PROVA CONCLUSIVA DI COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA (SECONDO PARZIALE)

Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria Civile e Corso di Laurea Specialistica in Ingegneria per l'Ambiente e il Territorio A.A. 2006/2007

(Commissione Prof. F. Ferrari)

Data 15/12/2006
Cognome: Nome:
Corso di Laurea: Matricola

Esercizio 1

(a). (1 p.to) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Scrivere la convoluzione tra f e g.
(b). (1 p.to) Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R})$. Scrivere la trasformata di Fourier della convoluzione tra f e g.
(c). (1 p.to) Scrivere la trasformata di Fourier della funzione $h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ così definita.

$$h(x) = \begin{cases} e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

(d) (1 p.to) Se $\chi_{[-1,1]}$ indica la funzione caratteristica dell'intervallo $[-1, 1]$, cioè $\chi_{[-1,1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e

$$\chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [-1, 1] \\ 0, & \text{se } x \notin [-1, 1], \end{cases}$$

scrivere la trasformata di Fourier di $\chi_{[-1,1]}$.
(e). (2 p.to) Scrivere la trasformata di Fourier di $\chi * h$.
(f). (3. pti) Siano $f \in L^1(\mathbb{R})$ e $s \in \mathbb{R}$. Determinare, a partire dalla definizione di trasformata di Fourier, una formula utile per il calcolo della trasformata di Fourier di $g(x) = f(x-s)$ conoscendo la trasformata di Fourier di f.
(c). (1 p.ti) Calcolare la trasformata di Fourier di $h(x - 3)$.

Esercizio 2

Dato il sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases} \tag{1}$$

(a). (3 p.ti) Calcolare una matrice fondamentale di soluzioni per il sistema (4).
(b). (1 p.ti)Stabilire se l'origine è stabile per (4)
(c). (3 p.ti) Dato

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + 1 \\ y_2' = y_1 - y_2 - 1, \end{cases} \tag{2}$$

calcolare l'integrale generale di (2)

(d). (2 p.ti) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \\ y_1(0) = 1 \\ y_2(0) = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Esercizio 3 (Facoltativo: non utile ai fini del superamento della prova)
Sia

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial^2 x}, \ \ x \in \mathbb{R}, \ \ t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

(a). (2 p.ti)
Per ogni t fissato applicare la trasformata di Fourier alla precedente equazione alle derivate parziali . Scrivere l'equazione ottenuta.

(b). (1)Supponendo di poter scambiare la derivata calcolata rispetto al tempo con l'integrale cacolato rispetto ad x (cio è di poter permutare la trasormata di Fourier con la derivata rispetto al tempo) scrivere l'equazione differenziale risultante.

(c). (2 p.ti) Se indichiamo con $U(t)$ la trasformata di Fourier di $u(\cdot, t)$ per t fissato, risolvere il corrispondente problema di Cauchy con dato iniziale $U(0) = \mathcal{F}\phi(\xi)$, per ogni ξ fissato.