

# SERIE NUMERICHE

FAUSTO FERRARI

Materiale propedeutico alle lezioni di Analisi Matematica per i corsi di Laurea in Ingegneria Energetica e Meccanica N-Z dell'Università di Bologna. Anno Accademico 2003/2004

## 1. PREREQUISITI

Teoremi di esistenza del limite per successioni monotone. Formula di Taylor con resto di Peano e con resto di Lagrange.

## 2. LA SERIE GEOMETRICA

Sia  $r$  un numero reale. Definiamo la seguente successione  $(r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Costruiamo ora una nuova successione a partire dalle somme parziali nel modo seguente  $S_0 = r^0 = 1$ ,  $S_1 = r^0 + r$ ,  $S_2 = r^0 + r + r^2, \dots, S_{n+1} = S_n + r^{n+1}$ . D'altra parte

$$rS_n = r(r^0 + r + \dots + r^n) = (r + r^2 + \dots + r^{n+1}) = S_{n+1} - 1.$$

Se consideriamo il seguente sistema nelle incognite  $S_n$  e  $S_{n+1}$

$$\begin{cases} S_{n+1} = S_n + r^{n+1} \\ rS_n = S_{n+1} - 1 \end{cases}$$

Pertanto sostituendo la prima equazione nella seconda si ottiene  $rS_n = S_n + r^{n+1} - 1$  da cui segue  $S_n(r - 1) = r^{n+1} - 1$ . Quindi se  $r \neq 1$

$$S_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

La successione  $S_n$  convergerà per  $|r| < 1$ , se  $r > 1$  divergerà positivamente, se  $r < -1$  la successione pur essendo illimitata non ha limite, se  $r = 1$   $S_n = n + 1$  e quindi la successione diverge, mentre se  $r = -1$  la successione  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  non ha limite pur essendo limitata. Il limite della successione delle somme parziali è finito se e solo se  $|r| < 1$  e vale

$$\frac{1}{1 - r}.$$

La successione delle somme parziali è detta serie.

## 3. SERIE NUMERICHE

**Definizione 3.1.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione numerica in  $\mathbb{R}$ . Sia  $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  la successione delle somme parziali associata alla successione  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , dove per ogni  $j \in \mathbb{N}$ ,  $S_j = \sum_{i=0}^j a_i$ . La successione  $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  è detta serie.

**Definizione 3.2.** Sia  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una successione numerica in  $\mathbb{R}$  ed  $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  la serie associata. Diremo che la serie è convergente se la successione  $(S_j)_{j \in \mathbb{N}}$  è convergente. Tale limite reale è detto somma della serie ed è indicato con il simbolo

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

Diremo che la serie è positivamente divergente se  $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = +\infty$ . La serie è negativamente divergente se  $\lim_{j \rightarrow \infty} S_j = -\infty$ . Definiremo infine irregolare o oscillante la serie che non rientra nei casi precedenti.

Per quanto riguarda le notazioni utilizzeremo il simbolo con il quale indichiamo la somma della serie per indicare la serie stessa, cioè la successione delle somme parziali, anche quando questa non è convergente.

Osserviamo inoltre che la convergenza di una serie non dipende dall'aver eliminato un numero finito di termini della serie medesima. Infatti se  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  è convergente ciò significa che esiste ed è un numero reale il seguente limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^n a_i.$$

Pertanto supponendo di eliminare i primi  $k$  termini della serie ci ritroveremmo con la seguente successione di somme parziali

$$\sum_{i=k}^n a_i.$$

D'altra parte

$$\sum_{i=k}^n a_i = \sum_{i=0}^n a_i - \left( \sum_{i=0}^{k-1} a_i \right)$$

e quindi il membro di sinistra ha limite, per  $n \rightarrow \infty$ , se e solo se ha limite il primo addendo del membro di destra.

**Lemma 3.1.** *Siano  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  due serie numeriche in  $\mathbb{R}$ . Se  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$ ,  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  sono entrambe convergenti, allora*

i) *la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)$  è convergente e*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i;$$

ii) *per ogni  $c \in \mathbb{R}$*

$$\sum_{i=0}^{\infty} (ca_i) = c \sum_{i=0}^{\infty} a_i.$$

**Teorema 3.1.** *(Criterio di Cauchy) Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie numerica in  $\mathbb{R}$ . Condizione necessaria e sufficiente affinché la serie data sia convergente è che sia verificata la seguente condizione:*

$$\text{per ogni } \epsilon > 0, \text{ esiste } k(\epsilon) \in \mathcal{N} : \left| \sum_{i=n}^m a_i \right| < \epsilon, \text{ per ogni } m, n \in \mathcal{N}, k(\epsilon) < n \leq m.$$

Quale corollario otteniamo la seguente condizione necessaria per la convergenza di una serie numerica.

**Lemma 3.2.** *(Condizione necessaria per la convergenza di una serie)*

*Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie numerica in  $\mathbb{R}$ . Se tale serie è convergente, allora*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

## 4. SERIE A TERMINI NON NEGATIVI

**Definizione 4.1.** Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie a termini reali. Diremo che  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  è una serie a termini non negativi se per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \geq 0$ .

**Teorema 4.1.** Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie a termini non negativi. Se la serie data non è divergente, allora è convergente.

La dimostrazione di questo risultato è una conseguenza del Teorema d'esistenza del limite per le successioni monotone. Infatti la successione delle somme parziali è monotona crescente in quanto per ogni  $n \in \mathbb{N}$

$$S_{n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} a_i = S_n + a_{n+1} \geq S_n,$$

essendo  $a_{n+1} \geq 0$  per ipotesi.

Pertanto, ricordando il Teorema d'esistenza del limite per le successioni monotone, esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

Se la successione è limitata (superiormente) allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{i=0}^{\infty} a_i = \sup_N S_n \in \mathbb{R}.$$

In alternativa, nel caso in cui la successione delle somme parziali non sia superiormente limitata, tale successione è positivamente divergente.

Per mettere in evidenza che esistono anche serie irregolari, consideriamo la seguente serie a termini di segno alterno  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ . Scriviamo i primi termini della successione delle somme parziali.  $S_1 = -1$ ,  $S_2 = 0$ ,  $S_3 = -1$ ,  $S_4 = 0$ , procedendo per induzione si ha che  $S_{2k} = 0$  e  $S_{2k+1} = -1$ . Quindi non potrà esistere il limite della successione  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Cioè la serie è irregolare

**Teorema 4.2.** Siano  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  e  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  due serie a termini non negativi. Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \leq b_n$ , allora

- i) se la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  è convergente, allora anche la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  è convergente.
- ii) se la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  è positivamente divergente, allora anche la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  è positivamente divergente.

La prova di questo risultato può essere data nel modo seguente. Indichiamo con  $S_n$  e  $P_n$  rispettivamente le sommatorie parziali delle serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  e  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ . Per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$S_n = \sum_{i=0}^n a_i \leq \sum_{i=0}^n b_i.$$

Esaminiamo il primo caso. Se la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  è convergente, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = \sup_n P_n \in \mathbb{R}$ . Pertanto

$$S_n \leq \sup_n P_n.$$

D'altra parte  $S_n$  è monotona non decrescente e limitata, quindi esiste  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  reale. Se  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  è positivamente divergente, allora  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$  e dal Teorema del confronto per le successioni segue che anche  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = +\infty$ .

**Lemma 4.1.** (Criterio di convergenza integrale) Sia  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  una serie a termini non negativi. Sia  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua non negativa e monotona decrescente.

- 1) Se per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \leq f(i)$  e  $f$  è integrabile in senso generalizzato su  $\mathbb{R}^+$ , allora la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  è convergente.
- 2) Se per ogni  $i \in \mathbb{N}$ ,  $a_i \geq f(i)$  e  $f$  non è integrabile in senso generalizzato, allora anche la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  non è convergente.

### Applicazioni

Determinare il carattere delle seguenti serie numeriche al variare di  $\alpha \in \mathbb{R}$   $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  (serie armonica generalizzata di esponente  $\alpha$ ). Se  $\alpha \leq 0$ , allora la serie è divergente perché  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\alpha} > 0$ . Esaminiamo i casi in cui  $\alpha > 0$ . Applichiamo il criterio di convergenza integrale. La funzione  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  soddisfa le ipotesi al punto 1) del criterio di convergenza integrale. Quindi  $\alpha > 1$  la serie è convergente. Nel caso in cui  $\alpha \in ]0, 1]$ , allora la funzione  $f : [1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^\alpha}$  soddisfa le condizioni del punto 2) e pertanto in questo caso la serie diverge. Infatti  $f$  in questo caso non è integrabile in s.g.

Ipotesi precedenti possono essere estesi ai casi in cui  $a_n \leq b_n$  per ogni  $n \geq k$  con  $k \in \mathbb{N}$ . Infatti il carattere della serie, vale a dire il fatto che converga, diverga o, nel caso delle serie numeriche a termini qualunque, sia irregolare, non dipende dal trascurare un numero finito di termini.

### Esempio

La serie  $\sum_{i=1}^{\infty} \sin \frac{10^6}{n^2}$  è convergente, perché il segno dei primi  $10^3$  termini non è sempre positivo. Tuttavia, se  $n^2 > 10^6$ , allora  $\sin \frac{10^6}{n^2} > 0$ . D'altra parte è noto che  $\sin x \leq x$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^+$ , quindi dal criterio del confronto segue che  $\sum_{i=10^3}^{\infty} \sin \frac{10^6}{n^2}$  è convergente perché converge la serie armonica generalizzata  $\sum_{i=10^3}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ . I primi  $10^3$  elementi concorrono esclusivamente a determinare la somma della serie e non il suo carattere, in questo caso, convergente.

**Lemma 4.2.** (Criterio della radice  $n$ -esima) Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie a termini non negativi.

- 1) Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt[n]{a_n} \leq l < 1$ , allora la serie è convergente.
- 2) Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sqrt[n]{a_n} \geq l \geq 1$ , allora la serie è divergente.
- 3) Se esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = q \in \bar{\mathbb{R}}$$

e  $q < 1$ , allora la serie è convergente. Mentre se  $q > 1$  la serie è divergente.

**Lemma 4.3.** (Criterio del rapporto) Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie a termini positivi.

- 1) Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l < 1$ , allora la serie è convergente.
- 2) Se per ogni  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq l \geq 1$ , allora la serie è divergente.
- 3) Se esiste

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \bar{\mathbb{R}}$$

e  $q < 1$ , allora la serie è convergente. Mentre se  $q > 1$  la serie è divergente.

**Lemma 4.4.** (Criterio del confronto asintototico) Siano  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  e  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$  due serie a termini non negativi. Supponiamo che  $a_n \sim b_n$ , per  $n \rightarrow \infty$ . Allora

- 1) la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  converge se e solo se converge la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ .
- 2) la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  diverge se e solo se diverge la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} b_i$ .

## 5. SERIE NUMERICHE A TERMINI QUALUNQUE

**Definizione 5.1.** (Convergenza assoluta) Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie a termini reali. Se la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$  è convergente, allora diremo che la serie  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  è assolutamente convergente.

**Lemma 5.1.** Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$  una serie a termini reali. Se la serie data è assolutamente convergente allora la serie è anche convergente.

Sottolineiamo che il viceversa è falso

**Lemma 5.2.** (Criterio di Leibnitz) Sia  $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i a_i$  una serie a termini reali. Se  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  è non negativa e monotona decrescente con  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ , allora la serie è convergente.

Esempio  $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$  non è assolutamente convergente, ma è (semplicemente) convergente per il criterio di Leibnitz.

## 6. ESERCIZI SVOLTI

### ESERCIZIO 1

Sia  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  una serie a termini reali positivi. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

- a) se  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente, allora la successione  $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  è decrescente
- b) se  $a_n \rightarrow 0$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente
- c) se  $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ , per  $n \rightarrow +\infty$ , allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente
- d) se

$$\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n \leq 3,$$

allora la serie  $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$  è convergente.

Svolgimento

La risposta a) è da scartare, perché la serie  $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$  così definita:

$$a_i = \begin{cases} \frac{1}{i^2}, & \text{se } i \text{ è pari} \\ \left(\frac{1}{2^i}\right), & \text{se } i \text{ è dispari,} \end{cases}$$

converge ma  $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$  non è decrescente.

La risposta b) è da scartare, perché la serie armonica costituisce un controesempio.

La risposta c) è da scartare, perché

$$\frac{1}{n \log n} = o\left(\frac{1}{n}\right),$$

per  $n \rightarrow \text{infy}$ , ma la serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n},$$

non è convergente, si pensi alla non convergenza della funzione  $\frac{1}{x \log x}$  su  $[2, \infty[$ .

La risposta esatta è d), infatti se

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 a_n \leq 3,$$

allora esiste  $\bar{n} \in \mathbb{N}$  tale che per ogni  $n > \bar{n}$

$$a_n \leq \frac{4}{n^2}.$$

Pertanto, ricordando il criterio del confronto la serie

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i$$

è convergente.

### ESERCIZIO 2

**Facoltativo** Il candidato svolga il seguente esercizio in dettaglio in un foglio allegato. Determinare gli  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$ , per cui la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^\beta}\right) \log^\alpha(n^2 + 1)$$

è convergente.

Svolgere l'esercizio. La correzione verrà fornita la prossima settimana.