} + n^5 + \log(n+3)}{n^5 + 11 \log(n+3) + 5e^{3n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{e^{3n}}{5e^{3n}} = \frac{1}{5}$$

ESERCIZIO 5

La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = \mid x-3 \mid e^{|x-4|}$ è derivabile infinite volte in $\mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$ e

$$f'(x) = \operatorname{sgn}(x-3)e^{|x-4|} + \mid x-3 \mid \operatorname{sgn}(x-4)e^{|x-4|}.$$

Inoltre in $\mathbb{R} \setminus \{3, 4\}$

$$f''(x) = \operatorname{sgn}(x-3)\operatorname{sgn}(x-4)e^{|x-4|} + \operatorname{sgn}(x-4)\left(\operatorname{sgn}(x-3)e^{|x-4|} + \mid x-3 \mid \operatorname{sgn}(x-4)e^{|x-4|}\right)$$

$$= 2\operatorname{sgn}(x-3)\operatorname{sgn}(x-4)e^{|x-4|} + \mid x-3 \mid e^{|x-4|} = \operatorname{sgn}(x-3)e^{|x-4|}(2\operatorname{sgn}(x-4) + x - 3)$$

Determiniamo ora le soluzioni del seguente sistema

$$\begin{cases} f''(x) > 0 \\ x \in D \setminus \{3, 4\}. \end{cases}$$

Ovvero del sistema equivalente seguente

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(x-3)(2\operatorname{sgn}(x-4)+x-3) > 0 \\ x \in D \setminus \{3,4\}. \end{cases}$$

Pertanto f è convessa in $(-\infty, 3]$ e f è convessa in $[4, +\infty)$.

ESERCIZIO 6

$$\int_0^2 \frac{x+3}{x^2+3x+4}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x+6}{x^2+3x+4}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{2x+3}{x^2+3x+4}dx + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{3}{x^2+3x+4}dx$$

$$[\log \mid x^2+3x+4 \mid]_{x=0}^{x=2} + \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{3}{(x+\frac{3}{2})^2+\frac{7}{4}}dx$$

$$= [\log \mid x^2+3x+4 \mid]_{x=0}^{x=2} + \frac{2}{7}\int_0^2 \frac{3}{\frac{4}{7}(x+\frac{3}{2})^2+1}dx$$

$$= [\log \mid x^2+3x+4 \mid + \frac{\sqrt{7}}{7}\arctan(\frac{2}{\sqrt{7}}(x+\frac{3}{2}))]_{x=0}^{x=2}$$

$$= \log\frac{14}{4} - \frac{\sqrt{7}}{7}\left(\arctan\sqrt{7} - \arctan\frac{3}{\sqrt{7}}\right)$$

ESERCIZIO 7

$$g'(t) = 4e^{4t}f'(e^{4t}).$$

Quindi $g'(0) = 4f'(1) = 12$. Risposta a).

ESERCIZIO 8 Calcolare

$$\int_2^3 (x+2)\log(x+2)dx.$$

Integrando per parti si ottiene

$$\int_2^3 (x+2)\log(x+2)dx = [\frac{1}{2}(x+2)^2\log(x+2)]_{x=2}^{x=3} - \int_2^3 \frac{1}{2}(x+2)^2(x+2)^{-1}dx$$

$$= [\frac{1}{2}(x+2)^2\log(x+2) - \frac{1}{4}(x+2)^2]_{x=2}^{x=3}$$

$$= \frac{25}{2}\log 5 - \frac{25}{24} - 8\log 4 + 4.$$

ESERCIZIO 9 Studiare la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{4}{7})^n$$

rispondendo alle seguenti domande: i) la serie è convergente ma non assolutamente convergente? ii) la serie è assolutamente convergente? iii) qual è la somma della serie?

Si tratta della serie geometrica di ragione $-\frac{4}{7}$. Tale serie è assolutamente convergente, perchè converge la serie geometrica di ragione $\frac{4}{7}$. Inoltre la serie converge a $\frac{7}{3}$.

ESERCIZIO 10

Sappiamo che per $t \to 0$:

$$\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + o(t^4)$$

$$\sinh(t) = t + \frac{t^3}{3!} + o(t^4)$$

$$\cosh(t) = 1 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + o(t^5).$$

Quindi per calcolare

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+4x) - 2\sinh(4x) + 4x + 8x^2}{\cosh(5x) - (1 + \frac{25}{4}x^2)^2}$$

procediamo nel modo seguente.

Sappiamo che per $x \to 0$

$$\frac{\log(1+4x) - 2\sinh(4x) + 4x + 8x^2}{\cosh(5x) - (1 + \frac{25}{4}x^2)^2}$$

$$\sim \frac{4x - 8x^2 + \frac{64}{3}x^3 - 64x^4 - 2(4x + \frac{4^3}{6}x^3) + 4x + 8x^2 + o(x^4)}{1 + \frac{25}{2}x^2 + \frac{5^4}{4!}x^4 - (1 + \frac{25}{4}x^2)^2 + o(x^5)}$$

$$\sim \frac{-64x^4 + o(x^4)}{(\frac{5^4}{4!} - \frac{25^2}{16})x^4 + o(x^5)} \sim \frac{-64}{\frac{5^4}{4!} - \frac{25^2}{16}}$$

Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+4x) - 2\sinh(4x) + 4x + 8x^2}{\cosh(5x) - (1 + \frac{25}{4}x^2)^2} = \frac{-64}{\frac{5^4}{4!} - \frac{25^2}{16}}.$$