

1. Sia  $f : [-4, 3] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f$  continua e tale che  $f(-4) = 3$ ,  $f(0) = -1$  e  $f(3) = 4$ . Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

(a)  $\exists c \in (-4, 3)$ , tale che  $f(c) = -3$

(b)  $\exists c \in (-4, 3)$ , tale che  $f(c) = \pi$

(c)  $f$  è decrescente in  $[-4, 0]$

(d)  $\min f([-4, 0]) < \min f([1, 3])$

2. Poniamo:

$$f : [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1], \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \in [2, 3], \end{cases}$$

$$g : [0, 3] \rightarrow \mathbf{R},$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \in [0, 2], \\ 7 - x^2 & \text{se } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a)  $f$  e  $g$  sono continue

(b)  $f$  è continua e  $g$  non è continua

(c)  $f$  non è continua e  $g$  è continua

(d)  $f$  e  $g$  sono entrambe non continue

3. Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  e supponiamo che esistano  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$ . Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 3$

(b) esiste  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 5$

(c) non abbiamo informazioni sufficienti a garantire l'esistenza del limite della successione  $\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)\right\}$ .

4. Sia  $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  una funzione continua. Dire quale delle affermazioni seguenti è vera:

(a) esiste  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{2x^2+5}{x^2-3x}\right)$

(b) esiste  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

(c) non abbiamo informazioni sufficienti a garantire l'esistenza di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f\left(\frac{3e^x - 5x}{e^x + x^5}\right).$$

5. Sia  $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$  e supponiamo che esista  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .  
Dire quale delle affermazioni seguenti è vera:

(a)  $f$  è superiormente limitata

(b)  $\text{dom}(f)$  non è inferiormente limitato

(c)  $\sup f = +\infty$

(d)  $f$  è inferiormente illimitata

6. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( \frac{3}{2} \right)^n - n^3 \right) (\sqrt{n^4 + 1} - n^2)$$

7. Sia  $f : [0, 2) \rightarrow \mathbf{R}$ ; dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) esiste  $\min f$

(b) Se  $f$  è decrescente, allora esiste  $\max f$

(c) Se  $f$  è decrescente, allora non esiste  $\min f$

(d) Se  $f$  è continua, allora esiste  $\min f$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(n + \sqrt{n^2 + 1}) - \log n)$$

8. Calcolare

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\log(\sqrt{n^2 + 1} - n) - \log n)$$

9. Consideriamo la successione

$$\left\{ \sum_{k=0}^n \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right\}_{n \in \mathbf{N}}.$$

Dire quale delle seguenti affermazioni è vera:

(a) la successione diverge a  $+\infty$

- (b) la successione converge a 3
- (c) la successione non ha limite
- (d) la successione converge a un numero reale minore di 3

10. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} \log(1-x)}{\operatorname{sen}(3x)}$$

11. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 + \operatorname{sen} x}{(1+x)^2 - 1 + \operatorname{tg} x}$$

12. Calcolare la derivata della funzione  $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = x^{\operatorname{sen} x}$$

nel punto  $\pi$ .

13. Calcolare la derivata della funzione  $f : (-1, 0) \rightarrow \mathbf{R}$ ,

$$f(x) = \frac{|x-1|}{\log|x+1|},$$

nel punto  $-\frac{1}{2}$ .

14. Siano  $\{a_n\}$  e  $\{b_n\}$  successioni di numeri reali. Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

- (a) Se  $b_n \rightarrow 0$ , allora  $a_n + b_n \sim a_n$
- (b) Se  $a_n = o(b_n)$ , per  $n \rightarrow +\infty$ , allora  $a_n \rightarrow 0$
- (c) Se  $a_n \sim b_n$ , allora  $a_n^4 \sim b_n^4$
- (d) Se  $a_n \sim b_n$ , allora  $a_n = b_n + o(1)$

15. Il limite

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n^3 + 1} - \sqrt{n^4 - 3n^3 + 1}}{6n + \sqrt[5]{n} \operatorname{senn} n} :$$

- (a) non esiste
- (b) è uguale a  $\frac{1}{4}$
- (c) è uguale a  $\frac{1}{2}$

(d) è uguale a 1

16. Sia  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ . Dire quale delle seguenti affermazioni è vera.

(a) Se esiste  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$ , allora  $f$  non è monotona

(b) Se  $f$  è strettamente crescente, allora

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) < \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

(c) Se  $f$  è discontinua in 3, allora

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$$

(d) Se  $f$  è crescente, allora esiste  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

17. Calcolare

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2+12x+35}}$$

18. Calcolare la derivata della funzione  $g : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = (3x)^{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right)}$  nel punto  $\frac{5}{14\pi}$ .

19. Calcolare la derivata della funzione

$$h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \quad h(x) = |x|^{\frac{3}{2}} \log(5x^2 + |x-7|)$$

nel punto  $c \in \mathbf{R} \setminus \{0, 7\}$ .