CORREZIONE ESEMPIO DI PROVA PARZIALE 3

FAUSTO FERRARI

ESERCIZIO 1

L'insieme su cui $f(x,y)$ è definita è $D = \{(t,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad y \neq -\frac{5}{9}t\}$. In tale insieme la funzione è C^∞. Pertanto per ogni $(t_0, y_0) \in D$ esiste, localmente, una soluzione unica del problema di Cauchy tale che $y(t_0) = y_0$. Determiniamo la famiglia di soluzioni. L'equazione è omogenea, quindi cerchiamo la soluzione nella forma $y = tu(t)$. Pertanto $y' = u + tu'$. Quindi, se $t_0 \neq 0$, il problema di Cauchy diventa

$$\begin{cases} u + tu' = \frac{4+5u}{5+9u} \\ u(t_0) = \frac{y_0}{t_0}. \end{cases}$$

Semplificando otteniamo:

$$\begin{cases} u' = \frac{1}{t}\frac{4-9u^2}{5+9u} \\ u(t_0) = \frac{y_0}{t_0}. \end{cases}$$

Osserviamo che se $u = \frac{2}{3}$ oppure $u = -\frac{2}{3}$, allora sia $u = \frac{2}{3}$ che $u = -\frac{2}{3}$ sono soluzioni del problema di Cauchy con dato iniziale rispettivamente $u(t_0) = \frac{y_0}{t_0} = \frac{2}{3}$ e $u(t_0) = \frac{y_0}{t_0} = -\frac{2}{3}$. Quindi $y = \frac{2}{3}t$ e $y = -\frac{2}{3}t$ sono soluzioni del problema di Cauchy originario per i punti $(t_0, \pm\frac{2}{3}t_0)$ con $(t_0, y_0) \neq (0,0)$. Risolviamo il problema di Cauchy in u con dato iniziale $u(t_0) = \frac{y_0}{t_0} \neq \pm\frac{2}{3}$ e $t_0 \neq 0$. Si tratta di un'equazione a variabili separabili. Il problema di Cauchy ad essa relativa ha un'unica soluzione implicitamente data da:

$$\int_{\frac{y_0}{t_0}}^{u} \frac{5+9s}{4-9s^2} ds = \log \mid \frac{t}{t_0} \mid .$$

Da cui segue

$$\int_{\frac{y_0}{t_0}}^{u} \frac{5}{4(2-3s)} ds + \int_{\frac{y_0}{t_0}}^{u} \frac{5}{4(2+3s)} ds - [\frac{1}{2} \log \mid 4 - 9s^2 \mid]_{s=\frac{y_0}{t_0}}^{s=u} = \log \mid \frac{t}{t_0} \mid .$$

Pertanto

$$[\log(\frac{\mid 2+3s \mid}{\mid 2-3s \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4-9s^2 \mid^{\frac{1}{2}}}]_{s=\frac{y_0}{t_0}}^{u} = \log \mid \frac{t}{t_0} \mid,$$

da cui segue

$$(\frac{\mid 2+3u \mid}{\mid 2-3u \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4-9u^2 \mid^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\mid 2+3\frac{y_0}{t_0} \mid}{\mid 2-3\frac{y_0}{t_0} \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4-9(\frac{y_0}{t_0})^2 \mid^{\frac{1}{2}}} \mid \frac{t}{t_0} \mid .$$

Pertanto la soluzione y soddisfa implicitamente la seguente equazione

$$(\frac{\mid 2+3\frac{y}{t} \mid}{\mid 2-3\frac{y}{t} \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4-9(\frac{y}{t})^2 \mid^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\mid 2+3\frac{y_0}{t_0} \mid}{\mid 2-3\frac{y_0}{t_0} \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4-9(\frac{y_0}{t_0})^2 \mid^{\frac{1}{2}}} \mid \frac{t}{t_0} \mid,$$

da cui segue semplificando

$$(\frac{\mid 2t+3y \mid}{\mid 2t-3y \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4t^2-9y^2 \mid^{\frac{1}{2}}} = (\frac{\mid 2t_0+3y_0 \mid}{\mid 2t_0-3y_0 \mid})^{\frac{5}{12}} \frac{1}{\mid 4t_0^2-9y_0^2 \mid^{\frac{1}{2}}}$$

Date:

e

$$| 2t - 3y |^{\frac{11}{12}} | 2t + 3y |^{\frac{1}{12}} = | 2t_0 - 3y_0 |^{\frac{11}{12}} | 2t_0 + 3y_0 |^{\frac{1}{12}} .$$

L'ultima espressione fornisce l'equazione in forma implicita delle soluzioni anche per $t_0 = 0$, per ogni $(t_0, y_0) \in D$ e $y_0 \neq \pm\frac{2}{3}t_0$.

Poiché f è C^∞ in D, anche le soluzioni hanno la stessa regolarità. Pertanto studiamo ora il segno di y'. Avremo $y' > 0$ se e solo se $\frac{4t+5y}{5t+9y} > 0$ ovvero se $4t + 5y > 0$ e $5t + 9y > 0$ vel $4t + 5y < 0$ e $5t + 9y < 0$.

Derivando una seconda volta otteniamo che

$$y'' = \frac{(4 + 5y')(5t + 9y) - (5 + 9y')(4t + 5y)}{(5t + 9y)^2} = \frac{(4 + 5\frac{4t+5y}{5t+9y})(5t + 9y) - (5 + 9\frac{4t+5y}{5t+9y})(4t + 5y)}{(5t + 9y)^2}$$

$$= \frac{4(5t + 9y)^2 - 9(4t + 5y)^2}{(5t + 9y)^3} = 11\frac{(-2t + 3y)(2t + 3y)}{(5t + 9y)^3}.$$

Pertanto $y'' > 0$ se e solo se $\frac{(-2t+3y)(2t+3y)}{(5t+9y)} > 0$.

Per $(t_0, y_0) \in \{(t, y) \in R^2 : t > 1; y > 1\}$

$$| \frac{4t + 5y}{5t + 9y} | \leq 1.$$

Quindi se $(t_0, y_0) \in \{(t, y) \in R^2 : t > 1; y > 1\}$ in $Q = \{(t, y) \in R^2 : t > 1; y > 1\}$ le soluzioni sono globali. Osserviamo che le soluzioni $y = \frac{2}{3}t$ e $y = -\frac{2}{3}t$ dividono il piano in quattro parti. In ciascuno di questi settori abbiamo soluzioni che non si intersecano tra loro e neppure intersecano le rette $y = \frac{2}{3}t$ e $y = -\frac{2}{3}t$. Infine, lungo la retta $4t + 5y = 0$ abbiamo dei punti stazionari (punti di minimo).

Esercizio 2

Un sistema fondamentale dell'equazione omogenea è $\{\cos(t), \sin(t)\}$. Cerchiamo una soluzione particolare con il metodo per simpatia con il termine non omogeneo e^{2t} nella forma Ce^{2t}, (infatti 2 non è soluzione dell'equazione caratteristica). Se $C = 3$ abbiamo una soluzione dell'equazione non omogenea

$$y'' + y = e^{2t}.$$

Analogamente cercando una soluzione particolare di

$$y'' + y = t,$$

sotto forma di un polinomio di primo grado $At + B$ otteniamo che per $A = 1$ e $B = 0$, si ha una soluzione. Quindi l'integrale generale di

$$y'' + y = e^{2t} + t$$

è

$$C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t) + 3e^{2t} + t.$$

Nel caso del problema ai limiti con ricerca di autovalori indichiamo con $\gamma_1 = \gamma_1(\lambda)$ e $\gamma_2 = \gamma_2(\lambda)$ rispettivamente le soluzioni dell'equazione

$$\gamma^2 + 4\gamma + \lambda = 0.$$

Se $4 - \lambda > 0$, allora $c_1e^{\gamma_1 t} + c_2e^{\gamma_2 t}$ è l'integrale generale; se $4 = \lambda$, allora $c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t}$ è l'integrale generale; se $4 - \lambda < 0$, allora $c_1e^{-2t} \cos(\sqrt{\lambda - 4}t) + c_2e^{-2t} \sin(\sqrt{\lambda - 4}t)$ è l'integrale generale. Nel primo e nel secondo caso non ci sono autovalori. Nel terzo troveremo gli autovalori in corrispondenza di quei valori di $\lambda > 4$ per cui

$$\sin(\sqrt{\lambda - 4}) = 0,$$

cioè per $\lambda_k - 4 = k^2\pi^2$, $k \in \mathbb{Z}$, e $\lambda > 4$. Ovvero per $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Per λ_k autovalore del problema ricaviamo , in corrispondenza di $-2c_1 + c_2\sqrt{\lambda - 4} = 0$ la condizione per determinare le autosoluzioni. Lo spazio delle autosoluzioni V_k in corrispondenza dell'autovalore λ_k è

$$V_k = \text{span}\{e^{-2t}\cos(\sqrt{\lambda_k - 4}t) + \frac{\sqrt{\lambda_k - 4}}{2}e^{-2t}\cos(\sqrt{\lambda_k - 4}t)\}.$$

Esercizio 3

La funzione è pari e può essere prolungata periodicamente su $\mathbb{R}$ con periodo 2π. La serie di Fourier associata sar à di soli coseni.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4(\pi^2 - x^2)dx = \frac{1}{\pi}[4(\pi^2 x - \frac{1}{3}x^3)]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{16}{3}\pi^2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 4(\pi^2 - x^2)\cos(kx)dx = \frac{4}{\pi}[\frac{\sin(kx)}{k}(\pi^2 - x^2)]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\frac{\sin(kx)}{k}dx,$$

$$= \frac{8}{\pi}[-x\frac{\cos(kx)}{k^2}]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{8}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k^2}dx$$

$$= \frac{8}{\pi}[-x\frac{\cos(kx)}{k^2}]_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{8}{\pi}[\frac{\sin(kx)}{k^3}]_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{8}{\pi}[-x\frac{\cos(kx)}{k^2}]_{x=-\pi}^{x=\pi}.$$

Quindi se k è pari

$$a_k = \frac{8}{\pi k^2}(-\pi - \pi) = -\frac{16}{k^2},$$

mentre se k è dispari

$$a_k = \frac{8}{\pi k^2}(\pi + \pi) = \frac{16}{k^2}.$$

Riassumendo avremo che la serie di Fourier associata a f è:

$$\frac{8}{3}\pi^2 + \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}\cos(jx).$$

Studiamo la convergenza totale di tale serie di Fourier. Poichè

$$\sup_{\mathbb{R}} \mid \frac{(-1)^{j+1}}{j^2}\cos(jx) \mid \leq \frac{1}{j^2}$$

e la serie $\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{j^2}$ converge se ne deduce che la convergenza della serie di Fourier associata ad f è totale. In particolare la convergenza è uniforme su tutto $\mathbb{R}$.

Infine,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mid j\frac{(-1)^{j+1}}{j^2}\cos(jx) \mid = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j} \mid \cos(jx) \mid,$$

in generale, non converge assolutamente. Infatti se $x = 0$ $\cos(0) = 1$; quindi

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mid j\frac{(-1)^{j+1}}{j^2} \mid = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j} = \infty,$$

(serie armonica). D'altra parte, sempre per $x = 0$

$$\sum_{j=1}^{\infty} j\frac{(-1)^{j+1}}{j^2} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}}{j}.$$

Quindi per il criterio di Liebnitz la serie converge. (Gli altri casi si trattano con il criterio di Liebnitz ma non erano oggetto di verifica.)