SOLUZIONI DEGLI INTEGRALI

1. $\int_1^2 (x^2+x+1)\log(3x)\ dx$

   Integrando per parti, si ha:

$$\int_1^2 \left(x^2+x+1\right)\log(3x)\ dx = \left[\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x\right)\log(3x)\right]_1^2 -$$

$$-\int_1^2 \frac{\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x}{x}\ dx =$$

$$= \left(\frac{8}{3}+2+2\right)\log 6 - \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1\right)\log 3 - \int_1^2 \left(\frac{x^2}{3}+\frac{x}{2}+1\right)\ dx =$$

$$= \frac{20}{3}\log 6 - \frac{11}{6}\log 3 - \left[\frac{x^3}{9}+\frac{x^2}{4}+x\right]_1^2 =$$

$$= \frac{20}{3}\log 6 - \frac{11}{6}\log 3 - \left(\frac{8}{9}+1+2-\frac{1}{9}-\frac{1}{4}-1\right) =$$

$$= \frac{20}{3}\log 6 - \frac{11}{6}\log 3 - \frac{91}{36}.$$

2. $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\ dx$

   Poiché $D(4-x^2) = -2x$, si ha:

$$x\sqrt{4-x^2} = -\frac{1}{2}D\left(4-x^2\right)\sqrt{4-x^2};$$

   pertanto, una primitiva della funzione integranda sarà $-\frac{1}{2}\frac{2}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}$ (si noti che tale funzione è derivabile in tutto $[2,3]$); ne consegue che

$$\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\ dx = \left[-\frac{1}{3}\left(4-x^2\right)^{\frac{2}{3}}\right]_0^2 = \frac{1}{3}4^{\frac{2}{3}}.$$

3. $\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\ dx$,

   Effettuando il cambiamento di variabili $x = g(t) = 3\text{sen}t$, $|t| \leq \frac{\pi}{2}$, poiché, nell'intervallo indicato, $\text{sen}t = 0$, se, e solo se, $t = 0$, e $\text{sen}t = 2$, se, e solo se, $t = \text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)$, si ottiene, tenendo presente che, in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{1-\text{sen}^2 t} = \cos t$:

$$\int_0^2 \sqrt{9-x^2}\ dx = \int_0^{\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)} \sqrt{9-9\text{sen}^2 t}\ 3\cos t\ dt =$$

$$= 9\int_0^{\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)} \cos^2 t\ dt.$$

Poiché, per le formule di bisezione, $\cos^2 t = \frac{1+\cos t}{2}$, l'integrale in esame diventa uguale a

$$9\int_0^{\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)} \frac{1+\cos(2t)}{2}\ dt = \frac{9}{2}\left[t + \frac{1}{2}\ \text{sen}(2t)\right]_0^{\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right)} =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2}\ \text{sen}\left(2\text{arcsen}\frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) + \text{sen}\left(\text{arcsen}\frac{2}{3}\right)\ \cos\left(\text{arcsen}\frac{2}{3}\right)\right) =$$

$$= \frac{9}{2}\left(\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2}{3}\ \sqrt{1-\frac{4}{9}}\right) = \frac{9}{2}\left(\text{arcsen}\left(\frac{2}{3}\right) + \frac{2\sqrt{5}}{9}\right).$$

Qui abbiamo utilizzato le formule di duplicazione per il seno e abbiamo tenuto conto che $\text{arcsen}\frac{2}{3} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, per cui

$$\cos\left(\text{arcsen}\frac{2}{3}\right) = \sqrt{1-\text{sen}^2\left(\text{arcsen}\frac{2}{3}\right)}.$$

4. $\int_0^1 x\text{arctg}x\ dx$.

   Poiché $D\text{arctg}x = \frac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in [0,1]$, integriamo per parti; si ha:

$$\int_0^1 x\text{arctg}x\ dx = \left[\frac{x^2}{2}\text{arctg}x\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2}\ dx =$$

$$= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)\ dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\text{arctg}x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

5. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\text{sen}^2 x}\text{sen}x \cos x \; dx$

Poiché possiamo scrivere la funzione integranda come $v\,(\text{sen}x)\,D\text{sen}x$, dove $v(t) = te^{t^2}$, è opportuno effettuare il cambiamento di variabile $t = g(x) = \text{sen}x$. Allora, poiché $\text{sen}0 = 0$, $\text{sen}\frac{\pi}{2} = 1$, si ha:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\text{sen}^2 x}\text{sen}x \cos x \; dx = \int_0^1 te^{t^2} \; dt;$$

poiché $De^{t^2} = 2te^{t^2}$, $\forall t \in \mathbf{R}$, l'ultimo integrale scritto è uguale a

$$= \left[\frac{1}{2}e^{t^2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e-1).$$

6. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{sen}^2 x}\text{sen}^3 x \cos x \; dx$

Poiché possiamo scrivere la funzione integranda come $w\,(\text{sen}x)\,D\text{sen}x$, dove $w(t) = t^3 e^{t^2}$, procedendo in modo analogo all'esercizio precedente, effettuiamo il cambiamento di variabile $t = g(x) = \text{sen}x$. Allora, poiché $\text{sen}(-\pi) = 0$, $\text{sen}\pi = 0$, si ha:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{\text{sen}^2 x}\text{sen}^3 x \cos x \; dx = \int_0^0 t^3 e^{t^2} \; dt = 0.$$

7. $\displaystyle\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} \log\left(1-x^2\right) \; dx$

Integrando per parti, si ha:

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2} \log\left(1-x^2\right) \; dx = \left[-\frac{1}{x}\log\left(1-x^2\right)\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{2x}{x\,(1-x^2)} \; dx =$$

$$= 4\log\left(\frac{15}{16}\right) - 2\log\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left[\text{setttgh}x\right]_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= 4\log\left(\frac{15}{16}\right) - 2\log\left(\frac{3}{4}\right) - 2\text{setttgh}\left(\frac{1}{2}\right) + 2\text{setttgh}\left(\frac{1}{4}\right).$$

8. $\int_2^4 \frac{1}{1-x^2} \; dx$

Si noti che la funzione settortangente iperbolica è definita solo nell'intervallo $(-1,1)$; pertanto, anche se, per $x \in (-1,1)$, la sua derivata è $\frac{1}{1-x^2}$, la settortangente iperbolica non è una primitiva della funzione integranda.
Si può procedere in due modi.

(a) Si definisce la funzione cotangente iperbolica

$$\text{cotgh} : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}, \qquad \text{cotgh}x = \frac{\cosh x}{\text{senh}x},$$

si riconosce che è una funzione iniettiva che ha per immagine $(-\infty, -1) \cup \cup (1, +\infty)$, si definisce la funzione inversa

$$\text{settcotgh} : (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \to \mathbf{R}, \text{settcotgh} = \text{cotgh}^{-1},$$

e si verifica che $D\text{settcotgh}x = \frac{1}{1-x^2}$, $\forall x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$. Allora,

$$\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\, dx = [\text{settcotgh}x]_2^4 = \text{settcotgh}4 - \text{settcotgh}2.$$

(b) Si osserva che, $\forall x \in \mathbf{R} \setminus \{-1, 1\}$,

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)$$

e quindi

$$\int_2^4 \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x}\right)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\log(x-1) + \log(x+1)\right]_2^4 = \frac{1}{2}\left(-\log 3 + \log 5 - \log 3\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\log 5 - \log 3.$$

Si noti che i risultati ottenuti sono uguali. Infatti, posto $\text{cotgh}x = y$, si ha:

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e{-x}}\ ,$$

$$e^x + e^{-x} = y\left(e^x - e^{-x}\right)\ ,$$

$$e^{2x}\,(y-1) = 1 + y\ ,$$

$$e^{2x} = \frac{1+y}{y-1}\ ,$$

da cui si ricava

$$x = \text{settcotgh} y = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+y}{y-1} \right).$$

Ne consegue che

$$\text{settcotgh}4 - \text{settcotgh}2 = \frac{1}{2} \left(\log \left(\frac{5}{3} \right) - \log 3 \right) = \frac{1}{2} \log 5 - \log 3.$$

9. $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx,$

   Osserviamo che la funzione integranda è pari e che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto allo 0. Allora

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx = 2 \int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx =$$

$$= 2 \left[\text{setttgh} x \right]_0^{\frac{1}{2}} = 2\text{setttgh} \left(\frac{1}{2} \right).$$

10. $\int_0^1 x e^{\sqrt{x}}\, dx$

    Ponendo, $x = g(t) = t^2$, si ottiene:

$$\int_0^1 x e^{\sqrt{x}}\, dx = 2 \int_0^1 t^3 e^t\, dt.$$

   Integrando ripetutamente per parti, l'ultimo integrale scritto diventa uguale a

$$2 \left(\left[t^3 e^t \right]_0^1 - 3 \int_0^1 t^2 e^t\, dt \right) =$$

$$= 2e - 6 \left(\left[t^2 e^t \right]_0^1 - 2 \int_0^1 t e^t\, dt \right) =$$

$$= 2e - 6e + 12 \left(\left[t e^t \right]_0^1 - \int_0^1 e^t\, dt \right) =$$

$$= -4e + 12e - 12 \left[e^t \right]_0^1 = 8e - 12(e-1) = 12 - 4e.$$

11. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}x)\cos x\ dx$

Ponendo $t = g(x) = \operatorname{sen}x$, poiché $\operatorname{sen}0 = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, otteniamo:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}x)\cos x\ dx = \int_0^1 \operatorname{arctg}t\ dt;$$

integrando per parti, l'ultimo integrale scritto diventa uguale a

$$[t\operatorname{arctg}t]_0^1 - \int_0^1 \frac{t}{t^2+1}\ dt = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2t}{t^2+1}\ dt =$$
$$= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\left[\log\left(t^2+1\right)\right]_0^1 == \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2.$$

12. $\int_1^5 \log^3(3x+1)\ dx$

Integrando per parti, l'integrale diventa:

$$\frac{1}{3}\int_1^5 3\log^3(3x+1)\ dx =$$
$$= \frac{1}{3}\left(\left[(3x+1)\log^3(3x+1)\right]_1^5 - \int_1^5 9(3x+1)\frac{\log^2(3x+1)}{3x+1}\ dx\right) =$$
$$= \frac{1}{3}\left(16\log^3 16 - 4\log^3 4 - 9\int_1^5 \log^2(3x+1)\ dx\right) =$$
$$= \frac{16}{3}\log^3 16 - \frac{4}{3}\log^3 4 - \int_1^5 3\log^2(3x+1)\ dx =$$
$$= \frac{16}{3}\log^3 16 - \frac{4}{3}\log^3 4 - \left[(3x+1)\log^2(3x+1)\right]_1^5 +$$
$$+6\int_1^5 (3x+1)\frac{\log(3x+1)}{3x+1}\ dx =$$
$$= \frac{16}{3}\log^3 16 - \frac{4}{3}\log^3 4 - 16\log^2 16 + 4\log^2 4 + 6\int_1^5 \log(3x+1)\ dx =$$
$$= \frac{16}{3}\log^3 16 - \frac{4}{3}\log^3 4 - 16\log^2 16 + 4\log^2 4 + 2\int_1^5 3\log(3x+1)\ dx =$$
$$= \frac{16}{3}\log^3 16 - \frac{4}{3}\log^3 4 - 16\log^2 16 + 4\log^2 4 +$$
$$+2\left[(3x+1)\log(3x+1)\right]_1^5 - 6\int_1^5 \frac{3x+1}{3x+1}\ dx =$$
$$= \frac{16}{3}\log^3 16 - \frac{4}{3}\log^3 4 - 16\log^2 16 + 4\log^2 4 + 32\log 16 - 8\log 4 - 24.$$

13. $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{4-x^4}\ dx$

Ponendo $t = g(x) = x^2$, otteniamo:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\sqrt{4-x^4}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{4-t^2}\ dt;$$

effettuando ora il cambiamento di variabile $t = h(s) = 2\text{sen}s$, $|s| \leq \frac{\pi}{2}$, poiché in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ si ha $\text{sen}s = 0$, solo se $s = 0$ e $\text{sen}s = \frac{1}{2}$ solo se $s = \frac{\pi}{6}$ e poiché, nell'intervallo citato, $\cos s = \sqrt{1 - \text{sen}^2 s}$, l'ultimo integrale scritto diventa:

$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\cos^2 s\ ds.$$

Ragionando come nella soluzione dell'Esercizio 3, si ottiene infine che l'integrale proposto è uguale a

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (1+\cos(2t))\ dt = \frac{\pi}{6} + \left[\frac{1}{2}\text{sen}(2t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

14. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(2x)}{5\text{sen}(2x) + \text{sen}^2(2x)}\ dx$

Ponendo $t = g(x) = \text{sen}(2x)$, si ha:

$$\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3(2x)}{5\text{sen}(2x) + \text{sen}^2(2x)}\ dx = \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\cos(2x)\left(1-\text{sen}^2(2x)\right)}{5\text{sen}(2x) + \text{sen}^2(2x)}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{1-t^2}{5t+t^2}\ dt.$$

Effettuando la divisione

$$\frac{1-t^2}{5t+t^2} = -1 + \frac{5t+1}{t^2+5t},$$

l'ultimo integrale scritto risulta uguale a

$$= \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \left(-1 + \frac{5t+1}{t^2+5t}\right)\ dt = -\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1} \frac{5t+1}{t^2+5t}\ dt.$$

Cerchiamo $A, B \in \mathbf{R}$, tali che

$$\frac{5t+1}{t(t+5)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+5}.$$

Deve essere
$$5t+1=A(t+5)+Bt,$$
onde
$$\begin{cases} A+B=5 & , \\ 5A=1 & , \end{cases}$$
cioè $A=\frac{1}{5}$, $B=\frac{24}{5}$. Ne consegue che l'integrale proposto è uguale a
$$-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\left(\frac{1}{5t}+\frac{24}{5}\frac{1}{t+5}\right)\,dt=$$
$$=-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\log t+\frac{24}{5}\log(t+5)\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}.$$

15. $\displaystyle\int_0^7 \text{arctg}\left(\frac{4}{x+7}\right)\,dx$

Integrando per parti, otteniamo:
$$\int_0^7 \text{arctg}\left(\frac{4}{x+7}\right)\,dx=\left[(x+7)\text{arctg}\left(\frac{4}{x+7}\right)\right]_0^7-$$
$$-\int_0^7 4\frac{x+7}{1+\frac{16}{(x+7)^2}}\left(-\frac{4}{(x+7)^2}\right)\,dx=$$
$$=14\text{arctg}\left(\frac{2}{7}\right)-7\text{arctg}\left(\frac{4}{7}\right)+8\int_0^7\frac{2(x+7)}{16+(x+7)^2}\,dx=$$
$$=14\text{arctg}\left(\frac{2}{7}\right)-7\text{arctg}\left(\frac{4}{7}\right)+8\left[\log\left(16+(x+7)^2\right)\right]_0^7=$$
$$=14\text{arctg}\left(\frac{2}{7}\right)-7\text{arctg}\left(\frac{4}{7}\right)+8\left(\log 212-\log 65\right).$$

16. $\int_0^1\left(3x+\sqrt{4-x^2}\right)\,dx$

Si ha:
$$\int_0^1\left(3x+\sqrt{4-x^2}\right)\,dx=\left[6x^2\right]_0^1+\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx;$$
ponendo $x=g(t)=2\text{sen}t$, $t\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, si ottiene :
$$6+2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{4-4\text{sen}^2 t}\,\cos t dt=6+4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$= 6 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos(2t))\ dt = 6 + \pi + [\operatorname{sen}(2t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = 6 + \pi.$$