(1)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 3 \\ u(x,y) = y \quad , \quad \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x=0, \ y \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Scriviamo il sistema delle equazioni caratteristiche dopo aver osservato che l'equazione in questione è del primo ordine di tipo non lineare. In questo caso $F(p_1,p_2,z,x,y) = p_1 p_2^2 - 3$ e

$$\begin{cases} \dot{x} = p_2^2 \\ \dot{y} = 2p_1 \\ \dot{z} = p_1 p_2^2 + 2p_2^2 p_1 = 3 p_1 p_2^2 \\ \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases}$$

Le condizioni iniziali sono: $x(0)=0$, $y(0)=s$ con $s \in \mathbb{R}$.
Infatti Γ è parametrizzata da $s \longmapsto (0,s)$.

Inoltre $u(0,y)=y$ su Γ. Quindi $\dfrac{\partial u}{\partial y}(0,y) = 1$;
pertanto $p_2(0) = 1$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

D'altra parte su Γ $F(p_1,p_2,z,x,y) = F(p_1,p_2,z,0,s)$ per $s \in \mathbb{R}$, da cui segue essendo

$$p_1 p_2^2 - 3 = 0$$

che $p_1 = \dfrac{3}{p_2^2}$ e per $p_2 = 1$ avremo

$p_1(0) = 3$

Infine $z(0) = s$. Quindi le condizioni iniziali sono

$$\begin{cases} x(0)=0 \\ y(0)=s \\ z(0)=s \\ p_1(0)=3 \\ p_2(0)=1 \end{cases}$$

Il sistema delle caratteristiche è non lineare (in questo caso) e autonomo. Risolviamo le equazioni $\begin{cases} \dot{p}_1 = 0 \\ \dot{p}_2 = 0 \end{cases}$ con dati $p_1(0) = 3$ e $p_2(0) = 1$.

$p_1 = 3$ e $p_2 = 1$. Sostituiamo nell'equazioni precedenti ottenendo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 6 \\ \dot{z} = 9 \\ x(0) = 0 \\ y(0) = s \\ z(0) = s \end{cases}$$

la cui soluzione è $\begin{cases} x = t \\ y = 6t+s \\ z = 9t+s \end{cases}$

Possiamo allora ricavare $t = x$ e $s = y - 6x$ dalle prime due equazioni. Poi sostituendo nella terza otteniamo:

$$z = 9x + y - 6x$$

Quindi $z = 3x + y$ è la soluzione in forma cartesiana del problema di Cauchy assegnato.

② $\begin{cases} y' = -\dfrac{4x^2 + 5y}{5x + y - 1} \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

$f(x,y) = -\dfrac{4x^2+5y}{5x+y-1}$, quindi il dominio naturale è $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 5x + y - 1 = 0\}$. Quindi $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$

L'insieme D è aperto, inoltre $f \in C^\infty(D)$.

Quindi per ogni $(x_0, y_0) \in D$ esiste una ed una sola soluzione del problema di Cauchy. Inoltre la regolarità di tali soluzioni è C^∞ nel dominio di definizione. Risolviamo il problema di Cauchy per $x_0 = 1$ e $y_0 = 1$

Notiamo che $N(x,y) = 4x^2 + 5y$ e $M(x,y) = 5x + y - 1$

e $\dfrac{\partial N}{\partial y} = 5 = \dfrac{\partial M}{\partial x}$. Pertanto si tratta di una equazione differenziale esatta. La soluzione del problema di Cauchy è data da:

$$\int_1^y (5 + s - 1)\, ds + 4 \int_1^x (t^2 + 5y)\, dt = 0$$

Quindi $\left[4s + \dfrac{s^2}{2}\right]_{s=1}^{s=y} + 4\left[\dfrac{1}{3}t^3 + 5yt\right]_{t=1}^{t=x} = 0$,

cioè

$$4y + \frac{y^2}{2} - \frac{9}{2} + 4\left(\frac{1}{3}x^3 + 5yx - \frac{1}{3} - 5y\right) = 0,$$

da cui la soluzione in forma implicita

$$\frac{4}{3}x^3 - 16y + \frac{y^2}{2} + 20xy - \frac{35}{6} = 0.$$

③
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 5\dfrac{\partial u}{\partial x} & (0,1)\times(0,\infty) \\ u(1,t) = 0, \quad u(0,t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x,0) = e^{-\frac{5x}{6}} h \end{cases} \quad \text{con } h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\right), & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Procediamo per separazione di variabili cercando $u(x,t) = X(x)T(t)$. Sostituiamo ottenendo

$$XT' = 3X''T + 5X'T$$

$$X(1,t) = X(1)T(t) = 0, \quad X(0,t) = X(0)T(t) = 0$$

Pertanto $\dfrac{T'}{T} = 3\dfrac{X''}{X} + 5\dfrac{X'}{X} = \lambda$ e $X(1) = 0$, $X(0) = 0$

per ottenere soluzioni non banali.

Risulta allora $(PL)\begin{cases} 3X''+5X'-\lambda X=0 \\ X(0)=0 \\ X(1)=0 \end{cases}$ con λ da determinare

$3\gamma^2+5\gamma-\lambda=0$ è l'equazione caratteristica

quindi (i) se $\Delta=25+12\lambda>0 \Rightarrow \gamma_{1,2}=\dfrac{-5\pm\sqrt{25+12\lambda}}{6}$

(ii) se $\Delta=25+12\lambda=0 \Rightarrow \gamma=-\frac{5}{6}$ con molteplicità due

(iii) se $\Delta=25+12\lambda<0 \Rightarrow \gamma_{1,2}=\dfrac{-5\pm i\sqrt{|25+12\lambda|}}{6}$

Nel caso (i) $V_2=\operatorname{span}\left\{e^{-\frac{5}{6}x}\cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{6}x\right), e^{-\frac{5}{6}x}\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{6}x\right)\right\}$

e pertanto $c_1=0$ e $c_2e^{-\frac{5}{6}}\sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{6}\right)=0$

implica che esiste la sola soluzione banale a (PL). (se $\Delta>0$).

Nel caso (ii) $V_2=\operatorname{span}\left\{e^{-\frac{5}{6}x}, xe^{-\frac{5}{6}x}\right\}$ e quindi

$c_1=0$ e $c_2e^{-\frac{5}{6}}=0 \Rightarrow c_1=c_2=0$, cioè non ci sono autovalori e se $\Delta=0$.

Nel caso (iii) $V_2=\operatorname{span}\left\{e^{-\frac{5}{6}x}\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{6}x\right), e^{-\frac{5}{6}x}\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{6}x\right)\right\}$

Pertanto imponendo a $c_1e^{-\frac{5}{6}x}\cos\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{6}x\right)+c_2e^{-\frac{5}{6}x}\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{6}x\right)$

le condizioni $X(0)=0=X(1)$, otteniamo:

$c_1=0$ e $c_2e^{-\frac{5}{6}}\sin\left(\frac{\sqrt{|\Delta|}}{6}\right)=0$ da cui

$\frac{\sqrt{|\Delta|}}{6}=k\pi, \quad k\in\mathbb{Z}$ da cui $|\Delta|=36k^2\pi^2$

e $25+12\lambda=-36k^2\pi^2$ (perché $\Delta<0$).

Avremo allora $\lambda_k=\dfrac{-25-36k^2\pi^2}{12}$ e $\left\{e^{-\frac{5}{6}x}\sin(k\pi x)\right\}_{k\in\mathbb{N}}$

come famiglia di funzioni che sono autosoluzioni di (PL.)

Per quanto riguarda T invece risulta

$T_K' = T_K \lambda_K$ da cui segue $T_K = C_K e^{\lambda_K t}$

cioè $T_K(t) = C_K e^{-\frac{25+36K^2\pi^2}{12}t}$ con C_K da determinare. Per soddisfare la condizione $u(x,0)=e^{-\frac{5}{6}x}h$ grazie alla linearità dell'operatore cerchiamo C_K in modo tale che

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_K e^{-\frac{25+36K^2\pi^2}{12}t} e^{-\frac{5}{6}x} \sin(K\pi x)\Big|_{t=0} = e^{-\frac{5}{6}x} h(x)$$

Quindi

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_K e^{-\frac{5}{6}x} \sin(K\pi x) = e^{-\frac{5}{6}x} h(x),$$

da cui

$$\sum_{k=1}^{\infty} C_K \sin(K\pi x) = h(x).$$

Vogliamo allora scrivere h come serie di Fourier di seni. Se prolunghiamo h come funzione dispari su $[-1,1]$ avremo

$$h(x) \sim \sum_{K=1}^{\infty} b_K \sin(K\pi x)$$

con $b_k = 2\int_0^1 h(s)\sin(K\pi s)\,ds$.

Pertanto

$$b_k = 2\left\{\int_0^{1/2} s^2 \sin(K\pi s)\,ds + \int_{1/2}^{1}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}s+\frac{1}{4}\right)\sin(K\pi s)\,ds\right.$$

$$= 2\left\{\left[-\frac{s^2\cos(K\pi s)}{K\pi}\right]_{s=0}^{s=1/2} + \frac{2}{K\pi}\int_0^{1/2} s\cos(K\pi s)\,ds + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-s)\sin(K\pi s)\,ds\right.$$

$$= 2\left\{ -\frac{1}{4}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} + \frac{2}{(k\pi)^2}\Big[s\sin(k\pi s)\Big]_{s=0}^{s=1/2} - \frac{2}{(k\pi)^2}\int_0^{1/2}\sin(k\pi s)\,ds \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(k\pi s)}{(k\pi)}(1-s)\right]_{s=1/2}^{s=1} - \frac{1}{2}\int_{1/2}^{1}\frac{\cos(k\pi s)}{k\pi}\,ds \right\}$$

$$= 2\left\{ \cancel{-\frac{1}{4}\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi}} + \frac{2}{(k\pi)^2}\,\frac{1}{2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{(k\pi)^2}\left[\frac{\cos k\pi s}{k\pi}\right]_{s=0}^{s=1/2} \right.$$

$$\left. + \cancel{\frac{\cos\frac{k\pi}{2}}{4(k\pi)}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(k\pi s)}{(k\pi)^2}\right]_{s=1/2}^{s=1} \right\}$$

$$= 2\left\{ \frac{\sin\frac{k\pi}{2}}{(k\pi)^2} + \frac{2}{(k\pi)^2}\left(\frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right)}{k\pi} - \frac{1}{k\pi}\right) + \frac{1}{2(k\pi)^2}\left(\sin(k\pi) - \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right)\right) \right\}$$

$$= 2\left(\frac{1}{2(k\pi)^2}\sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \frac{2}{(k\pi)^3}\left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) - 1\right) \right)$$

Poniamo $c_k = b_k$ e pertanto la funzione candidata ad essere soluzione classica del nostro problema di Cauchy Dirichlet è

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\, e^{-\frac{25+36k^2\pi^2}{12}t}\, e^{-\frac{5}{6}x}\sin(k\pi x).$$

P. verificare la continuità di tale proviamo la convergenza totale della serie. In particolare

$$\sup_{[0,1]\times[0,1]}\left| b_k\, e^{-\frac{25+36k^2\pi^2}{12}t}\, e^{-\frac{5}{6}x}\sin(k\pi x)\right| = |b_k| \le \frac{3}{(k\pi)^2}.$$

Pertanto la serie è assolutamente convergente.

Quindi è anche uniformemente convergente e poiché le funzioni k-esime di tale serie sono continue risulterà che anche u è continua.

④ Siano $f = x^2\chi_{[-2,2]}$ e $g = x^4\chi_{[-8,8]}$.

Poiché $f,g \in L^1$ possiamo calcolare $\mathcal{F}f$ e $\mathcal{F}g$. In particolare

$$\mathcal{F}f(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}\, x^2 \chi_{[-2,2]}(x)\,dx = \int_{-2}^{2} x^2 e^{-ix\xi}\,dx$$

$$= \left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}x^2\right]_{x=-2}^{x=2} + \frac{2}{i\xi}\int_{-2}^{2} e^{-ix\xi}x\,dx =$$

$$= \frac{4}{i\xi}\left(-e^{-2i\xi}+e^{2i\xi}\right) + \frac{2}{i\xi}\left(\left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}x\right]_{x=-2}^{x=2} + \int_{-2}^{2}\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\,dx\right)$$

$$= \frac{8\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{2}{(i\xi)}\left(\frac{-2e^{-i2\xi}}{i\xi} - \frac{2e^{+i2\xi}}{i\xi} + \frac{1}{i\xi}\left[-\frac{e^{-ix\xi}}{i\xi}\right]_{x=-2}^{x=2}\right)$$

$$= \frac{8\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{8}{\xi^2}\cos(2\xi) + \frac{2}{(i\xi)^2}\left(\frac{-e^{-2i\xi}+e^{2i\xi}}{i\xi}\right)$$

$$= \frac{8\sin(2\xi)}{\xi} + \frac{8}{\xi^2}\cos(2\xi) - \frac{4}{\xi^3}\sin(2\xi)$$

Analogamente

$$\mathcal{F}g(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}x^4\chi_{[-8,8]}(x)\,dx = \int_{-8}^{8} e^{-ix\xi}x^4\,dx$$

Quindi integrando per parti otterremo $\mathcal{F}g$.
(Si omettono i calcoli espliciti)
Finalmente risulterà

$$\mathcal{F}(f*g)(\xi) = (\mathcal{F}f)(\xi) \cdot (\mathcal{F}g)(\xi).$$