Seconda prova parziale di Complementi di Analisi Matematica LS e di Complementi di Analisi Matematica LM del 07/01/2009 (esercizi 1-3 durata 2 ore)

CdLS Ambiente e Territorio, CdLM Chimica e di Processo A.A.08/09 (Comm. Prof. F. Ferrari)

Nome.................. Cognome.................. Mat............ CdLS/CdLM.........

Secondo appello di Complementi di Analisi Matematica LS e di Complementi di Analisi Matematica LM del 07/01/2009 (esercizi 1-4 dura 3 ore)

CdLS Ambiente e Territorio, CdLM Chimica e di Processo A.A.08/09 (Comm. Prof. F. Ferrari)

Nome.................. Cognome.................. Mat............ CdLS/CdLM.........

---

(1) Esercizio 1 [8 p.ti sec. parz.] [11 p.ti appello] Risolvere mediante separazione di variabili il seguente problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = 2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 3th(x), \ \ (0,1)\times(0,\infty) \\ u(1,t) = 0, \ \ u(0,t) = 0, \ \ t \geq 0 \\ u(x,0) = 0, \ \ x \in [0,1] \end{cases}$$

dove $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ e

$$h(x) = \begin{cases} -x, \ \text{ se } x \in [0, \frac{1}{2}), \\ -1 + x, \ \text{ se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

La soluzione trovata è continua ? Motivare la risposta.

---

(2) Esercizio 2 [6 p.ti sec. parz.] [10 punti appello] Risolvere con il metodo delle caratteristiche il seguente problema semilineare di Cauchy

$$\begin{cases} x\dfrac{\partial u}{\partial x} + u\dfrac{\partial u}{\partial y} = y, \\ u(x,y) = 2y, \ \text{ su } \Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = 1, \ y \in \mathbb{R}\}. \end{cases} \tag{1}$$

Rispondere, motivando accuratamente ogni affermazione, alle seguenti domande: (a) Scrivere la soluzione del problema in forma parametrica. (b) Scrivere la soluzione in forma cartesiana. (c) Esiste sempre una soluzione locale del problema di Cauchy? (d) Esistono punti caratteristici per Γ?

(3) Esercizio 3 [4p.ti sec parz.] [4 p.ti appello] Calcolare la trasformata di Fourier di $g = \chi_{[-2,2]} * \chi_{[-3,3]}$.

(4) Esercizio 4 [5 punti appello] Calcolare l'integrale generale del seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} x' = -3x + 4y \\ y' = -x - 2y. \end{cases} \tag{2}$$

Se ϕ è una qualunque soluzione del nostro sistema, allora $\|\phi\| \to 0$ per $t \to \infty$? Motivare la risposta.