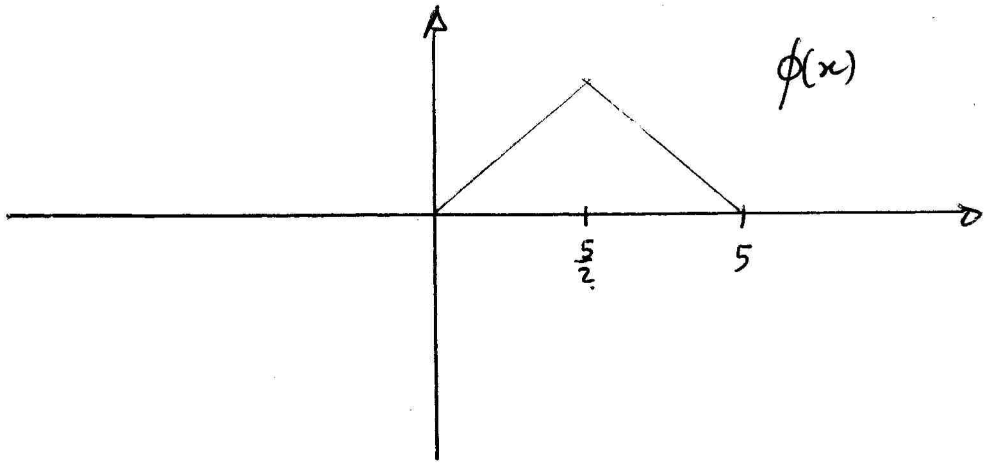
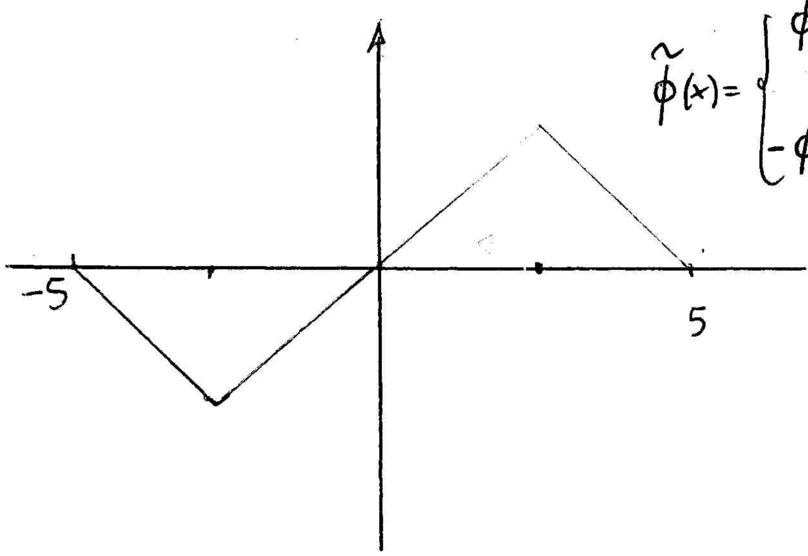
Esercizio 2

(i)



(ii)



$$\tilde{\phi}(x) = \begin{cases} \phi(x), & x \in [0,5] \\ -\phi(-x), & x \in [-5,0) \end{cases}$$

(iii) Possiamo estendere $\tilde{\phi}$ periodicamente su $\mathbb{R}$ con periodo 10. La funzione è dispari quindi i coefficienti di Fourier sono solo quelli del seno.

$$b_k = \frac{1}{5} \int_{-5}^{5} \tilde{\phi}(t) \sin\left(\frac{k\pi}{5}t\right) dt = \frac{2}{5} \int_{0}^{5} \phi(t) \cdot \sin\left(\frac{k\pi}{5}t\right) dt$$

$$= \frac{2}{5}\left(\int_0^{5/2} x \,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{5}x\right) dx + \int_{\frac{5}{2}}^{5} (5-x)\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{5}x\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\left[-\frac{5}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) x \right]_{x=0}^{x=\frac{5}{2}} + \int_0^{5/2} \frac{5}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) dx \right.$$

$$\left. + \left[-(5-x)\frac{5}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) \right]_{x=\frac{5}{2}}^{x=5} - \int_{\frac{5}{2}}^{5} \frac{5}{k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) dx \right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\cancel{-\frac{25}{2k\pi}\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)} + \left[\frac{25}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{5}x\right) \right]_{x=0}^{x=\frac{5}{2}} \right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{5}{2}\cdot\frac{5}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}} - \left[\frac{25}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{5}x\right) \right]_{x=\frac{5}{2}}^{x=5} \right)$$

$$= \frac{2}{5}\left(\frac{25}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) - \frac{25}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}(k\pi) + \frac{25}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\frac{k\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{5}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right).$$

Quindi $\phi \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2\pi^2}\,\mathrm{sen}\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$

Poiché $\phi \in C_{10}$ e derivabile a tratti, la serie di Fourier è totalmente convergente a ϕ.

Esercizio 3

Cerchiamo una soluzione nella forma

$$u(x,t) = X(x)\,T(t)$$

Pertanto

$$X T' - 4 X'' T = 0 .$$

Separiamo le variabili

$$\frac{T'}{4T} = \frac{X''}{X}.$$

Quindi cerchiamo $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(5) = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} T' = 4\lambda T \end{cases}$$

(altrimenti avrei la soluzione banale).

Se $\lambda > 0$ allora $V_2 = \mathrm{span}\{e^{\sqrt{\lambda}x}, e^{-\sqrt{\lambda}x}\}$.

Quindi $c_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$ è l'integrale generale

Imponendo le condizioni al bordo otteniamo:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\lambda}5} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}5} = 0 \end{cases} \Rightarrow \det\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{5\sqrt{\lambda}} & e^{-5\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix} = e^{-5\sqrt{\lambda}} - e^{5\sqrt{\lambda}} \Rightarrow$$

$$e^{-5\sqrt{\lambda}} = e^{5\sqrt{\lambda}} \Leftrightarrow \lambda = 0.$$ Nessun autovalore

Se $\lambda = 0$ $V_2 = \text{span}\{1, x\}$. L'integrale generale è $c_1 + c_2 x$. Quindi imponendo le condizioni al bordo

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ 5c_2 = 0 \end{cases}$$

Otteniamo la sola condizione banale.

Rimane $\lambda > 0$. $V_2 = \text{span}\{e^{i\sqrt{|\lambda|}}, e^{-i\sqrt{|\lambda|}}\}$

$= \text{span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|}x), \sin(\sqrt{|\lambda|}x)\}$.

Pertanto l'integrale generale è $c_1\cos(\sqrt{|\lambda|}x) + c_2\sin(\sqrt{|\lambda|}x)$

Imponendo le condizioni al bordo otteniamo

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{|\lambda|}5 = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Pertanto $|\lambda| = \frac{k^2\pi^2}{25}$ cioè $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{25}$ e $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Le autofunzioni sono generate, per ogni $k \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, da $\sin(\frac{k\pi x}{5})$.

Sostituendo nell'altro problema agli autovalori otteniamo

$$T' = -\frac{k^2\pi^2}{25} \cdot 4\, T$$

Quindi l'integrale generale è

$$T = C\, e^{-\frac{4k^2\pi^2}{25}t}$$

Pertanto la funzione candidata ad essere soluzione è

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) = \phi(x).$$

Per quanto ottenuto nell'esercizio (2), otteniamo imponendo $A_k = \frac{5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\, e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right).$$

Ci aspettiamo che v sia la soluzione del nostro problema di Cauchy-Dirichlet