INTEGRAZIONE MEDIANTE CAMBIAMENTO DI VARIABILE

ESERCITAZIONE DI ANALISI MATEMATICA L-A PER I CDL IN ELETTRONICA E AUTOMAZIONE
A.A. 2005/2006

Calcolare il seguente integrale

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

Notiamo che la funzione integranda è continua nell'intervallo chiuso $[1,2]$, quindi l'integrale di Riemann esiste. Il trinomio di secondo grado sotto radice quadrata ha $\Delta = -8 < 0$, quindi procederemo ad una sostituzione in modo tale da ricondurci ad una forma del tipo $\sqrt{t^2+a^2}$. Per ottenere questo risultato completiamo il binomio $4x^2+2x$ in modo da ottenere un quadrato di un binomio piú un numero:

$$4x^2+2x = 4(x^2+\frac{1}{2}x) = 4(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4}.$$

Quindi

$$4x^2+2x+1 = (4x^2+2x)+1 = 4(x+\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} + 1 = [2(x+\frac{1}{4})]^2 + \frac{3}{4}.$$

Nella notazione introdotta $t = 2(x+\frac{1}{4})$, mentre $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$. Risulterà utile procedere ad una sostituzione con il sinh. Prima raccogliamo a fattor comune a^2 attenendo, nel nostro caso:

$$\sqrt{4x^2+2x+1} = \sqrt{\frac{3}{4}}\sqrt{[\frac{4}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{4})]^2+1}.$$

Poniamo $y(x) = \frac{4}{\sqrt{3}}(x+\frac{1}{4})$ da cui ricaviamo $x = \frac{\sqrt{3}}{4}y - \frac{1}{4}$. Quindi avremo

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+2x+1}} = \int_{y(1)}^{y(2)} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}dy}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{4})\sqrt{y^2+1}}.$$

Finalmente se poniamo $y(t) = \sinh t$, si ha $t = \text{arcsinh} y$ e $dy = \cosh t dt$, quindi

$$\int_{y(1)}^{y(2)} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}dy}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}y-\frac{1}{4})\sqrt{y^2+1}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\text{arcsinh} y(1)}^{\text{arcsinh} y(2)} \frac{\cosh t dt}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}\sinh t - \frac{1}{4})\sqrt{\sinh t^2+1}}$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\text{arcsinh} y(1)}^{\text{arcsinh} y(2)} \frac{\cosh t dt}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}\sinh t - \frac{1}{4})\sqrt{\cosh t^2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\text{arcsinh} y(1)}^{\text{arcsinh} y(2)} \frac{dt}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}\sinh t - \frac{1}{4})}.$$

A questo punto se non è possibile procedere ad una integrazione immediata, occorre scrivere le funzioni iperboliche per mezzo delle funzioni esponenziali:

$$\sinh t = \frac{\exp(t)-\exp(-t)}{2},\ \cosh t = \frac{\exp(t)+\exp(-t)}{2}.$$

Si ha quindi

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\text{arcsinh} y(1)}^{\text{arcsinh} y(2)} \frac{dt}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}\sinh t - \frac{1}{4})} = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\text{arcsinh} y(1)}^{\text{arcsinh} y(2)} \frac{dt}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\exp(t)-\exp(-t)}{2} - \frac{1}{4})}$$

Date: 04/11/2005.

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\int_{\mathrm{arcsinh}y(1)}^{\mathrm{arcsinh}y(2)} \frac{dt}{2(\frac{\sqrt{3}}{4}\frac{\exp(2t)-1}{2\exp(t)}-\frac{1}{4})} = \sqrt{3}\int_{\mathrm{arcsinh}y(1)}^{\mathrm{arcsinh}y(2)} \frac{\exp(t)}{\sqrt{3}\exp(2t)-2\exp(t)-\sqrt{3}}dt.$$

Con un altro cambiamento di variabile si ottiene ponendo $\exp(t) = s$, $ds = \exp(t)dt$, da cui segue

$$\sqrt{3}\int_{\mathrm{arcsinh}y(1)}^{\mathrm{arcsinh}y(2)} \frac{\exp(t)}{\sqrt{3}\exp(2t)-2\exp(t)-\sqrt{3}}dt = \sqrt{3}\int_{\exp(\mathrm{arcsinh}y(1))}^{\exp(\mathrm{arcsinh}y(2))} \frac{1}{\sqrt{3}s^2-2s-\sqrt{3}}ds.$$

D'altra parte ricordando che $\mathrm{arcsinh}y = \log(y+\sqrt{y^2+1})$ si ricava

$$\exp(\mathrm{arcsinh}y(1)) = y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}, \text{ e } \exp(\mathrm{arcsinh}y(2)) = y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}.$$

Il denominatore della frazione algebrica così ottenuta si fattorizza nel modo seguente

$$\sqrt{3}s^2-2s-\sqrt{3} = \sqrt{3}(s-\sqrt{3})(s+\frac{1}{\sqrt{3}}),$$

Pertanto

$$\sqrt{3}\int_{y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}}^{y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}} \frac{1}{\sqrt{3}s^2-2s-\sqrt{3}}ds = \int_{y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}}^{y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}} \frac{1}{(s-\sqrt{3})(s+\frac{1}{\sqrt{3}})}ds.$$

quindi dobbiamo determinare due costanti A e B tali che

$$\frac{1}{(s-\sqrt{3})(s+\frac{1}{\sqrt{3}})} = \frac{A}{(s-\sqrt{3})} + \frac{B}{(s+\frac{1}{\sqrt{3}})}.$$

Dal principio di identità dei polinomi ciò si verifica se e solo se per ogni $s \in \mathbb{R}$

$$(A+B)s + \frac{A}{3} - \frac{B}{\sqrt{3}} = 1,$$

quindi se e solo se A, e B soddisfano il sistema lineare seguente

$$\begin{cases} A+B=0 \\ \frac{A}{3}-\frac{B}{\sqrt{3}}=1. \end{cases}$$

Risolvendo il sistema ricaviamo che $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Quindi

$$\int_{y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}}^{y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}} \frac{1}{(s-\sqrt{3})(s+\frac{1}{\sqrt{3}})}ds = \int_{y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}}^{y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s-\sqrt{3}}ds - \int_{y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}}^{y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{s+\frac{1}{\sqrt{3}}}ds$$

e finalmente

$$\int_1^2 \frac{dx}{2x\sqrt{4x^2+2x+1}} = \Big[\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{|s-\sqrt{3}|}{|s+\frac{1}{\sqrt{3}}|}\Big]_{s=y(1)+\sqrt{(y(1))^2+1}}^{s=y(2)+\sqrt{(y(2))^2+1}}$$