02-10-2002

ESERCITAZIONE

FAUSTO FERRARI

Esercizio 1

Sia $\{a_n\}_{n\in N}$, tale che esiste $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$. Allora $\{a_n\}_{n\in N}$ è limitata.

Dimostrazione

Dall'esistena del limite segue che fissato $\bar\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esiste $n(\bar\epsilon) \in \mathcal{N}$ tale che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > n(\bar\epsilon)$,

$$-\bar\epsilon + a < a_n < a + \bar\epsilon.$$

Posto

$$A = \max\{\mid a_n \mid : \ n \in \mathcal{N}, 1 \leq n \leq n(\bar\epsilon)\},$$

definiamo $M = \max\{A, \mid -\bar\epsilon + a \mid, \mid a + \bar\epsilon \mid\}$. Da ciò risulta che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $\mid a_n \mid < M$, cioè $\{a_n\}_{n\in N}$ è limitata.

Esercizio 2

Siano $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ due successioni aventi rispettivamente limite $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Allora

a) Esiste il limite della successione somma $\{a_n + b_n\}_{n\in N}$ e

$$a_n + b_n \to a + b, \ \ n \to \infty.$$

b) Esiste il limite della successione prodotto $\{a_n b_n\}_{n\in N}$ e

$$a_n b_n \to ab, \ \ n \to \infty.$$

c) Se $b \neq 0$ ed esiste $\bar n\ in \mathcal{N}$ tale che per ogni $n > \bar n$, $b_n \neq 0$, allora per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > \bar n$ la successione quoziente è ben definita e

$$\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}, \ \ n \to \infty.$$

Dimostrazione

Dall'esistenza dei limiti, finiti, per le due successioni date si ottiene che per ogni $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ esistono rispettivamente $n_1(\epsilon)$ e $n_2(\epsilon)$ tali che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > n_1(\epsilon)$ si ha $\mid a_n - a \mid < \epsilon$ e per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > n_2(\epsilon)$ si ha $\mid b_n - b \mid < \epsilon$. Inoltre dall'Esercizio 1 deduciamo l'esistenza di $M_1, M_2 \in \mathbb{R}^+$ tali che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $M_1 > \mid a_n \mid$ e $M_2 > \mid b_n \mid$, cioè le successioni $\{a_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathcal{N}}$ sono limitate.

Punto a. Dall'esistenza del limite per entrambe le successioni segue che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > \max\{n_1(\epsilon), n_2(\epsilon)\}$,

$$\mid (a_n + b_n) - (a + b) \mid \ = \ \mid (a_n - a) + (b_n - b) \mid,$$

dalla disuguaglianza triangolare segue che

$$\mid (a_n - a) + (b_n - b) \mid \ \leq \ \mid a_n - a \mid + \mid b_n - b \mid < 2\epsilon.$$

Pertanto esiste il limite della successione somma.

Punto b.

Dall'esistenza del limite per entrambe le successioni segue che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > \max\{n_1(\epsilon), n_2(\epsilon)\}$,

$$\begin{aligned} \mid a_n b_n - ab \mid \ &= \ \mid a_n b_n - ab_n + ab_n - ab \mid = \mid (a_n - a)b_n + a(b_n - b) \mid \\ &\leq \ \mid a_n - a \mid\mid b_n \mid + \mid b_n - b \mid\mid a \mid < \epsilon(M_2 + \mid a \mid). \end{aligned}$$

Pertanto esiste il limite della successione prodotto.

Punto c.

Osserviamo che se $b \neq 0$, allora $\mid b \mid /4 \neq 0$; quindi, fissato $\hat{\epsilon}$, $0 < \hat{\epsilon} = \mid b \mid /2$, esiste $n(\hat{\epsilon})$ tale che per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > n(\hat{\epsilon})$:

$$\mid b_n - b \mid < \hat{\epsilon} = \frac{\mid b \mid}{4}.$$

Pertanto

$$\mid b_n \mid = \mid b - (b - b_n) \mid \geq \mid b \mid - \mid b_n - b \mid > \mid b \mid - \frac{\mid b \mid}{4} = \frac{3}{4} \mid b \mid .$$

D'altra parte per ogni $n \in \mathcal{N}$, $n > \max\{n_1(\epsilon), n_2(\epsilon), \bar{n}, n(\hat{\epsilon})\}$, dalla disuguaglianza triangolare segue,

$$\begin{aligned} & \mid \frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b} \mid = \mid \frac{a_n b - b_n a}{b_n b} \mid = \mid \frac{a_n b - a_n b_n + a_n b_n - b_n a}{b_n b} \mid \\ \leq \; & \frac{\mid a_n \mid\mid b_n - b \mid + \mid b_n \mid\mid a_n - a \mid}{\mid b_n b \mid} \mid \leq \epsilon \frac{M_1 + M2}{\mid b_n b \mid} \\ \leq \; & \epsilon \frac{M_1 + M2}{\frac{3}{4} \mid b \mid\mid b \mid}, \end{aligned}$$

cioè l'esistenza del limite del quozionte delle successioni.

Ricordiamo alcune definizioni

Definizione 0.1. Siano $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$ due successioni. La successione $\{a_n\}_{n\in N}$ **è asintotica** alla successione $\{b_n\}_{n\in N}$ se esiste una terza successione $\{c_n\}_{n\in N}$ tale che
i) $a_n = c_n b_n$ per ogni $n \in N$;
ii) $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.
In tal caso scriveremo $a_n \sim b_n$, $n \to \infty$.

Esempio La successione $\{n + 3\}_{n\in N}$ è asintotica alla successione $\{n\}_{n\in N}$. Infatti data la successione $\{c_n\}_{n\in N}$ definita nel modo seguente, $c_n = \frac{n+3}{n}$ si ha che
i) $n + 3 = nc_n$, per ogni $n \in N$;
ii) $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$.

Definizione 0.2. Siano $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$ due successioni. La successione $\{a_n\}_{n\in N}$ **è O grande** di $\{b_n\}_{n\in N}$ se esiste una terza successione $\{c_n\}_{n\in N}$ tale che
i) $a_n = c_n b_n$ per ogni $n \in N$;
ii) la successione $\{c_n\}_{n\in N}$ è limitata.
In tal caso scriveremo $a_n = O(b_n)$, $n \to \infty$.

Esempio La successione $\{n \sin n\}_{n\in N}$ è O grande di n. Infatti data la successione $\{c_n\}_{n\in N}$ con $c_n = \sin n$ si ha che
i) $n \sin n = nc_n$, per ogni $n \in N$;
ii) $\mid c_n \mid = \mid \sin n \mid \leq 1$, cioè c_n è limitata.

Definizione 0.3. Siano $\{a_n\}_{n\in N}$, $\{b_n\}_{n\in N}$ due successioni. La successione $\{a_n\}_{n\in N}$ **è o piccolo** di $\{b_n\}_{n\in N}$ se esiste una terza successione$\{c_n\}_{n\in N}$ tale che
i) $a_n = c_n b_n$ per ogni $n \in N$;
ii) la successione $\{c_n\}_{n\in N}$ è infinitesima.
In tal caso scriveremo $a_n = o(b_n)$, $n \to \infty$.

Esempio La successione $\{n\}_{n\in N}$ è o piccolo di n^2. Infatti data la successione $\{c_n\}_{n\in N}$ con $c_n = n^{-1}$ si ha che:
i) $n = c_n n^2$, per ogni $n \in N$;
ii) $c_n \to 0$, per $n \to \infty$.

Nota bene Se $a_n = o(b_n)$, per $n \to \infty$, allora $a_n = O(b_n)$, per $n \to \infty$. Ciò segue dal fatto che ogni successione infinitesima è anche limitata. Il viceversa è falso, infatti $n \sin n = O(n)$, per $n \to \infty$, mentre $n \sin n$ non è o piccolo di n, per $n \to \infty$. Infatti se esistesse c_n successione infinitesima per $n \to \infty$, tale che per ogni $n \in N$, $n \sin n = nc_n$, allora dovrebbe essere $\sin n = c_n$, mentre $\sin n$ non solo non è infinitesima ma non ammette neppure limite, pur essendo limitata.