Esercizio 1

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -15y_1 + 8y_2 \\ y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 1 \end{cases}$$

Posto $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ avremo $\begin{cases} y' = Ay \\ y(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$, dove $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}$

Calcoliamo gli autovalori di A: $\det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -15 & 8-\lambda \end{bmatrix} = 0 \iff$

$(\lambda - 8)\lambda + 15 = 0 \iff \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0 \iff (\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0 \iff$

$\lambda = 5 \vee \lambda = 3$. Determiniamo i generatori degli autospazi.

$(\lambda = 3)$ $(A - 3I) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -15 & 5 \end{bmatrix}$. Risolviamo $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -15 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Con il metodo di Gauss otteniamo $\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi $-3x + y = 0$ induce $\mathrm{Ker}(A - 3I) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$.

Analogamente
$(\lambda = 5)$ $(A - 5I) = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -15 & 3 \end{bmatrix}$. Risolviamo $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -15 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Con il metodo di Gass otteniamo $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Quindi $-5x + y = 0$ da cui segue $\mathrm{Ker}(A - 5I) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$.

Una matrice fondamentale è data da

$\Phi(t) = \begin{bmatrix} e^{3t} & e^{5t} \\ 3e^{3t} & 5e^{5t} \end{bmatrix}$. Risolviamo il (P.C.) determinando

c_1 e c_2 t.c. $\Phi(0) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$c_1 = \frac{\det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}{2} = -\frac{1}{2} \; ; \quad c_2 = \frac{\det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}}{2} = \frac{1}{2}$$

Quindi la soluzione è

$$\Phi(t)\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{5t} \\ -\frac{3}{2}e^{3t} + \frac{5}{2}e^{5t} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2

$$\chi_{[1,2]} * \chi_{[5,15]}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[1,2]}(x-y)\, \chi_{[5,15]}(y)\,dy =$$

$$= \int_{5}^{15} \chi_{[1,2]}(x-y)\,dy = -\int_{x-5}^{x-15} \chi_{[1,2]}(t)\,dt = \int_{x-15}^{x-5} \chi_{[1,2]}(t)\,dt$$

Caso 1

$x-15 \quad x-5 \quad 1 \quad 2$

$x-5 < 1 \iff x < 6$

Caso 2

$x-15 \quad 1 \quad x-5 \quad 2$

$$\begin{cases} x-15 < 1 \\ 1 < x-5 < 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x < 16 \\ 6 < x < 7 \end{cases} \iff x \in (6,7).$$

Caso 3

$1 \quad x-15 \quad x-5 \quad 2$

$$\begin{cases} 1 < x-15 \\ x-5 < 2. \end{cases} \iff \begin{cases} 16 < x \\ x < 7 \end{cases}$$

$S = \emptyset$

Caso 4

$1 \quad x-15 \quad 2 \quad x-5$

$$\begin{cases} 1 < x-15 < 2 \\ 2 < x-5 \end{cases}$$

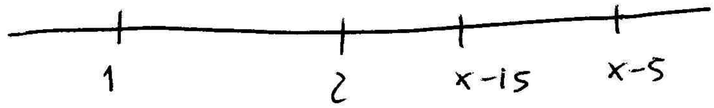
$$\begin{cases} 16<x<17 \\ 7<x \end{cases} \iff x\in(16,17).$$

Caso 5

$$\begin{cases} x-15<1 \\ 2<x-5 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} x<16 \\ 7<x \end{cases} \iff 7<x<16$$

Caso 6

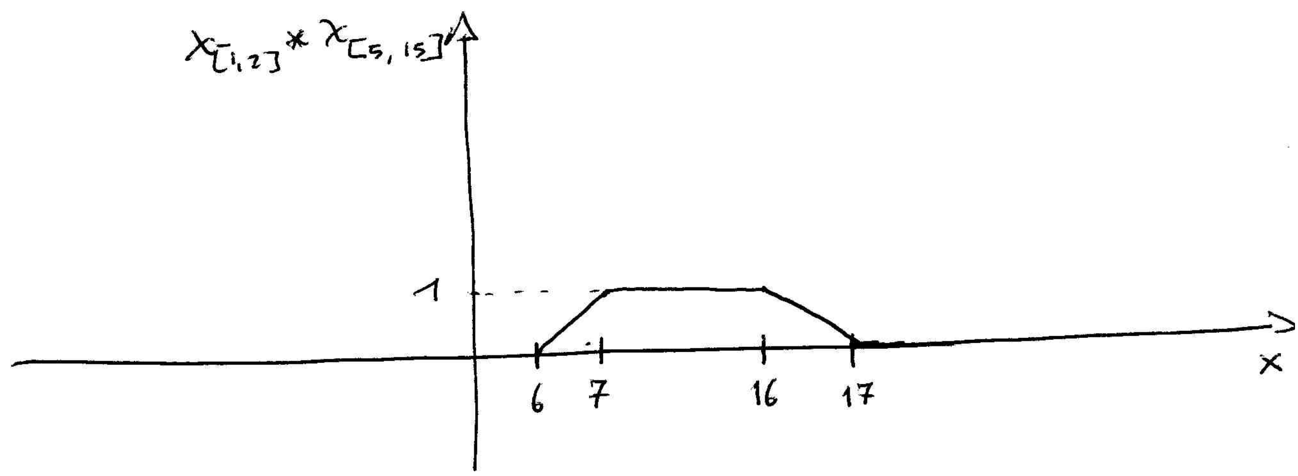


$2<x-15$

$x>17$

Portanto

$$\chi_{[1,2]}*\chi_{[5,15]}(x)=\begin{cases} 0, & \text{se } x<6; \\ \int_1^{x-5}\chi_{[1,2]}\,dt=x-6, & \text{se } 6\leq x<7; \\ \int_{x-15}^{2}\chi_{[1,2]}\,dt=17-x, & \text{se } 16\leq x<17; \\ \int_1^{2}\chi_{[1,2]}\,dt=1, & \text{se } 7\leq x<16 \\ 0, & \text{se } x\geq 17. \end{cases}$$



$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \ , \quad (0,3)\times(0,5) \\ u(0,y) = u(3,y) = 0 \ , \quad y \in [0,5] \\ u(x,0) = 0 \ , \quad x \in [0,3] \\ u(x,5) = 1 \ , \quad x \in [0,3] \end{cases}$$

Procediamo per separazione di variabili:

$u(x,y) = X(x)\,Y(y)$. Quindi $X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0$

$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}$. Cerchiamo le costanti t.c.

$\frac{X''}{X} = \lambda = -\frac{Y''}{Y}$ con le condizioni $X(0)Y(y) = 0$, $X(3)Y(y) = 0$ e $X(x)Y(0) = 0$. Necessariamente $X(0) = X(3) = Y(0) = 0$.

Quindi

$$\begin{cases} X'' = \lambda X \\ X(0) = 0 \\ X(3) = 0 \end{cases}$$

Se λ 0 non ci sono autovalori, mentre per $\lambda < 0$ l'integrale generale è dato da $\text{span}\{\cos(\sqrt{|\lambda|}\,x), \sin(\sqrt{|\lambda|}\,x)\}$

Pertanto, imponendo le condizioni iniziali otteniamo:

$c_1 = 0$ e $c_2 \sin(\sqrt{|\lambda|}\,3) = 0$. Quindi $\sqrt{|\lambda|}\,3 = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

e finalmente $\lambda_k = -\frac{k^2\pi^2}{9}$, $k \in \mathbb{Z}$. Gli autovalori sono $\sin(\sqrt{|\lambda_k|}\,x)$.

Inoltre sostituendo in $\begin{cases} Y'' = -\lambda Y \\ Y(0) = 0 \end{cases}$ otteniamo il seguente problema per ogni $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} Y'' = \frac{k^2\pi^2}{9} Y \\ Y(0) = 0 \end{cases}$$

. L'integrale generale è dato da $\text{span}\{\sinh(\frac{k\pi}{3}y), \cosh(\frac{k\pi}{3}y)\}$.

Quindi da $c_1 \sinh\left(\frac{k\pi}{3}y\right) + c_2 \cosh\left(\frac{k\pi}{3}y\right)$ segue:

$c_1 \sinh(0) + c_2 \cosh(0) = 0$ cioè $c_2 = 0$

Per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $A_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) \sinh\left(\frac{k\pi}{3}y\right)$.

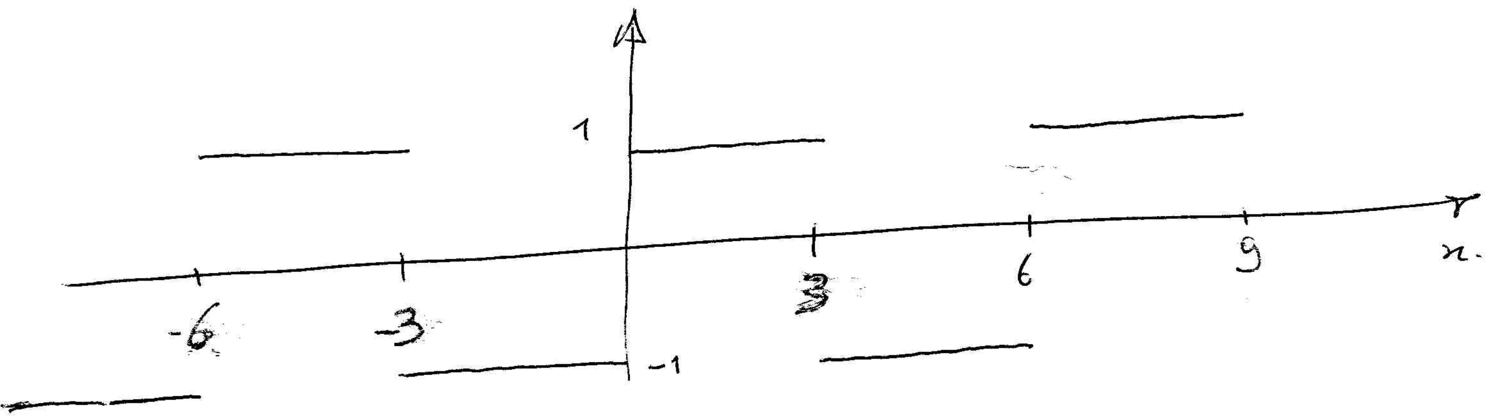
Quindi considerando $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) \sinh\left(\frac{k\pi}{3}y\right)$

determiniamo le costanti A_k in modo tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) \cdot \sinh\left(\frac{k\pi}{3}\cdot 5\right) = 1.$$

Prolunghiamo la funzione 1 sull'intervallo $[-3, 0]$

come funzione dispari e poi periodicamente su $\mathbb{R}$
come funzione periodica di periodo 6.



La serie di Fourier è:

$$1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\left(\frac{k\pi}{3}x\right) \quad , \quad b_k = \frac{2}{3}\int_0^3 \sin\left(\frac{k\pi x}{3}\right) dx$$

cioè $b_k = \frac{2}{3}\left[\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\right]_{x=0}^{x=5} = \frac{2}{3}\left(\frac{3}{k\pi} - \frac{3}{k\pi}\cos(k\pi)\right)$

$$= \frac{2}{k\pi}\left(1 - \cos(k\pi)\right) = \begin{cases} \frac{4}{k\pi} & \text{se } k \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } k \text{ è pari} \end{cases}$$

In particolare $1 \sim \sum_{J=0}^{\infty} \frac{4}{(2J+1)\pi} \sin \frac{(2J+1)\pi}{3} x.$

Per determinare le costanti A_K allora deve verificarsi

$$\sum_{K=1}^{\infty} A_K \sinh\left(\frac{K\pi}{3} \cdot 5\right) \sin\left(\frac{K\pi}{3} x\right) = \sum_{K=1}^{\infty} b_K \sin\left(\frac{K\pi}{3} x\right)$$

con $b_K = \begin{cases} \frac{4}{K\pi} & \text{se } K \text{ è dispari} \\ 0 & \text{se } K \text{ è pari} \end{cases}$

Pertanto $A_K = 0$ se K è pari e

$A_K \sinh\left(\frac{5K\pi}{3}\right) = \frac{4}{K\pi}$ se K è dispari

cioè $A_K = \frac{4}{K\pi \sinh\left(\frac{5K\pi}{3}\right)}$ se K è dispari.

Quindi la funzione che soddisfa le nostre condizioni è

$$u(x,y) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{4}{(2J+1)\pi \sinh\left(\frac{5(2J+1)\pi}{3}\right)} \sinh\left(\frac{\pi(2J+1)y}{3}\right) \sin\left(\frac{(2J+1)\pi}{3} x\right).$$

Facoltativo.

Non si tratta di una soluzione classica: infatti u non è continua in $(0,5)$ e in $(3,5)$. Infatti $u(x,5) = \sum_{J=0}^{\infty} \frac{4}{(2J+1)\pi} \sin \frac{(2J+1)\pi x}{3}$

e per la condizione (D) di Dirichlet $u(0,5) = \frac{u^+(0,5)+u^-(0,5)}{2} = 0$

mentre per ogni $x \in (0,3)$, $u(x,5) = 1$.

Inoltre $(K = 2J+1)$

$$\frac{\partial u_K}{\partial x} = \frac{\cancel{(2J+1)}\cancel{\pi}}{3} \cdot \frac{4}{\cancel{(2J+1)}\cancel{\pi} \sinh\left(\frac{5(2J+1)\pi}{3}\right)} \sinh\left(\frac{\pi(2J+1)y}{3}\right) \cos\left(\frac{(2J+1)}{3} x\right)$$

$$= \frac{4}{3\sinh\left(\frac{5}{3}(2J+1)\pi\right)} \sinh\left(\frac{\pi(2J+1)y}{3}\right)\cos\left(\frac{(2J+1)}{3}x\right)$$

Per ogni $\varepsilon>0$

$$\sup_{[0,3]\times[0,5-\varepsilon]} |u_k| \leq \frac{4}{3\sinh\left(\frac{5}{3}(2J+1)\pi\right)} \cdot \sinh\left(\frac{\pi(2J+1)(5-\varepsilon)}{3}\right)$$

$$\frac{\sinh b}{\sinh a} = \frac{e^{b}-e^{-b}}{e^{a}-e^{-a}} = \frac{e^{2b}-1}{e^{2a}-1} \cdot \frac{e^{a}}{e^{b}}$$

Se $a>b>0$ e a e b sono grandi $(a, b \to +\infty)$

$$\frac{\sinh b}{\sinh a} \sim \frac{e^{b}}{e^{a}} \sim e^{b-a}$$

Quindi

$$\sup_{[0,3]\times[0,5-\varepsilon]} |u_k| \leq C\, e^{-\frac{\pi(2J+1)}{3}\varepsilon}$$

Abbiamo dunque convergenza totale su $[0,3]\times[0,5-\varepsilon]$ e la possibilità di scabiare la derivata parziale rispetto ad x con la serie, purché vi sia convergenza puntuale in almeno un punto.

In effetti

$$\sup_{[0,3]\times[0,5-\varepsilon]} |u_k| \leq \frac{4}{2J+1} \frac{\sinh \frac{\pi(2J+1)(5-\varepsilon)}{3}}{\sinh \frac{\pi(2J+1)5}{3}} \leq C\frac{4}{2J+1} e^{-\frac{\pi(2J+1)}{3}\varepsilon}$$

e pertanto c'è convergenza totale anche di $\sum_{J=0}^{\infty} u_{2J+1}$.

Con analoghe considerazioni si conclude $u\in C^2((0,3)\times(0,5))$.