

Complementi di Analisi Matematica (Laurea Specialistica)
Ingegneria Civile-Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio
Prima Prova Parziale A.A. 2006/2007

Prof. Fausto Ferrari

NOME E COGNOME

CORSO DI LAUREA

MATRICOLA (specificare inoltre se iscritto sotto condizione)

Esercizio 1.

- a. (1 pt.) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = \frac{4t + 5y}{5t + 9y} \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (1),$$

- per quali dati iniziali vale il Teorema di esistenza e unicità **locale** della soluzione per (1)?
- b. (2 pt.) Determinare la famiglia di soluzioni (dipendente dal dato iniziale) di (1).
- c. (2 pt.) Le soluzioni con dato iniziale $(t_0, y_0) \in \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t > 1; y > 1\}$ sono globali? Motivare la risposta.
- d. (1+1=2 pt.) Studiare crescita decrescita e concavità delle soluzioni di (1).
- e. (2 pt.) Tracciare un grafico qualitativo delle soluzioni di (1) al variare di (t_0, y_0) .

Esercizio 2.

- a. Sia

$$y'' + y = e^{2t} + t \quad (2).$$

- b. (1 pt.) Determinare l'integrale generale dell'equazione omogenea associata a (2).
- c. (1 pt.) Determinare l'integrale generale dell'equazione (2).
- d. (1 pt.) Calcolare la soluzione dell'equazione differenziale (2) che soddisfa le condizioni iniziali $y(0) = 0$ e $y'(0) = 0$.
- e. (3 pt.) Determinare gli autovalori associati al problema

$$\begin{cases} y'' + 4y' + \lambda y = 0 \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0, \end{cases}$$

discutendo tutti i casi di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. (Facoltativo) Sia $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = 2(\pi^2 - x^2)$.

- a. (1 pt.) Calcolare i coefficienti di Fourier e scrivere la serie di Fourier associata ad f .
- b. (2 pt.) Studiare la convergenza totale della serie di Fourier associata alla funzione f .
- c. (2 pt.) Indicando con $\{a_k\}_{k \in \mathbf{N}}$ i coefficienti della serie di Fourier associata ad f . Si chiede se la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k$$

è convergente. Converge assolutamente?

Motivare ogni risposta.

N.B. Gli studenti hanno a disposizione **due ore** per svolgere i **tre** esercizi. **NON** è concesso l'uso di libri di testo, appunti ed eserciziari.