Sostituendo nell'altro problema agli autovalori otteniamo

$$T' = -\frac{k^2\pi^2}{25} \cdot 4\, T$$

Quindi l'integrale generale è

$$T = c\, e^{-\frac{4k^2}{25}\pi^2 t}$$

Pertanto la funzione candidata ad essere soluzione è

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\, e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)$$

Imponendo le condizioni iniziali otteniamo anche

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) = \phi(x).$$

Per quanto ottenuto nell'esercizio (2), otteniamo imponendo $A_k = \frac{5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$,

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2}\, e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right).$$

Ci aspettiamo che v sia la soluzione del nostro problema di Cauchy-Dirichlet

Parte facoltativa

(i) $v \in C([0,5]\times[0,100])$, infatti $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\, e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}\sin\frac{k\pi}{5}x$, è continua su $[0,5]\times[0,100]$ per ogni $n\in\mathbb{N}$.
Inoltre la serie $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è totalmente convergente su $[0,5]\times[0,100]$. Infatti

$$\sup_{(x,t)\in[0,5]\times[0,100]} \left| \frac{5}{k^2\pi^2} \sin\frac{k\pi}{2} e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) \right| \leq \frac{5}{k^2\pi^2}$$

e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k^2\pi^2}$ è convergente. Quindi per il criterio di Weierstrass la serie data è totalmente convergente e quindi anche uniformemente convergente su $[0,5]\times[0,100]$. Pertanto la funzione v è continua su $[0,5]\times[0,100]$.

(ii)

Se consideriamo la serie delle derivate parziali rispetto a t, abbiamo:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}$$

Tale serie converge totalmente su ogni insieme del tipo $[0,5]\times[\varepsilon_0,100]$ con $\varepsilon_0>0$. Infatti

$$\sup_{[0,5]\times[\varepsilon_0,100]} \left| \frac{4}{5} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} \right|$$

$$\leq \frac{4}{5} e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2\varepsilon_0}.$$

Quindi, la serie delle derivate converge totalmente su $[0,5]\times[\varepsilon_0,100]$ per il criterio di Weierstrass in quanto $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{5} e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2\varepsilon_0}$ è convergente.

Pertanto per ogni $(x,t)\in(0,5)\times(0,100)$

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{5}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}.$$

Analogamente, la serie delle derivate parziali rispetto a x è:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}.$$

D'altra parte abbiamo

$$\sup_{[0,5]\times[\varepsilon_0,100]} \left| \frac{1}{k\pi} \sin\frac{k\pi}{2} \cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}\right|$$

$$\leq \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2\varepsilon_0}.$$

Quindi, per il criterio di Weierstrass, la serie è totalmente convergente perché è convergente la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2\varepsilon_0}$.

Pertanto, per ogni $(x,t)\in(0,5)\times(0,100)$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\pi} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}.$$

(iii) Come nel caso (ii) consideriamo la serie delle derivate seconde rispetto a x:

$$\sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{k\pi}\frac{k\pi}{5} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{5} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right) e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}.$$

Osserviamo che a parte una costante moltiplicativa tale serie è la stessa ottenuta derivando rispetto a t.

Pertanto, per ogni $(x,t) \in (0,5)\times(0,100)$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{1}{5}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}.$$

Possiamo allora concludere che $v \in C^{2,1}((0,5)\times(0,100))$, inoltre

$$\frac{\partial v}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{4}{5}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}$$

$$-4\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{5}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t} = 0.$$

Quindi, v è soluzione dell'equazione a derivate parziali $\frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ in $(0,5)\times(0,100)$.

Verifichiamo le condizioni al bordo; per (i) abbiamo:

$v(0,t) = v(5,t) = 0$;

Possiamo affermare che

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{5}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}\sin\left(\frac{k\pi}{5}x\right)e^{-\frac{4}{25}k^2\pi^2 t}$$

è soluzione classica del problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & (0,5)\times(0,100) \\ u(0,t) = u(5,t) = 0 & t \in [0,100] \\ u(x,0) = \phi(x) & x \in [0,5]. \end{cases}$$

(iv) Dal principio del massimo segue che v è l'unica soluzione del problema di Cauchy-Dirichlet assegnato.

(v) Se w è soluzione di

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 & ; \quad (0,5)\times(0,100) \\ u(0,t) = u(5,t) = 0 & ; \quad t\in[0,100] \\ u(x,0) = \psi(x) & ; \quad x\in[0,5] \end{cases}$$

e $\quad \psi(x) \leq \phi(x) \qquad \forall x\in[0,5]$

(con ψ continua) allora.

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial t} = 4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right) & ; \quad (0,5)\times(0,100) \\ (w-v)(0,t) = (w-v)(5,t) = 0 & ; \quad t\in[0,100] \\ (w-v)(x,0) = \psi(x) - \phi(x) \leq 0 & ; \quad x\in[0,5] \end{cases}$$

Dal principio del massimo segue

$$\max_{[0,5]\times[0,100]} (w-v) = \max_{\partial_p((0,5)\times(0,100))} (w-v) = 0 .$$

Pertanto, per ogni $(x,t)\in[0,5]\times[0,100]$

$$w - v \leq \max_{[0,5]\times[0,100]} (w-v) = 0 .$$

Quindi $\quad w \leq v \quad$, per ogni $(x,t)\in[0,5]\times[0,100]$.