ESAME DI ANALISI MATEMATICA LA
ESEMPI DI DOMANDE PER LA I PROVA PARZIALE (SOLUZIONI)

1. La risposta (a) è sicuramente falsa; si consideri, ad esempio, la funzione

$$f_1 : [-4, 3] \to \mathbf{R}, \qquad f_1(x) = \begin{cases} -x - 1, & \text{se } -4 \le x \le 0, \\ \frac{5}{3}x - 1, & \text{se } 0 < x \le 3. \end{cases}$$

   Essa è sicuramente continua in $[-4, 3] \setminus \{0\}$. Inoltre, poiché

$$\lim_{x \to 0-} f_1(x) = -1 = f_1(0) = \lim_{x \to 0+} f_1(x),$$

   essa è continua anche in 0. Infine, $f_1(-4) = 3$, $f_1(0) = -1$.

   La risposta (b) è vera, perché la funzione f è continua e, quindi, per il Teorema dei valori intermedi,$f\,([-4, 3])$ è un intervallo; esso contiene i punti -1 e 4 e quindi necessariamente anche l'intervallo $[-1, 4]$; pertanto, $\pi \in f\,((-4, 3))$.

   Risulta ovviamente, $\forall x \in [-4, 3]$, $f(x) \ge f(0)$.

   La risposta (c) è falsa; si considerei, ad esempio, la funzione

$$f_2 : [-4, 3] \to \mathbf{R}, \qquad f_2(x) = x^2 + 3x - 1.$$

   Essa è evidentemente continua, $f_2(-4) = 3$, $f_2(0) = -1$. Però non è decrescente in $[-4, 0]$, perché, ad esempio,

$$f_2(-2) = -3 < -1 = f_2(0).$$

   Anche la risposta (d) è sicuramente falsa; ad esempio, per la funzione f_1, definita nella risposta (a), si ha:

$$\min f_1\,([-4, 0]) = -1 < \frac{2}{3} = \min f_1\,([1, 3])\,.$$

2. La funzione f è continua. Infatti, sia $c \in [0, 1]$; se $\{a_n\}$ è una successione in $[0, 1] \cup [2, 3]$, convergente a c, deve essere $a_n \in [0, 1]$, definitivamente. Ne consegue che

$$f\,(a_n) = a_n \to c = f(c).$$

Analogamente, sia $d \in [2,3]$; se $\{b_n\}$ è una successione in $[0,1] \cup [2,3]$, convergente a d, deve essere $b_n \in [2,3]$, definitivamente. Ne consegue che

$$f(b_n) = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} = f(d).$$

Anche la funzione g è continua. Infatti, sia $c \in [0,2)$; se $\{a_n\}$ è una successione in $[0,3]$, convergente a c, deve essere $a_n \in [0,2)$, definitivamente. Ne consegue che

$$g(a_n) = 2a_n - 1 \to 2c - 1 = g(c).$$

Analogamente, sia $d \in (2,3]$; se $\{b_n\}$ è una successione in $(2,3]$, convergente a d, deve essere $b_n \in (2,3]$, definitivamente. Ne consegue che

$$g(b_n) = 7 - b_n^2 \to 7 - d^2 = g(d).$$

Proviamo infine che g è continua anche in 2. Infatti, si ha:

$$\lim_{x \to 2-} g(x) = \lim_{x \to 2-} (2x - 1) = 3,$$

$$\lim_{x \to 2+} g(x) = \lim_{x \to 2+} \left(7 - x^2\right) = 3;$$

allora esiste il limite $\lim_{x \to 2} g(x) = 3 = g(2)$. Pertanto la risposta esatta è (a).

3. Poiché $\lim_{x \to 0} f(x) = 3$, per definizione di limite, se $\{a_n\}$ è una successione in $\mathbf{R}^+$ convergente a 0, si ha $f(a_n) \to 3$. Poiché $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ è una successione di questo tipo, ne consegue che $f\left(\frac{1}{n}\right) \to 3$.

   Necessariamente, sono allora false le risposte (b) e (c).

4. Poiché
$$\frac{2x^2 + 5}{x^2 - 3x} \sim \frac{2x^2}{x^2} = 2, \quad \text{per } x \to +\infty,$$
   e la funzione f è continua in 2, per il Teorema sul limite di una composizione esiste il limite indicato in (a) ed è uguale a $f(2)$. Pertanto la risposta (a) è vera.

   La risposta (b) è falsa; infatti, sappiamo che f è continua in ogni punto di $\mathbf{R}^+$; poiché $0 \notin \mathbf{R}^+$, nulla possiamo dire sul comportamento di f

quando x si avvicina a 0. Ad esempio, la funzione $f_3(x) = \text{sen}\,\left(\frac{1}{x}\right)$ non ha limite per $x \to 0+$, come si verifica osservando che

$$\frac{1}{n\pi} \to 0, \quad f_3\left(\frac{1}{n\pi}\right) = \text{sen}\,(n\pi) = 0 \to 0,$$

mentre

$$\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \to 0, \quad f_3\left(\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}\right) = \text{sen}\,\left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right) = 1 \to 1;$$

pertanto, poiché vi sono due successioni in $\mathbf{R}^+$, convergenti a 0, le cui successioni trasformate tendono a limiti diversi, il limite della funzione, per $x \to 0$, non può esistere.

Infine, poiché

$$\frac{3e^x - 5x}{e^x + x^5} \sim \frac{3e^x}{e^x} = 3, \quad \text{per } x \to +\infty,$$

e f è continua in 3, per il teorema sul limite di una composizione, il limite indicato in (c) esiste ed è uguale a $f(3)$. Perciò (c) è falsa.

5. La risposta (a) è falsa; basta, ad esempio, considerare la funzione

$$k(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ \frac{2-x^2}{x-1}, & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Essa è superiormente illimitata, perché $\lim_{x\to 1+} k(x) = +\infty$.

La risposta (b) è falsa, perché $\text{dom}(f) = [0, +\infty)$, che è un intervallo inferiormente limitato.

La risposta (c) è falsa; basta, ad esempio, considerare la funzione $f_4(x) = -x$, che ha massimo uguale a 0.

La risposta (d) è vera. Infatti, se fosse falsa, la funzione f avrebbe estremo inferiore reale e, quindi, non potrebbe tendere a $-\infty$, per $x \to +\infty$.

6. La successione si presenta come prodotto di due successioni, ognuna delle quali è la differenza di due successioni positivamente divergenti. Esaminiamole più da vicino. Si ha:

$$\left(\frac{3}{2}\right)^n - n^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(1 - \frac{n^3}{\left(\frac{3}{2}\right)^n}\right) \sim \left(\frac{3}{2}\right)^n, \quad \text{per } n \to +\infty,$$

in quanto
$$n^3 = o\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right), \quad \text{per } n \to +\infty.$$
Inoltre, moltiplicando e dividendo per $\sqrt{n^4+1}+n^2$ il secondo fattore, otteniamo:
$$\begin{aligned}\sqrt{n^4+1}-n^2 &= \frac{\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)\left(\sqrt{n^4+1}+n^2\right)}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^4+1}+n^2} = \frac{1}{n^2\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}+n^2} = \\ &= \frac{1}{n^2\left(1+o(1)+1\right)} \sim \frac{1}{2n^2}, \quad \text{per } n \to +\infty.\end{aligned}$$
Allora
$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n - n^3\right)\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right) \sim \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^n}{2n^2} \to +\infty.$$

7. La risposta (a) è falsa; basta, ad esempio, considerare la funzione $f_5(x) = -x$; poiché, evidentemente, $f_5\left([0,2)\right) = (-2,0]$, f_5 non ha minimo.

   L'esempio precedente mostra anche che (d) è falsa, poiché l'insieme $(-2,=]$ non ha minimo.

   La risposta (b) è vera. Infatti, se f è decrescente, allora
$$\forall x \in [0,2),\ f(x) \le f(0);$$
   questo prova che esiste $\max f = f(0)$.

   La risposta (c) è falsa. Si consideri, ad esmpio la funzione
$$f_6(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } 0 \le x \le 1, \\ -1, & \text{se } 1 < x < 2. \end{cases}$$
   Allora, evidentemente, $f_6\left([0,2)\right) = [-1,0]$ e, quindi, esiste $\min f_6 = -1$.

8. Per le proprietà dei logaritmi, si ha, $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$:
$$\log\left(n+\sqrt{n^2+1}\right) - \log n = \log\left(1+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right).$$

Ora
$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{n} = \frac{n\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}{n} = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}}.$$
Poiché $1+\frac{1}{n^2} \to 1$, per la continuità della funzione radice quadrata in 1, avremo che $\sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \to \sqrt{1} = 1$. Allora
$$\left\{1+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right\}$$
è una successione che tende a 2 e, poiché la funzione logaritmo è continua nel punto 2, allora
$$\log\left(1+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}\right) \to \log 2.$$

9. Per le proprietà dei logaritmi, si ha, $\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$:
$$\log\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) - \log n = \log\left(\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n}\right).$$
Ora
$$\frac{\sqrt{n^2+1}-n}{n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} =$$
$$= \frac{1}{n\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)} \to 0;$$
poiché $\lim_{x\to 0} \log x = -\infty$, avremo allora che
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\log\left(\sqrt{n^2+1}-n\right) - \log n\right) = -\infty.$$

10. La successione
$$\left\{\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k^2+3^k}\right\}_{n\in\mathbf{N}}$$
è evidentemente crescente; pertanto, essa ha limite e quindi la risposta (c) è falsa. Si ha inoltre:
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k^2+3^k} \le \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k \le \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Allora la successione considerata è superiormente limitata e quindi convergente. Questo prova che anche la risposta (a) è falsa.

Per la maggiorazione precedente, il limite della nostra succesione è sicuramente minore o uguale a 3. Se fosse uguale a 3, poiché

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 3,$$

dovrebbe essere

$$0 = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right) = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right).$$

Poiché

$$\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2^k}{k^2 + 3^k} > 0, \quad \forall k \in \mathbf{N} \setminus \{0\},$$

la successione

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right) \right\}_{n \in \mathbf{N}}$$

è crescente e quindi

$$\sum_{k=0}^{n} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right) \geq \sum_{k=0}^{1} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right) = \frac{2}{3} - \frac{2}{1+3} = \frac{1}{6}.$$

Pertanto

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{2^k}{k^2 + 3^k} \right) \geq \frac{1}{6}$$

e quindi

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k^2 + 3^k} < 3.$$

Quindi la risposta esatta è (d).

11. Poiché

$$\operatorname{sen} x \sim x, \quad \text{per } x \to 0,$$

se g è una funzione definita in un intorno di 0, tale che

$$\lim_{x \to 0} g(x) \to 0, \quad g(x) \neq 0, \forall x \neq 0,$$

allora
$$\operatorname{sen}\ (g(x)) \sim g(x), \quad \text{per } x \to 0.$$
Infatti, la funzione
$$x \mapsto \frac{\operatorname{sen}\ (g(x))}{g(x)}$$
è la composizione di g e della funzione $y \mapsto \frac{\operatorname{sen}\ y}{y}$; poiché la prima tende a 0, per $x \to 0$, senza assumere il valore 0, mentra la seconda tende a 1 per $y \to 0$, il teorema sul limite di una composizione assicura che
$$\frac{\operatorname{sen}\ (g(x))}{g(x)} \to 1, \quad \text{per } x \to 0,$$
come volevasi. Inoltre, poiché
$$\lim_{z \to 1} \frac{\log z}{z-1} = 1,$$
sarà $\log z \sim z - 1$, per $z \to 1$. Ne consegue che $\log(1+y) \sim y$, per $y \to 0$. Allora, $\log(1-x) \sim -x$, per $x \to 0$. Allora,
$$\frac{\operatorname{sen}\ \log(1-x)}{\operatorname{sen}\ (3x)} \sim \frac{\log(1-x)}{3x} \sim -\frac{x}{3x} = -\frac{1}{3}, \quad \text{per } x \to 0.$$
Pertanto,
$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}\ \log(1-x)}{\operatorname{sen}\ (3x)} = -\frac{1}{3}.$$

12. Poiché $\operatorname{tg}\ x \sim x$, per $x \to 0$, risulta $\operatorname{tg}\ x = x + o(x)$, per $x \to 0$, e quindi il denominatore è uguale a
$$(1+x)^2 - 1 + \operatorname{tg}\ x = 1 + 2x + x^2 - 1 + x + o(x) = 3x + o(x), \quad \text{per } x \to 0;$$
d'altra parte, poiché, per la derivabilità della funzione esponenziale in 0, si ha $e^x - 1 = x + o(x)$, per $x \to 0$, il numeratore è uguale a
$$x + o(x) + x + o(x) = 2x + o(x), \quad \text{per } x \to 0.$$
Ne consegue che
$$\frac{e^x - 1 + \operatorname{sen}\ x}{(1+x)^2 - 1 + \operatorname{tg}\ x} = \frac{2x + o(x)}{3x + o(x)} \sim \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}, \quad \text{per } x \to 0.$$
Perciò il limite richiesto esiste ed è uguale a $\frac{2}{3}$.

13. Poiché, $\forall x \in \mathbf{R}^+$,

$$x^{\text{sen } x} = \exp\left(\log\left(x^{\text{sen } x}\right)\right) = \exp\left(\text{sen } x \log x\right),$$

la funzione è derivabile in tutto $\mathbf{R}^+$, perché composizione della funzione esponenziale, che è derivabile in tutto $\mathbf{R}$, e del prodotto delle funzioni seno e logaritmo, che sono entrambe derivabili in tutto $\mathbf{R}^+$. Allora, per il teorema sulla derivazione di una composizione e quello sulla derivazione di un prodotto, si ha, $\forall c \in \mathbf{R}^+$:

$$f'(c) = \exp\left(\text{sen } c \log c\right)\left(\cos c \log c + \frac{\text{sen } c}{c}\right) = c^{\text{sen } c}\left(\cos c \log c + \frac{\text{sen } c}{c}\right),$$

e, quindi,

$$f'(\pi) = -\log \pi.$$

14. Si ha, $\forall x \in (-1, 0)$,

$$f(x) = \frac{1-x}{\log(x+1)};$$

pertanto, per il Teorema sulla derivata di un quoziente e quello sulla derivata di una composizione, f è derivabile in $(-1, 0)$ e si ha, $\forall c \in (-1, 0)$:

$$f'(c) = \frac{-\log(c+1) - \frac{1-c}{c+1}}{\log^2(c+1)},$$

e, quindi,

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-\log\left(\frac{1}{2}\right) - 3}{\log^2\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{\log 2 - 3}{\log^2 2}.$$

15. L'affermazione (a) è falsa, come mostra l'esempio seguente:

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

Allora, evidentemente $b_n \to 0$, ma

$$a_n + b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \text{ per } n \to +\infty,$$

poiché

$$\frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} \to 1,$$

ma non è asintotica ad a_n, perché

$$\frac{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = 1+n \to +\infty.$$

L'affermazione (b) è falsa, come mostra l'esempio seguente:

$$a_n = n, \quad b_n = n^2.$$

Allora, evidentemente $\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{n} \to 0$, e quindi $a_n = o\,(b_n)$, per $n \to +\infty$. Però evidentemente a_n non tende a 0.

Se $a_n \sim b_n$, allora esiste una successione $\{h_n\}$, tale che

$$a_n = h_n b_n, \qquad h_n \to 1.$$

Allora, $a_n^4 = h_n^4 b_n^4$ e $h_n^4 \to 1$. Pertanto, $a_n^4 \sim b_n^4$; questo prova che la risposta (c) è vera.

L'affermazione (d) è falsa, come mostra l'esempio seguente:

$$a_n = n^2 + n, \quad b_n = n^2.$$

Allora, poiché

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \to 1,$$

$a_n \sim b_n$, per $n \to +\infty$, ma $a_n = b_n + n$ e n non tende a 0.

16. Si ha, evidentemente,

$$6n + \sqrt[5]{n}\ \mathrm{sen}\ n = 6n\left(1 + \frac{\mathrm{sen}\ n}{6\sqrt[5]{n^4}}\right) \sim 6n, \quad \text{per } n \to +\infty;$$

pertanto, il denominatore tende a $+\infty$.

Al numeratore è presente la differenza di due radici, ciascuna delle quali tende a $+\infty$. Procediamo allora nel modo seguente:

$$\sqrt{n^4+3n^3+1} - \sqrt{n^4-3n^3+1} =$$

$$= \frac{\left(\sqrt{n^4+3n^3+1} - \sqrt{n^4-3n^3+1}\right)\left(\sqrt{n^4+3n^3+1} + \sqrt{n^4-3n^3+1}\right)}{\sqrt{n^4+3n^3+1} + \sqrt{n^4-3n^3+1}} =$$

$$= \frac{6n^3}{\sqrt{n^4+3n^3+1}+\sqrt{n^4-3n^3+1}} = \frac{6n^3}{n^2\left(\sqrt{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{1-\frac{3}{n}+\frac{1}{n^4}}\right)}.$$

Poiché i due radicandi al denominatore tendono entrambi a 1 e la funzione radice quadrata è continua nel punto 1, l'ultima espressione scritta è uguale a

$$\frac{6n^3}{n^2\left(1+o(1)+1+o(1)\right)} \sim \frac{6n^3}{2n^2} = 3n, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Pertanto,

$$\frac{\sqrt{n^4+3n^3+1}-\sqrt{n^4-3n^3+1}}{6n+\sqrt[5]{n}\,\operatorname{sen} n} \sim \frac{3n}{6n} = \frac{1}{2}, \quad \text{per } n \to +\infty;$$

ne consegue che la risposta esatta è la (c).

17. La risposta (a) è vera; infatti, se f fosse decrescente, allora, per il Teorema sul limite delle funzioni monotone,

$$\lim_{x\to 3-} f(x) = \inf\{f(y) : y \in (-\infty,3)\} < +\infty.$$

Se invece f fosse crescente, avremmo, sempre per il Teorema sul limite delle funzioni monotone, che

$$f(3) \geq \sup\{f(y) : y \in (-\infty,3)\} = \lim_{x\to 3-} f(x) = +\infty,$$

il che è evidentemente assurdo.

Anche la risposta (b) è falsa. È infatti sufficiente considerare la funzione $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = x$, che è strettamente crescente e per la quale risulta

$$\lim_{x\to 3-} g(x) = 3 = \lim_{x\to 3+} g(x),$$

perché g è continua in 3.

La risposta (c) è falsa. Infatti, consideriamo, ad esempio, la funzione

$$h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 3, \\ 0, & \text{se } x = 3. \end{cases}$$

Allora h è discontinua in 3, perché

$$\lim_{x\to 3} h(x) = 1 \neq 0 = h(3),$$

ma, poiché esiste il limite della funzione h per $x \to 3$, allora esistono anche i limiti di h da destra e da sinistra e sono uguali tra loro.

La risposta (d) è falsa. Infatti, consideriamo, ad esempio, la funzione

$$k : \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad k(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 3, \\ x+1, & \text{se } x \geq 3. \end{cases}$$

Allora, k è strettamente crescente, ma non esiste il limite di k per $x \to 3$, perchè

$$\lim_{x \to 3-} k(x) = 3 \neq 4 = \lim_{x \to 3+} k(x).$$

18. Il dominio naturale della funzione di cui si chiede di calcolare il limite è

$$\left\{ x \in \mathbf{R} : 5 + x \geq 0, 25 - x^2 \geq 0, x^2 + 12x + 35 > 0 \right\} = (-5, 5].$$

Poiché il polinomio $x^2 + 12x + 35$ si annulla in -7 e in -5, sarà $x^2 + 12x + 35 = (x+7)(x+5)$; analogamente $25 - x^2 = (5-x)(5+x)$. Si ha allora, $\forall x \in (-5, 5]$:

$$\frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{25-x^2}}{\sqrt{x^2+12x+35}} = \frac{\sqrt{5+x}\left(1 - \sqrt{5-x}\right)}{\sqrt{x+5}\sqrt{x+7}} = \frac{1 - \sqrt{5-x}}{\sqrt{x+7}}.$$

L'ultima espressione scritta rappresenta una funzione che è continua nel punto -5 e, quindi, tende al suo valore nel punto -5, cioè a $\frac{1-\sqrt{10}}{\sqrt{2}}$.

19. Si ha, $\forall x \in \mathbf{R}^+$:

$$(3x)^{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right)} = \exp\left(\log\left((3x)^{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right)}\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5}{x}\right)\log(3x)\right);$$

pertanto, per i teoremi sulla derivate di un prodotto e di una composizione, si ha, $\forall c \in \mathbf{R}^+$:

$$g'(c) = \exp\left(\operatorname{sen}\left(\frac{5}{c}\right)\log(3c)\right)\left(-\frac{5}{c^2}\cos\left(\frac{5}{c}\right)\log(3c) + \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{5}{c}\right)}{c}\right).$$

Pertanto,

$$g'\left(\frac{5}{14\pi}\right) = -\frac{196}{5}\pi^2 \log\left(\frac{15}{14\pi}\right).$$

20. Sia $c \in \mathbf{R} \setminus \{0, 7\}$; allora, per i teoremi sulla derivata di un prodotto e di una composizione, si ha:

$$h'(c) = \frac{3}{2}|c|^{\frac{1}{2}} \mathrm{sgn}\ c \log\left(5c^2 + |c-7|\right) + |c|^{\frac{3}{2}} \frac{10c + \mathrm{sgn}\ (c-7)}{5c^2 + |c-7|} =$$

$$= |c|^{\frac{1}{2}} \mathrm{sgn}\ c \left(\frac{3}{2} \log\left(5c^2 + |c-7|\right) + \frac{c(10c + \mathrm{sgn}\ (c-7))}{5c^2 + |c-7|} \right).$$