26-11-2002

ESERCITAZIONE (CORREZIONE DEI COMPITI DEGLI ANNI PRECEDENTI DEI CORSI DEL PROF. OBRECHT).

FAUSTO FERRARI

1. Il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3(5x)-\cosh^3(5x)}{\log^2(2x+1)}$$
(a) è uguale a $-\frac{75}{4}$;
(b) è uguale a $-\infty$;
(c) è uguale a $-\frac{25}{4}$;
(d) non esiste perché il limite da destra è diverso dal limite da sinistra.

Poiché
$$\cos^3(5x)-\cosh^3(5x)=(\cos(5x)-\cosh(5x))(\cos^2(5x)+\cos(5x)\cosh(5x)+\cosh^2(5x)),$$
dobbiamo valutare $\cos(5x)-\cosh(5x)$ per $x\to 0$.
$$\cos(5x)-\cosh(5x)=1-\frac{(5x)^2}{2}+o(x^3)-(1+\frac{(5x)^2}{2}+o(x^3)),\ x\to 0,$$
Pertanto a numeratore abbiamo
$$\cos^3(5x)-\cosh^3(5x)=(\cos^2(5x)+\cos(5x)\cosh(5x)+\cosh^2(5x))(-50x^2+o(x^2)),\ x\to 0.$$
D'altra parte
$$\log(2x+1)=2x+o(x),\ x\to 0,$$
quindi per quanto riguarda il denominatore
$$\log^2(2x+1)=(2x+o(x))^2=4x^2+o(x^2),\ x\to 0.$$
Finalmente
$$\frac{\cos^3(5x)-\cosh^3(5x)}{\log^2(2x+1)}=\frac{(\cos^2(5x)+\cos(5x)\cosh(5x)+\cosh^2(5x))(-50x^2+o(x^2))}{4x^2+o(x^2)},\ x\to 0,$$
da cui segue
$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^3(5x)-\cosh^3(5x)}{\log^2(2x+1)}=-\frac{75}{4}.$$

2. Determinare i punti di massimo e di minimo locale della funzione
$$f(x)=|x+5|\,e^{\frac{x}{x-2}}\ ,$$
definita nel suo dominio naturale.

La funzione $f\in C(\mathbb{R}\setminus\{2\})\cap C^1(\mathbb{R}\setminus\{2,-5\})$. Calcoliamo la derivata prima di f in tali punti.
$$\begin{aligned}f'(x) &= \operatorname{sgn}(x+5)\exp(\frac{x}{x-2})+|\,x+5\,|\,\frac{-2}{(x-2)^2}\exp(\frac{x}{x-2})\\ &= \operatorname{sgn}(x+5)\exp(\frac{x}{x-2})(1-\frac{2}{(x-2)^2})=\operatorname{sgn}(x+5)\exp(\frac{x}{x-2})\frac{x^2-6x-6}{(x-2)^2}.\end{aligned}$$

Pertanto studiamo la positività della derivata prima di f risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -5\}, \end{cases}$$

ovvero del sistema equivalente

$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(x+5)\frac{x^2-6x-6}{(x-2)^2} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{2, -5\}. \end{cases}$$

Il primo fattore è positivo per $x > -5$ e negativo per $x < -5$, mentre il secondo fattore è positivo per $x \in (-\infty, 3-\sqrt{15}) \cup (3+\sqrt{15}, +\infty)$ e negativo per $x \in (3-\sqrt{15}, 3+\sqrt{15})$, pertanto il precedente sistema è soddisfatto per $x \in (-5, 3-\sqrt{15}) \cup (3+\sqrt{15}, +\infty)$.

Si evince che
f è monotona strettamente crescente in $x \in [-5, 3-\sqrt{15}]$,
f è monotona strettamente crescente in $x \in [3+\sqrt{15}, +\infty)$,
f è monotona strettamente decrescente in $x \in (-\infty, -5]$,
f è monotona strettamente decrescente in $x \in [3-\sqrt{15}, 2)$,
f è monotona strettamente decrescente in $x \in (2, 3+\sqrt{15}]$.

Pertanto -5 è un punto di minimo assoluto, $3+\sqrt{15}$ è un punto di minimo locale, mentre $3-\sqrt{15}$ è un punto di massimo locale.

3. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{4x^2} - \cos\left(2\sqrt{2}x\right)}{\log\left(7x^2+1\right)}$$

è uguale a
(a) $+\infty$
(b) $\frac{8}{7}$
(c) $\frac{4}{7}$
(d) 0

Ricordiamo che

$$\exp(4x^2) = 1 + 4x^2 + o(x^2), \ \ x \to 0,$$

$$\cos(2\sqrt{2}x) = 1 - 4x^2 + o(x^3), \ \ x \to 0$$

e

$$\log(7x^2+1) = 7x^2 + o(x^2), \ \ x \to 0.$$

Pertanto

$$\frac{\exp(4x^2) - \cos(2\sqrt{2}x)}{\log(7x^2+1)} = \frac{1 + 4x^2 + o(x^2) - (1 - 4x^2 + o(x^3))}{7x^2 + o(x^2)}, \ \ x \to 0,$$

cioè

$$\frac{\exp(4x^2) - \cos(2\sqrt{2}x)}{\log(7x^2+1)} = \frac{8x^2 + o(x^2)}{7x^2 + o(x^2)}, \ \ x \to 0.$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(4x^2) - \cos(2\sqrt{2}x)}{\log(7x^2+1)} = \frac{8}{7}.$$

4. Calcolare il gradiente nel punto $(2, 0, 1)$ della funzione

$$v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad v(x,y,z) = \frac{x\operatorname{sen}(6z)}{y^{18}+1}$$

$$\nabla v(x,y,z) = (\frac{\sin(6z)}{y^{18}+1}, \frac{-18y^{17}\sin(6z)}{(y^{18}+1)^2}, \frac{6x\cos(6z)}{y^{18}+1}).$$

Quindi

$$\nabla v(2,0,1) = (\sin 6, 0, 12\cos 1).$$

5. Sia $h : [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}] \to \mathbb{R}$, $h(x) = \operatorname{sen}(7x) + 3x$. In quali intervalli la funzione h è decrescente?
   La funzione $h \in C^\infty([-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}])$. Quindi

$$h'(x) = 7\cos(7x) + 3.$$

Pertanto dobbiamo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} h'(x) > 0 \\ x \in [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}], \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} 7\cos(7x) + 3 > 0 \\ x \in [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}], \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \cos(7x) > -\frac{3}{7} \\ x \in [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}], \end{cases}$$

finalmente

$$\begin{cases} 2k\pi - \arccos(-\frac{3}{7}) < 7x < \arccos(-\frac{3}{7}) + 2k\pi, \ \ k \in Z \\ x \in [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}], \end{cases}$$

da cui segue

$$\begin{cases} \frac{2k\pi}{7} - \frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7} < x < \frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7} + \frac{2k\pi}{7}, \ \ k \in Z \\ x \in [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}]. \end{cases}$$

Notiamo che $-\arccos(-\frac{3}{7}) < -\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{7}$ e, se $x \neq 0$, $\frac{\pi}{7} < \frac{\pi}{2} < \arccos(-\frac{3}{7})$, quindi se $k \neq 0$ $(\frac{2k\pi}{7} - \frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}, \frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7} + \frac{2k\pi}{7}) \cap [-\frac{\pi}{7}, \frac{\pi}{7}] = \emptyset$ Pertanto il precedente sistema ha soluzioni per valori di x in

$$(-\frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}, \frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}).$$

Ne consegue che
   h è monotona strettamente crescente in $[-\frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}, \frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}]$,
   h è monotona strettamente decrescente in $[-\frac{\pi}{7}, -\frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}]$,
   h è monotona strettamente decrescente in $[\frac{\arccos(-\frac{3}{7})}{7}, \frac{\pi}{7}]$.
   Notiamo che l'esercizio poteva essere risolto anche riconducendosi all'intervallo $[0, \frac{\pi}{7}]$, perché h è dispari.

6. **Facoltativo** Il candidato svolga il seguente esercizio in dettaglio in un foglio allegato.
   Sia $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $k(x) = e^{-2|x|}\left(x - \frac{2}{3}\right)$. Determinare:
   (a) gli estremanti relativi di k;
   (b) gli intervalli in cui k è concava.
   La funzione $k \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e

$$\begin{aligned} k'(x) &= -2\operatorname{sgn}(x)\exp(-2 \mid x \mid)(x - \frac{2}{3}) + \exp(-2 \mid x \mid) \\ &= \exp(-2 \mid x \mid)(-2 \mid x \mid + \frac{4}{3}\operatorname{sgn} x + 1). \end{aligned}$$

Risolviamo allora il seguente sistema

$$\begin{cases} k'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Tale sistema è equivalente al seguente

$$\begin{cases} -2 \mid x \mid +\frac{4}{3}\mathrm{sgn} x + 1 > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi

$$\begin{cases} -2x + \frac{7}{3} > 0 \\ x > 0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 2x - \frac{1}{3} > 0 \\ x < 0, \end{cases}$$

Pertanto k' è positiva nel suo dominio di definizione per $x \in (0, \frac{7}{6})$. Se ne deduce che
k è monotona strettamente crescente in $(0, \frac{7}{6})$,
k è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$,
k è monotona strettamente decrescente in $(\frac{7}{6}, +\infty)$.

Pertanto si riconosce che 0 è un punto di minimo assoluto k, mentre $\frac{7}{6}$ è punto di massimo assoluto per k. Non esistono altri punti estremanti locali.

Per quanto riguarda gli intervalli di convessità, calcoliamo la derivata seconda

$$\begin{aligned} k''(x) &= -2\mathrm{sgn}(x)\exp(-2 \mid x \mid)(-2 \mid x \mid +\frac{4}{3}\mathrm{sgn}(x) + 1) - 2\mathrm{sgn}(x)\exp(-2 \mid x \mid) \\ &= 2\mathrm{sgn}(x)\exp(-2 \mid x \mid)(2 \mid x \mid -\frac{4}{3}\mathrm{sgn}(x) - 2). \end{aligned}$$

Risolviamo poi il seguente sistema

$$\begin{cases} k''(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

ovvero, equivalentemente,

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x)(2 \mid x \mid -\frac{4}{3}\mathrm{sgn}(x) - 2) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi

$$\begin{cases} x - \frac{5}{3} > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x + \frac{1}{3} > 0 \\ x < 0. \end{cases}$$

Pertanto k'' è positiva nel suo dominio di definizione per $x \in (-\frac{1}{3}, 0) \cup (\frac{5}{3}, +\infty)$. Se ne deduce che:
k è convessa in $x \in [-\frac{1}{3}, 0]$,
k è convessa in $x \in [\frac{5}{3}, +\infty)$,
mentre k è concava in $x \in (-\infty, -\frac{1}{3}]$,
k è concava in $x \in (0, \frac{5}{3})$.

7. Sia $v : (\mathbb{R}^+)^2 \to \mathbb{R}$, $v(x,y) = x^{4y} + x^3y^2$. Calcolare $\nabla v(1,2)$.

$$\nabla v(x,y) = (4yx^{4y-1} + x^3y^2, 4(\log x)x^{4y} + 2x^3y),$$

pertanto

$$\nabla v(1,2) = (10,4).$$

8. Il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(4x) - \operatorname{senh}(4x)}{3x - \tan(3x)}$$

è uguale a:
(a) $\frac{32}{27}$;
(b) $-\frac{64}{27}$;
(c) $\frac{64}{27}$;
(d) 0.

Poiché

$$\sin(4x) = 4x - \frac{32}{3}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0,$$

mentre

$$\sinh(4x) = 4x + \frac{32}{3}x^3 + o(x^4), \quad x \to 0$$

e

$$\tan(3x) = 3x + \frac{27}{2}x^3 + o(x^3), \quad x \to 0.$$

Otteniamo allora che

$$\frac{\sin(4x) - \sinh(4x)}{3x - \tan(3x)} = \frac{4x - \frac{32}{3}x^3 + o(x^4) - (4x + \frac{32}{3}x^3 + o(x^4))}{3x - (3x + 9x^3 + o(x^3))} = \frac{-\frac{64}{3}x^3 + o(x^3)}{-9x^3 + o(x^3)}, \quad x \to 0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(4x) - \sinh(4x)}{3x - \tan(3x)} = \frac{64}{27}.$$

9. **Facoltativo.** Il candidato svolga il seguente esercizio in dettaglio in un foglio allegato. Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \log\left(x^2 + x + 1\right) - \frac{1}{2}|x|$. Determinare:
(a) gli estremanti relativi di g;
(b) in quali intervalli g è convessa.

Poiché $g \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$, possiamo procedere allo studio della derivata prima di g. Se $g \neq 0$

$$g'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x).$$

Determiniamo il segno di g' nel suo dominio di definizione risolvendo il seguente sistema:

$$\begin{cases} g'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \end{cases}$$

ovvero, nel nostro caso,

$$\begin{cases} \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{1}{2}\operatorname{sgn}(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Le soluzioni del precedente sistema sono date dall'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} 4x + 2 - \operatorname{sgn}(x)(x^2 + x + 1) > 0 \\ x > 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} 4x+2-\operatorname{sgn}(x)(x^2+x+1)>0 \\ x<0. \end{cases}$$

Il primo si riduce al seguente

$$\begin{cases} -x^2+3x+1>0 \\ x>0, \end{cases}$$

le cui soluzioni sono date dal seguente intervallo $S_1 = (0, \frac{3+\sqrt{13}}{2})$. Il secondo sistema, equivalente a

$$\begin{cases} x^2+5x+3>0 \\ x<0, \end{cases}$$

ha come soluzioni $S_2 = (-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2}) \cup (\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 0)$.

Quindi
g è monotona strettamente crescente in $(-\infty, \frac{-5-\sqrt{13}}{2})$,
g è monotona strettamente crescente in $(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}, 0)$,
g è monotona strettamente crescente in $(0, \frac{3+\sqrt{13}}{2})$.
Mentre,
g è monotona strettamente decrescente in $(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}, \frac{-5+\sqrt{13}}{2})$,
g è monotona strettamente decrescente in $(\frac{3+\sqrt{13}}{2}, \infty)$.

Pertanto:
$\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$ è punto di massimo locale per g,
$\frac{-5+\sqrt{13}}{2}$ è punto di minimo locale per g,
$\frac{3+\sqrt{13}}{2}$è punto di massimo locale per g.

Passiamo ora allo studio del segno della derivata seconda di g:

$$g''(x) = \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}.$$

Pertanto risolveremo il seguente sistema:

$$\begin{cases} g''(x)>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{2(x^2+x+1)-(2x+1)(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}>0. \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Dobbiamo allora risolvere il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} -2x^2-2x+1>0 \\ x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono date da $S = (\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0) \cup (0, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$. Concludiamo pertanto che:
g è convessa in $(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, 0)$,
g è convessa in $(0, \frac{1+\sqrt{3}}{2})$.
Mentre,
g è concava in $(-\infty, \frac{1-\sqrt{3}}{2})$,
g è concava in $(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty)$.

10. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 e^{-4|x+3|}$. Determinare in quali intervalli f è decrescente.

Notiamo che $f \in C(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R} \setminus \{-3\})$. Quindi in $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \exp(-4 \mid x+3 \mid) - 4\mathrm{sgn}(x+3)x^2 \exp(-4 \mid x+3 \mid) \\ &= 2x \exp(-4 \mid x+3 \mid)(1 - 2x\mathrm{sgn}(x+3)). \end{aligned}$$

Per determinare quando f' è positiva occorre risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} f'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}, \end{cases}$$

ovvero,

$$\begin{cases} 2x \exp(-4 \mid x+3 \mid)(1 - 2x\mathrm{sgn}(x+3)) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-3\}. \end{cases}$$

Pertanto le soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni dei due seguenti sistemi:

$$\begin{cases} x(1-2x) > 0 \\ x > -3 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x(1+2x) > 0 \\ x < -3. \end{cases}$$

Le soluzioni sono pertanto date da $S = (-\infty, -3) \cup (0, \frac{1}{2})$.

Finalmente:
f è monotona strettamente crescente in $(-\infty, -3)$,
f è monotona strettamente crescente in $(0, \frac{1}{2})$.
Mentre
f è monotona strettamente decrescente in $(-3, 0)$,
f è monotona strettamente decrescente in $(\frac{1}{2}, +\infty)$.

11. Posto

$$f_1(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}},$$

definita nel suo dominio naturale, determinare in quali intervalli è crescente e in quali è decrescente. Determinare poi i punti di massimo e di minimo relativo di f_1.

Il dominio naturale della funzione f_1 è tutto $\mathbb{R}$, perché il radicando del denominatore è sempre positivo, quindi

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ \ f_1(x) = \frac{(x-1)^2}{\sqrt{4x^2+2x+1}}.$$

Inoltre $f_1 \in C^2(\mathbb{R})$, quindi al fine di determinare gli intervalli di monotonia di f_1, calcoliamo la derivata prima di f_1;

$$f_1'(x) = \frac{4(x-1)(4x^2+2x+1) - (8x+2)(x-1)^2}{2(4x^2+2x+1)^{3/2}}.$$

Quindi risolviamo la seguente disequazione in $\mathbb{R}$:

$$f_1'(x) > 0,$$

ovvero

$$\frac{4(x-1)(4x^2+2x+1) - (8x+2)(x-1)^2}{2(4x^2+2x+1)^{3/2}} > 0,$$

che equivale a risolvere

$$2(x-1)(4x^2+7x+3) > 0.$$

Le soluzioni della precedente disequazione sono date dall'insieme $S = (-1, -\frac{3}{4}) \cup (1, +\infty)$. Quindi:
f_1 è strettamente crescente in $(-1, -\frac{3}{4})$,
f_1 è strettamente crescente in $(1, +\infty)$.
Mentre
f_1 è strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$,
f_1 è strettamente decrescente in $(-\frac{3}{4}, 1)$.

Pertanto -1 è punto di minimo locale per f_1, mentre $-3/4$ è punto di massimo locle per f_1 ed infine 1 è punto di minimo assoluto per f_1.

12. Posto
$$f_2(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{|x^2 - 1|}},$$
definita nel suo dominio naturale, determinare in quali intervalli è convessa e in quali è concava. Determinare poi i punti di massimo e di minimo relativo di f_2.

Il dominio naturale di f_2 è $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$, vengono cioè esclusi gli unici punti in cui si annulla il denominatore di f_2. La nostra funzione è quindi data da
$$f_2 : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R}, \ \ x \mid x^2 - 1 \mid^{-\frac{1}{3}} .$$
D'altra parte $f_2 \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$, quindi
$$f_2'(x) = \frac{\mid x^2 - 1 \mid^{1/3} - \frac{2}{3}x^2 \mid x^2 - 1 \mid^{-2/3} \operatorname{sgn}(x^2 - 1)}{\mid x^2 - 1 \mid^{2/3}}.$$
Pertanto dobbiamo risolvere il seguente sistema di disequazioni
$$\begin{cases} f_2'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \end{cases}$$
ovvero, sostituendo,
$$\begin{cases} \frac{|x^2-1| - \frac{2}{3}x^2 \operatorname{sgn}(x^2-1)}{|x^2-1|^{4/3}} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{cases}$$
Tale sistema è equivalente a
$$\begin{cases} \operatorname{sgn}(x^2 - 1)(x^2 - 1 - \frac{2}{3}x^2) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{cases}$$
Se ne deduce che l'insieme delle soluzioni è dato da $S = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-1, 1) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

Pertanto:
f_2 è monotona strettamente crescente in $(-\infty, -\sqrt{3})$,
f_2 è monotona strettamente crescente in $(-1, 1)$,
f_2 è monotona strettamente crescente in $(\sqrt{3}, +\infty)$.
Mentre
f_2 è monotona strettamente decrescente in $(-\sqrt{3}, -1)$,
f_2 è monotona strettamente decrescente in $(1, \sqrt{3})$.

Ne consegue che $-\sqrt{3}$ è un punto di massimo locale per f_2, mentre $\sqrt{3}$ è un punto di minimo locale per f_2.

Per quanto riguarda la convessità, calcoliamo la derivata seconda di f_2.
$$f''(x) = \frac{2}{3} \frac{x(3 - \frac{x^2}{3})}{\mid x^2 - 1 \mid^{7/3}}.$$
Risolvendo il sistema seguente
$$\begin{cases} f_2''(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} \frac{2}{3}\frac{x(3-\frac{x^2}{3})}{|x^2-1|^{7/3}} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \end{cases}$$

si ha che le soluzioni sono date da $S = (-\infty, -3) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$.

Dunque:
f_2 è convessa in $= (-\infty, 3]$,
f_2 è convessa in $= [0, 1)$,
f_2 è convessa in $= (1, 3]$.
Mentre
f_2 è concava in $(-3, -1)$,
f_2 è concava in $(-1, 0)$,
f_2 è concava in $(3, +\infty)$.

13. Posto

$$f_3(x) = \log\left(\frac{2|x|-1}{x+2}\right)^2,$$

definita nel suo dominio naturale, determinare in quali intervalli è crescente e in quali è decrescente.

Il dominio naturale di f_3 scaturisce dalla richiesta che l'argomento del logaritmo sia positivo e il denominatore della frazione coinvolta sia diverso da zero. Pertanto

$$f_3 : \mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}, \;\; f_3(x) = \log\left(\frac{2 \mid x \mid -1}{x+2}\right)^2.$$

Poichè $f_3 \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\})$ e

$$f_3(x) = 2\log \mid \frac{2 \mid x \mid -1}{x+2} \mid = 2(\log \mid 2 \mid x \mid -1 \mid - \log \mid x+2 \mid),$$

allora

$$f_3'(x) = 2\frac{2\mathrm{sgn}(x)(x+2) - (2 \mid x \mid -1)}{(2 \mid x \mid -1)(x+2)}.$$

Risolviamo pertanto il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} f_3' > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1/2, 1/2\}, \end{cases}$$

ovvero, sostituendo, occorre risolvere il seguente sistema, equivalente, di disequazioni:

$$\begin{cases} \frac{4\mathrm{sgn}(x)+1}{(2|x|-1)(x+2)} > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1/2, 1/2\}, \end{cases}$$

l'insieme delle cui soluzioni è dato da $S = (-\infty, -2) \cup (-1/2, 0) \cup (1/2, +\infty)$. Pertanto:
f_3 è strettamente crescente in $(-\infty, -2)$,
f_3 è strettamente crescente in $(-1/2, 0)$,
f_3 è strettamente crescente in $(1/2, +\infty)$.
Mentre
f_3 è strettamente decrescente in $(-2, -1/2)$,
f_3 è strettamente decrescente in $(0, 1/2)$.

14. Posto

$$f_4(x) = |x+1|e^{|x-1|},$$

definita nel suo dominio naturale, determinare in quali intervalli è convessa e in quali è concava. Determinare poi i punti di massimo e di minimo relkativo di f_4.

Il dominio naturale di f_4 è $\mathbb{R}$. D'altra parte $f \in C(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\})$.

Calcoliamo dunque la derivata prima, ottenendo dopo un raccoglimento a fattor comune:

$$f_4'(x) = \exp(|\ x-1\ |)\mathrm{sgn}(x+1)(1+\mathrm{sgn}(x-1)(x+1)).$$

Risolviamo poi il seguente sistema d'equazioni per determinare per quali valori la derivata prima è positiva.

$$\begin{cases} f_4'(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \end{cases}$$

ovvero, sostituendo, dobbiamo risolvere il seguente sistema, equivalente:

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x+1)(1+\mathrm{sgn}(x-1)(x+1)) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Ricaviamo che le soluzioni sono date da $S = (-1, 0) \cup (1, +\infty)$. Da ciò segue che:
f_4 è monotona strettamente crescente in $(-1, 0)$,
f_4 è monotona strettamente crescente in $(1, +\infty)$.
Mentre
f_4 è monotona strettamente decrescente in $(-\infty, -1)$,
f_4 è monotona strettamente decrescente in $(0, 1)$.

Per quanto riguarda gli intervalli di convessità calcoliamo la derivata seconda. Risulta:

$$f_4''(x) = \exp(|\ x-1\ |)\mathrm{sgn}(x+1)(2\mathrm{sgn}(x-1)+x+1).$$

Pertanto, al fine di determinare gli intervalli di positività della derivata seconda occorre risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} f_4''(x) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \end{cases}$$

e pertanto, sostituendo, occorre risolvere il seguente sistema equivalente:

$$\begin{cases} \mathrm{sgn}(x+1)(2\mathrm{sgn}(x-1)+x+1) > 0 \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}. \end{cases}$$

Le soluzioni sono sono date da $S = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

Pertanto:
f_4 è convessa in $(-\infty, -1]$,
f_4 è convessa in $[1, +\infty)$.
Mentre
f_4 è concava in $(-1, 1)$.

15. Calcolare

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{\mathrm{sen}^2(3x) - \mathrm{senh}^2(3x)}$$

Ricordiamo che

$$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4),\ \ x \to 0,$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5),\ \ x \to 0,$$

$$\sin(3x) = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^4),\ \ x \to 0,$$

$$\sinh(3x) = 3x + \frac{9}{2}x^3 + o(x^2),\ \ x \to 0.$$

Pertanto

$$\sin^2(3x) = 9x^2 - 27x^4 + o(x^4),\ \ x \to 0,$$

$$\sinh^2(3x) = 9x^2 + 27x^4 + o(x^4),\ \ x \to 0.$$

Si evince allora che

$$\frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin^2(3x) - \sinh^2(2x)} = \frac{\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{-54x^4 + o(x^4)},\ \ x \to 0.$$

Pertanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^2) - \cos(x)}{\sin^2(3x) - \sinh^2(3x)} = -\infty$$

16. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - \mathrm{arctg}^2 x\right).$$

Siccome

$$(\frac{\pi^2}{4} - \mathrm{arctg}^2(x)) = (\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x))(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x))$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}(x)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

per il Teorema di De l'Hopital, possiamo concludere

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \left(\frac{\pi^2}{4} - \mathrm{arctg}^2 x\right) = +\infty$$

17. Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\left(x^4 + x^2 + 1\right)^{\frac{\pi}{2}} - \left(x^4 - x^2 + 1\right)^{\frac{\pi}{2}}\right).$$

Siccome

$$(x^4 + x^2 + 1)^{\frac{\pi}{2}} - (x^4 - x^2 + 1)^{\frac{\pi}{2}} = x^{2\pi}\big((1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4})^{\frac{\pi}{2}} - (1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4})^{\frac{\pi}{2}}\big),$$

possiamo considerare la formula di Taylor di $(1+t)^\alpha$, per $t \to 0$, ottenendo

$$(1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4})^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}),\ \ x \to +\infty$$

e

$$(1 - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4})^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^2} + o(\frac{1}{x^2}),\ \ x \to +\infty.$$

Concludiamo pertanto che

$$(x^4 + x^2 + 1)^{\frac{\pi}{2}} - (x^4 - x^2 + 1)^{\frac{\pi}{2}} = \pi x^{2\pi-2}(1 + o(1))\ \ x \to +\infty,$$

da cui segue

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\left(x^4 + x^2 + 1\right)^{\frac{\pi}{2}} - \left(x^4 - x^2 + 1\right)^{\frac{\pi}{2}}\right) = +\infty.$$