

Seconda prova parziale di Complementi di Analisi Matematica LS e di Complementi di Analisi Matematica LM del 12/12/2008

CdLS Ambiente e Territorio, CdLM Chimica e di Processo A.A.08/09
(Comm. Prof. F. Ferrari)

Esercizio [8 p.ti]

Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 7 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, & (0, 1) \times (0, 1) \\ u(x, 0) = 0, \quad u(x, 1) = 0, \quad u(0, y) = 0, \\ u(1, y) = g(y), \end{cases}$$

dove $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$g(y) = \begin{cases} y, & \text{se } y \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 - y & \text{se } y \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Esercizio [4 punti] Risolvere il seguente problema:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 4 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, & (-\infty, \infty) \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = \sin(x), \\ u_t(x, 0) = \chi_{(-2, 2)}, \end{cases}$$

calcolando esplicitamente la soluzione.

Esercizio [6 punti] Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema semilineare di Cauchy

$$(1) \quad \begin{cases} u^2 \frac{\partial u}{\partial x} + 4u \frac{\partial u}{\partial y} = 4, \\ u = H \text{ su } \Gamma \subset \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

dove $H : \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1 e Γ è una curva regolare parametrizzata da $(f, g) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Rispondere, motivando accuratamente ogni affermazione, alle seguenti domande.

- (a) Scrivere una soluzione locale del problema in forma parametrica indicando $h(s) = H(f(s), g(s))$.
(b) Se $f(s) = s$, $g = 0$ e $h(s) = 3$ scrivere in forma cartesiana una soluzione locale del problema di Cauchy assegnato. (c) Nelle ipotesi (b), esiste sempre una soluzione locale del problema di Cauchy? (d) Nelle ipotesi (b), esistono punti caratteristici per Γ ?