Tassellatura periodica fra matematica e arte: Escher

Chiara Gandolfi, classe IV C
Liceo Scientifico N. Copernico, Bologna
A.S. 2005/2006

Indice:

1. primo incontro

1.1 chi era Escher

Escher era un matematico e un artista olandese, anche se sarebbe meglio dire un matematico-artista. Non si possono infatti separare in lui questi due aspetti. Nasce in Olanda a Leeuwarden nel 1898 e all'età di 23 anni visita l'Alhambra di Granada. Da questo momento inizierà la sua passione (lui la definirà *"un'autentica "mania", a cui sono ormai assuefatto, e da cui talvolta mi è difficile allontanarmi")* per le tassellature periodiche del piano. Rimasto affascinato dalle intriganti decorazioni dell'Alhambra nelle quali sono riconoscibili tutti i 17 gruppi cristallografici, Escher produrrà disegni utilizzando 16 di questi.

Da aggiungere è l'originale ricerca di Escher nel come usare il colore: un tocco armonico per facilitare il riconoscimento delle diverse figure, le quali svolgono sia il ruolo di immagine dominante, che di sfondo. Si possono così scoprire nuove simmetrie da applicare all'immagine escheriana considerando i diversi colori o senza distinguerli.

Escher morirà a 73 anni, nel 1972, lasciandoci in eredità una vastissima collezione di opere d'arte di notevole bellezza e anche di interesse più matematico e geometrico.

In queste quattro lezioni abbiamo studiato alcune delle sue opere cercando poi di smontarle e di ricostruirle per capirle e conoscerle meglio.

1.2 simmetrie

Quello che appare subito evidente guardando un'immagine di Escher è il numero incredibile di trasformazioni che ci si possono applicare senza modificare l'immagine (i disegni escheriani sono infatti pensati per essere illimitati e quindi uno stesso vettore può ad esempio essere riapplicato infinite volte). Abbiamo quindi provato inizialmente a cercare tutte le trasformazioni geometriche possibili che mutano l'immagine in se stessa, queste prendono il nome di simmetrie della figura.

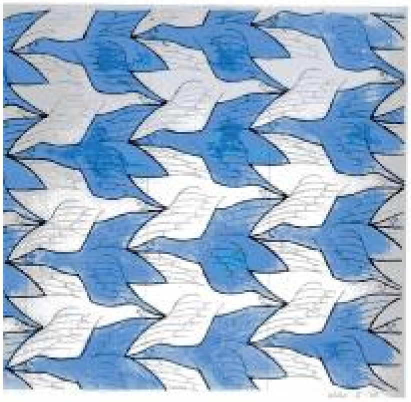
Una volta trovate le simmetrie è bene individuare la cella unitaria dell'immagine, ovvero il parallelogrammo costituito da due vettori che generano tutte le traslazioni possibili della figura. La cella unitaria può variare dimensioni a seconda che si considerino i diversi colori o che non lo si faccia.

In terzo luogo si procede ad individuare il dominio fondamentale, il quale non sempre coincide con la cella unitaria, poiché è il minimo sottoinsieme del piano che genera tutta la figura attraverso l'applicazione delle diverse trasformazioni, non solo delle traslazioni.

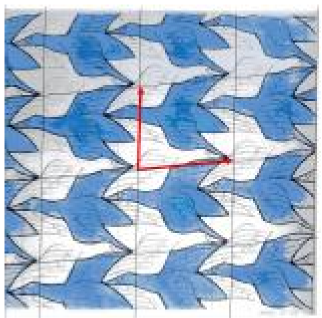
In ultimo abbiamo cercato di capire, fra le tante trovate, quali fossero le trasformazioni generatrici, ovvero quelle che componendosi fra loro danno anche tutte le altre.

1.3 esempi

1.3.1 esempio delle oche



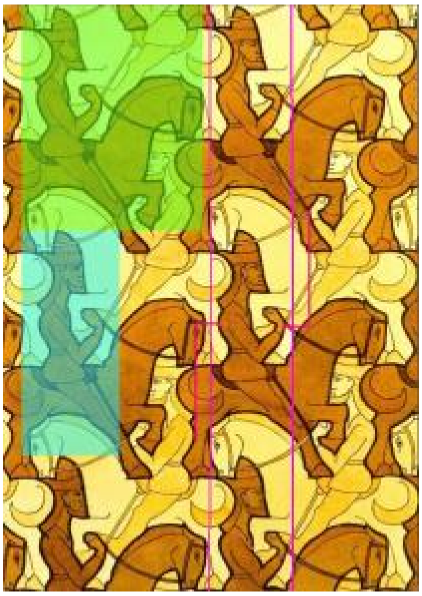
In questo disegno si hanno due figure diverse: le oche bianche e le oche azzurre che differiscono non solo per il colore (si possono infatti notare differenze nel becco e nella coda), quindi le trasformazioni che si trovano sono le stesse sia che si consideri il colore oppure no.



Si nota che le oche seguono una fila e sono in colonna, le simmetrie della figura sono perciò solamente i vettori che generano la cella unitaria e le loro composizioni. In questo caso cella unitaria e dominio fondamentale coincidono.

1.3.2 esempio dei cavalieri

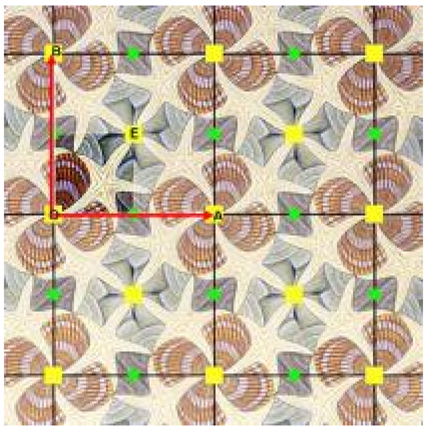
In questa seconda immagine il cavaliere bianco e il cavaliere nero sono perfettamente sovrapponibili (con la dovuta trasformazione).



Considerando i colori lo studio dell'immagine è analogo al caso delle oche, più interessante è invece guardarlo senza prendere in considerazione questa differenza fra i due cavalieri.
Si nota che applicando una glisso-riflessione si trasforma un cavaliere bianco in uno nero e viceversa. L'asse di questa trasformazione è obbligatoriamente verticale, o fra le schiene o fra i polsi, con un vettore diretto verso l'alto o verso il basso di modulo pari a metà del vettore relativo alla traslazione verticale. Nell'immagine a destra si vede come la cella unitaria (verde) sia più grande del dominio fondamentale (azzurro).

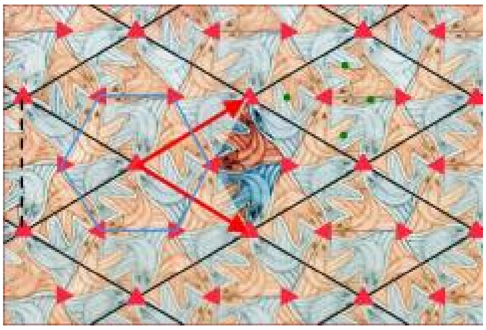
1.3.3 esempio delle conchiglie

L'immagine a fianco ha tre figure principali: un gruppo di conchiglie rosse, una stella marina gialla e altre conchiglie diverse per colore e forma dalle prime, si può quindi analizzare il disegno indipendentemente dai colori.
Si nota che la cella unitaria è il quadrato che unisce il centro delle conchiglie rosse (o delle conchiglie verdi, indifferentemente), grazie ai due vettori generatori, uno verticale e l'altro orizzontale. Il dominio fondamentale è però un quarto di questa, infatti si possono applicare nei centri dei gruppi di conchiglie (quadratini gialli) delle rotazioni di 90°. Nei due vertici rimanenti del dominio (punti verdi) si possono applicare solo due rotazioni di 180° (considerando le conchiglie rosa aventi un centro di simmetria).



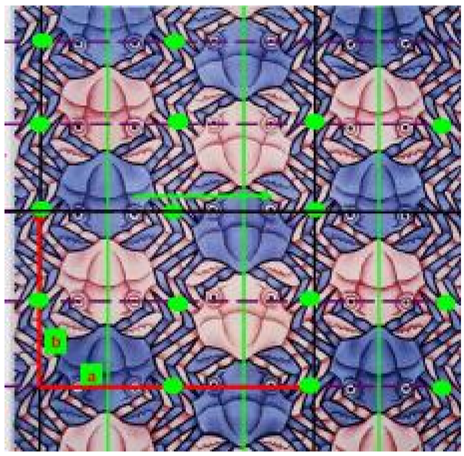
1.3.4 esempio dei pesci

Restando sul tema marino, Escher ci propone un disegno di pesci rossi e grigi, diversi fra loro solo per il colore. Notiamo immediatamente che i pesci sono a gruppi di sei e che ogni pesce può essere considerato in tre differenti cerchi, a seconda che ponga nel centro la bocca, la pinna o la pinna dorsale. Considerando i colori possiamo trovare solo delle traslazioni o delle rotazioni di 120° con centro nei triangoli rossi. Per quanto riguarda la cella unitaria è sempre il rombo delimitato dai due vettori rossi, mentre il dominio fondamentale è il rombo più acceso (nel disegno a lato). Senza distinguere i due colori la cella rimane uguale, ma il dominio è la metà di quello predente: infatti si hanno delle rotazioni di 60° con centro nei triangoli rossi. In ultimo si hanno delle simmetrie centrali (con centro nei punti verdi) che trasformano pesci rossi in pesci blu e viceversa.

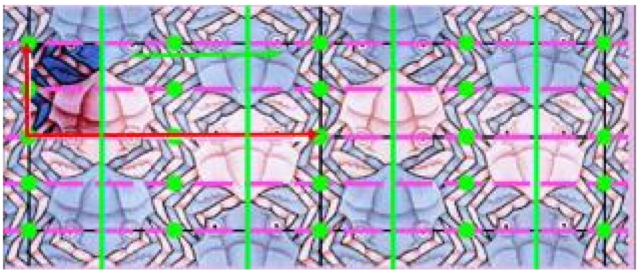


1.3.5 esempio dei granchi

Come ultimo esempio prendiamo in considerazione questo disegno sui granchi.



Converrà per questa immagine analizzarla prima considerando la diversità di colore e poi passare ad enunciare le differenze che si trovano senza considerala.
I vettori generatori (a, b) sono lunghi "due granchi" sia in verticale che in orizzontale, individuando un rettangolo contenete quattro granchi come cella unitaria, il dominio è rappresentato invece dalla metà di questa (metà granchio rosa e metà blu). Fra gli esempi riportati è l'unico che gode di una simmetria assiale, tutti gli assi sono verticali e dividono in due i granchi. I punti verdi rappresentano simmetrie centrali (o anche rotazioni di 180 gradi), mentre le righe viola tratteggiate sono gli assi delle possibili glissoriflessioni.
Nell'immagine a sinistra si può notare che se non si considerano le diversità di colori la cella



unitari si dimezza (la componente verticale infatti è lunga un solo granchio) e di conseguenza anche il dominio è la metà (si nota di un colore più acceso). Le glisso-riflessioni (tratteggi fucsia) e simmetrie centrali (pallini verdi) sono raddoppiati in quanto ne abbiamo anche che trasformano granchi rosa in granchi blu.

2. secondo incontro

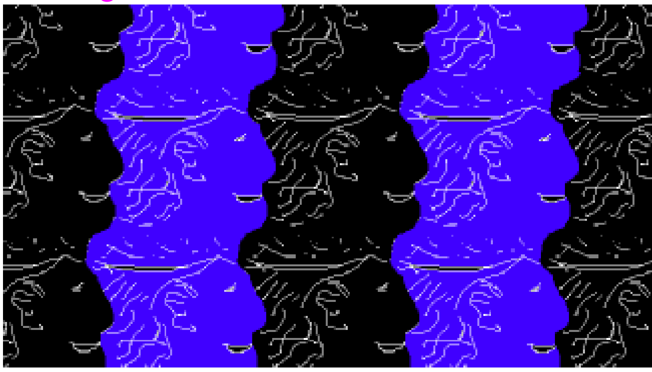
2.1 ora è il nostro turno

Ci sono molti programmi che si possono usare per costruire tassellature “alla Escher”. Sicuramente il programma più semplice è Paint, con cui si possono fare disegni più liberi (come può essere un volto), mentre per disegni più geometrici conviene utilizzare programmi più specifici quali possono essere Cabrì o AutoCad.

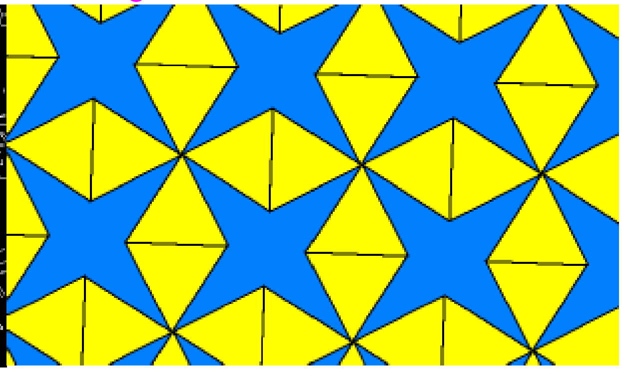
Innanzitutto occorre costruire la figura (o le figure) di partenza del proprio disegno. Un modo semplice per cominciare è quello di partire da un quadrato (che siamo sicuri che possa ricoprire interamente il nostro piano) e disegnarci. Per migliorare l’effetto si posso anche modificare i contorni del nostro quadrato: si taglia da un lato e si incolla dall’altra parte così che le figure si incastrino fra di loro.

2.2 esempi

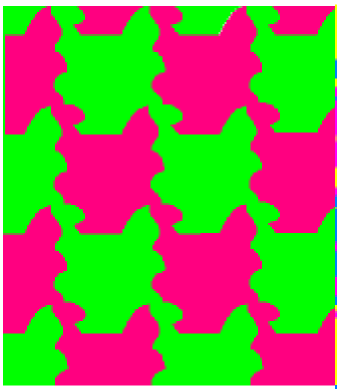
2.2.1 il greco

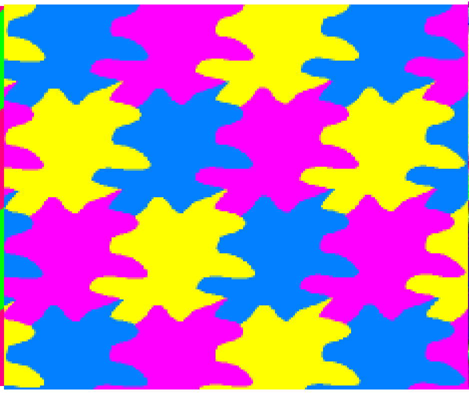


2.2.2 la girandola

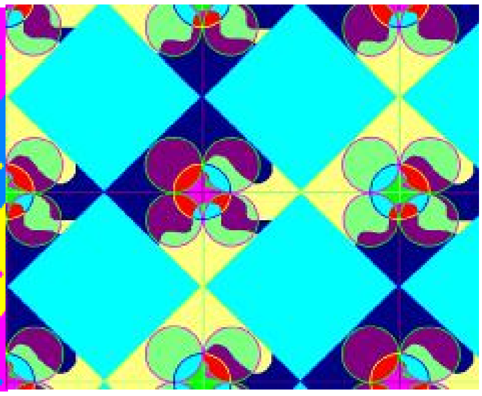


2.2.3 macchie





2.2.4 piastrelle



Tutti questi esempi possono essere costruiti grazie a delle traslazioni e non vi sono altre simmetrie della figura, eccetto che per la girandola che ha anche rotazioni (come suggerisce il suo nome) di 90° e di 180°.

2.2.5 stelle e sfere

Altre volte può capitare che ci si trovi di fronte a tassellature del piano non periodiche come nei casi mostrati nelle prossime immagini da me realizzate con Autocad. La prima figura gode di rotazioni di 72° e di 5 possibili assi di simmetria, ma la stella centrale non si ripeterà mai più nel piano. Non ci sono traslazioni possibili.

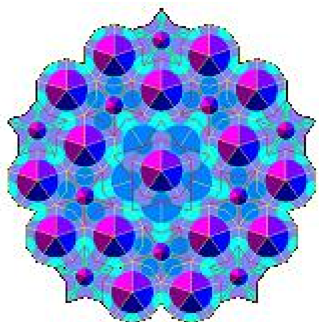


Figura 1

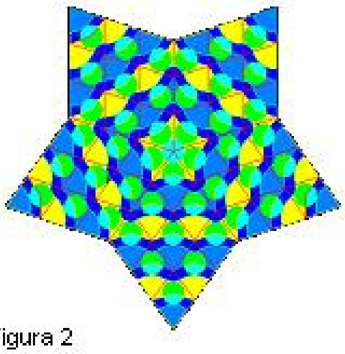


Figura 2

Nel secondo caso (Figura 2), ottenuto a partire dagli stessi elementi base della Figura 1, nuovamente le simmetrie sono delle rotazioni; potremmo anche separare i 5 spicchi e ricomporli come nella Figura 3, ma il disegno diventerebbe analogo alla serie precedenti e sono possibili solo traslazioni. Ci rendiamo quindi conto di come sia difficile costruire disegni belli e ricchi anche da un punto di vista delle trasformazioni.

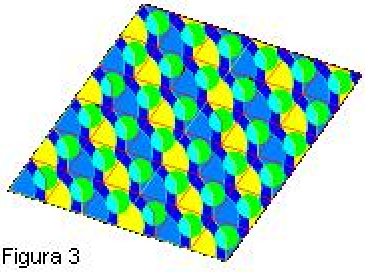


Figura 3

3. terzo incontro

3.1 cos'è un gruppo?

Per definizione un insieme A munito di un'operazione $\oplus$ è un gruppo $(A;\oplus)$ se dati a piacere tre elementi dell'insieme A, allora: $\forall a,b,c \in A$

- l'operazione $\oplus$ è associativa, $a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$;
- esiste l'elemento neutro u, $a \oplus u = u \oplus a = a$;
- ogni elemento a ammette un simmetrico a', $a \oplus a' = u = a' \oplus a$.

Il simbolo $\oplus$ rappresenta un' operazione binaria in A.

Un esempio di gruppo è l'insieme dei numeri interi e la somma (Z,+), in cui l'elemento neutro è lo zero e il simmetrico di ogni numero è il suo opposto. Nel caso della moltiplicazione, invece, occorre considerare l'insieme dei numeri razionali privati dello zero per ottenere un gruppo (Q_0,x) (non avrebbe infatti il proprio simmetrico lo zero), l'elemento neutro è l'uno e il simmetrico la frazione inversa.

3.2 …e un gruppo ciclico?

Prima di parlare di gruppi ciclici occorre definire cos'è una potenza secondo una data operazione. Preso un gruppo (A, ♪) e un suo elemento a, si considerino le seguenti uguaglianze:

$a^1 = a$, $a^2 = a$ ♪ a, $a^3 = a$ ♪ a ♪ a, $a^4 = a$ ♪ a ♪ a ♪ a, …

cioè le *potenze* di a secondo l'operazione ♪ ,

Poniamo per definizione

$a^0 = u$, $a^{-n} = (a^{-1})^n$

dove con a^{-1} indichiamo il simmetrico di a.

Abbiamo così definito tutte le potenze di a ad esponente intero.

Per capire meglio possiamo considerare il gruppo (Z,+) dove per a=5 risulta che, utilizzando la notazione moltiplicativa:

$$\ldots,\ a^{-2} = -10,\ a^{-1} = -5,\ a^0 = 0,\ a^1 = 5,\ a^2 = 10,\ a^3 = 15, \ldots$$

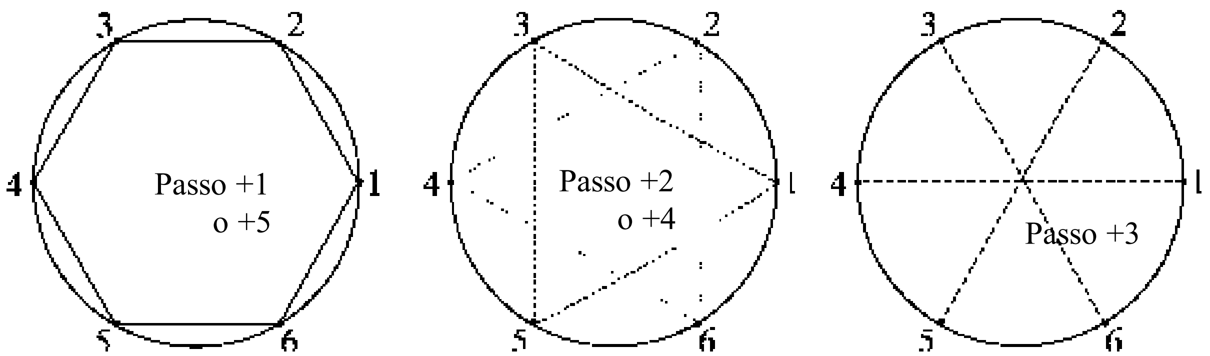
Possiamo ora passare a definire cos'è un gruppo ciclico:

"Un gruppo (A,♪) si dice ciclico se tutti i suoi elementi si possono esprimere come potenze di uno stesso elemento a ∈A. Si dice che a è un generatore del gruppo A, oppure che A è generato da a".

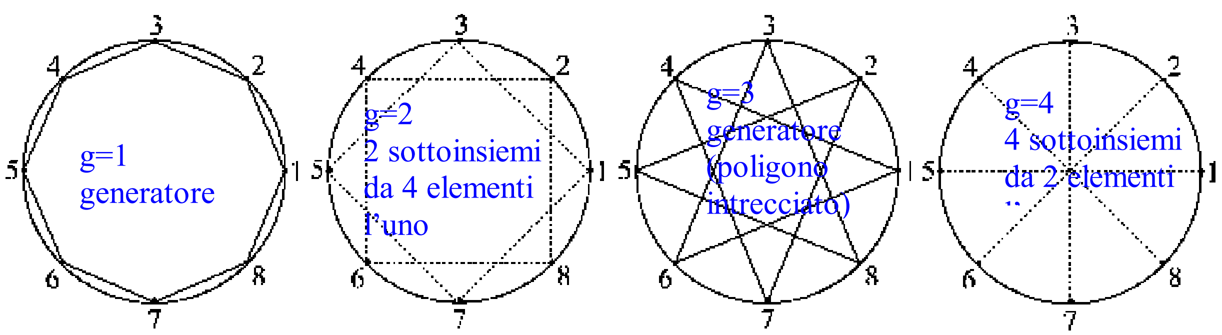
3.3 esempi

3.3.1 poligono regolari

Un poligono è regolare se i suoi lati e i suoi angoli sono tutti congruenti fra loro. Le due condizioni non sono una conseguenza dell'altra (tranne nel caso del triangolo equilatero), in fatti ad esempio il rombo ha solo i lati uguali e il rettangolo ha solo gli angoli tutti di 90°.
I poligoni regolari possono essere convessi (come generalmente li consideriamo, ma non è necessario) oppure concavi e quindi si avranno poligoni intrecciati.
Ogni poligono regolare, per motivi di simmetria, è inscrittibile in una circonferenza in cui gli n vertici di tale poligono poggiano sulla circonferenza e segnano su essa n archi congruenti. Per congiungere questi vertici abbiamo a disposizione $^n/_2$ modi diversi: partendo da un vertice qualsiasi possiamo saltare al successivo, oppure aggiungere due, tre.. fino ad $^n/_2$ in quanto andando più avanti ci accorgeremmo che riprodurremmo gli stessi poligoni e occorre che il passo sia costante per avere archi uguali a cui corrispondono corde (i lati del nostro poligono) uguali.
Possiamo ora riallacciarci al discorso dei gruppi.



Consideriamo ora (j ,+) un **gruppo finito di ordine *n*** (ordine è il numero degli elementi del gruppo e quindi dei vertici del poligono). Per ogni suo elemento *g,* l'insieme dei multipli (notazione additiva) di *g* è un sottogruppo di (j ,+), che si dice **generato** da *g* (come nel caso di n=6 e g=2 si hanno due sottoinsiemi {1,3,5}e{2,4,6}) .Come abbiamo detto il gruppo (j ,+) si dice **ciclico** se esiste un suo elemento *g* tale che il sottogruppo generato da *g* coincida col gruppo stesso(si veda per esempio con g=1 o con g=5, non è infatti necessario che esista un solo generatore). Un altro esempio può essere visto nell'immagine in basso:



Da ciò si nota molto bene che se n e g sono numeri primi fra loro, allora g si dice generatore di j e si ottiene un poligono regolare convesso per g=1 o intrecciato negli altri casi (un poligono diverso per ogni g compreso fra 2 e $^{n}/_{2}$), altrimenti si hanno dei sottoinsiemi (quindi altri poligoni aventi un numero minore di lati) tali che il numero degli elementi di tali sottoinsiemi per g ridanno n (n=kg, dove g rappresenta il passo e il numero di sottoinsiemi, mentre k è il numero di elementi dei sottoinsiemi) .
Concludendo ogni poligono regolare è un esempio di gruppo ciclico.

3.3.2 gruppo (T, ●)

In questo caso T rappresenta l'insieme delle traslazioni e ●l'operazione di composizione.
Per quanto riguarda l'elemento neutro, questo esiste ed è il vettore nullo. Il simmetrico di ogni vettore è il vettore avente stessa direzione, ma verso opposto.
Per quanto riguarda la proprietà associativa, questa è quella che si usa ogni qual volta occorre comporre più vettori. Per capire meglio potremmo fissare sul nostro piano i due assi cartesiani. Ogni vettore sarebbe così scomponibile nelle due direzioni parallele ai due assi. Il vettore risultante dalla composizione di tre o più vettori avrebbe anch'esso le due componenti orizzontale e verticale rispettivamente somma delle varie componenti orizzontali e verticali. Si riconduce quindi la somma vettoriale a una semplice somma aritmetica, per cui vale la proprietà associativa.
In generale però sappiamo che la composizione di funzioni gode della proprietà associativa, quindi daremo per provata tale proprietà per le trasformazioni geometriche che sono funzioni biunivoche del piano in se stesso.

3.3.3 gruppo (R, ●)

Lo stesso discorso si può fare riguardo alle rotazioni. L'elemento neutro è la rotazione di angolo 0°. Qualsiasi rotazione può essere annullata con un'altra avente lo stesso centro e come angolo l'angolo opposto.

3.3.3 il periodo

Il periodo ci indica quante volte occorre applicare la stessa rotazioni affinché si ritorni al punto di partenza. Ad esempio se abbiamo una rotazione di 60° occorre applicarla sei volte prima di riottenere l'immagine di partenza:

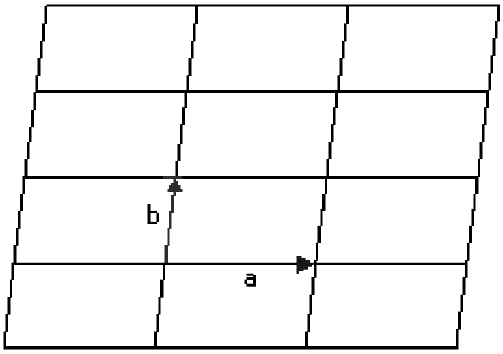
Più in generale possiamo dire che ogni rotazione di angolo • ha come periodo 360°/•, infatti 360°/60°=6. Possiamo anche dire che la rotazione di 60° è una rotazione di ordine 6.

4. quarto incontro

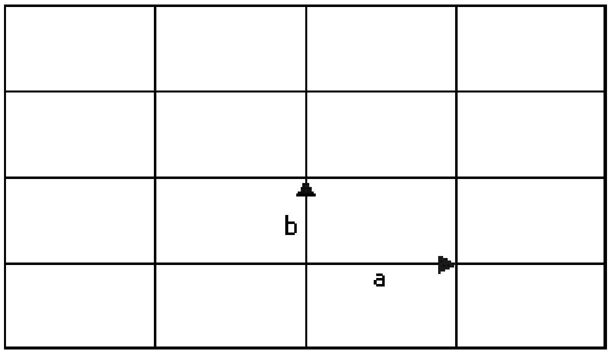
4.1 reticoli

Torniamo ora ai disegni di Escher. Eravamo arrivati a definire le varie trasformazioni della figura che la mutano in se stessa. Nell'ultimo incontro abbiamo cercato di classificare queste immagini secondo i vari gruppi cristallografici esistenti, ma per far questo dobbiamo inizialmente catalogare i diversi reticoli. Come già detto ogni disegno ha una propria cella unitaria e questa è formata dai vettori che generano tutti gli altri. La forma di questo parallelogrammo formato dai vettori a e b ci dà una prima classificazione secondo 5 tipi di reticoli.

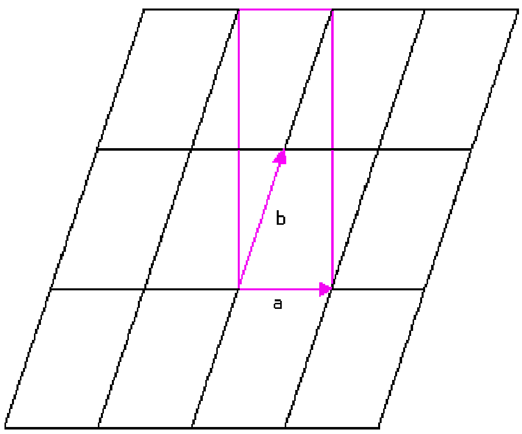
4.1.1 obliquo o parallelogrammo se $| a | \neq | b | \neq | a - b | \neq |a + b |$



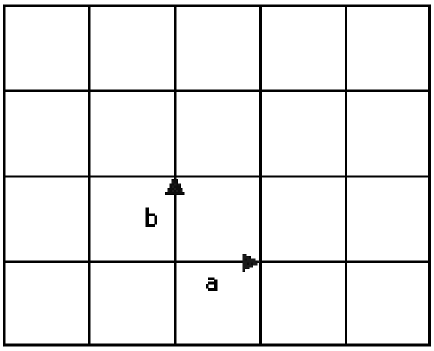
4.1.2 rettangolare se $| a | \neq | b |$ e $| a - b | = | a + b |$



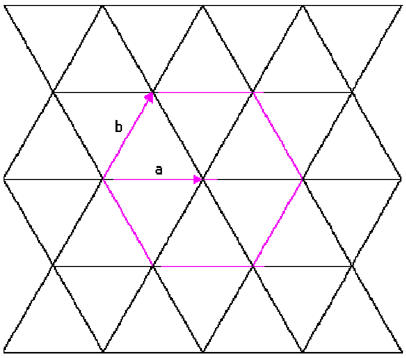
4.1.3 rettangolare centrato, se $| a | \neq | b |$, $| b | = | a - b |$, $| a - b | \neq | a + b |$



4.1.4 quadrato se | a | = | b | e | a - b | = | a + b |



4.1.5 esagonale, | a | = | b | = | a - b | ≠ | a + b |



Potrebbe sembrare che da questa classificazione sia escluso il caso | a | = | b | | b | ≠ | a - b| | a - b| ≠ |a + b| , ma questo è riconducibile alla struttura rettangolare in quanto si avrebbe un parallelogramma a forma di rombo le cui diagonali si incontrano e formano angoli retti e quindi si possono prendere come vettori base a-b e a+b.

4.2 gruppi cristallografici piani

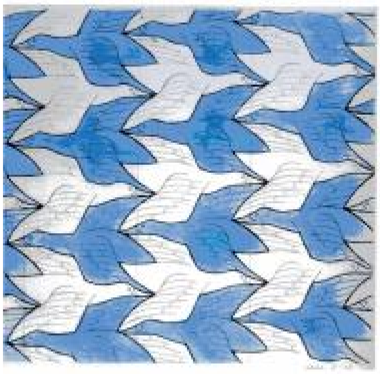
Ogni gruppo cristallografico in due dimensioni ("wallpaper group"), viene indicato con un nome che ha una simbologia internazionale che sfrutta i caratteri *p*, *c*, *m*, *g* e i numeri *1*, *2*, *3*, *4*, *6*. La lettera *p* sta per *primitive* e si riferisce ad un reticolo fatto di celle primitive, cioè ad un reticolo formato da copie del parallelogrammo di base che non contengono al loro interno altri punti del reticolo. Solo nel caso in cui il reticolo è rettangolare centrale si parla di celle non-primitive e si usa *c* per indicare un *reticolo centrato*. Il simbolo *m* sta per *mirror* e indica una riflessione, *g* invece sta per *glide* e indica una glisso-riflessione. Infine *1* viene usato per la trasformazione identica e i numeri *2*, *3*, *4*, *6* indicano rotazioni di ordini corrispondenti.

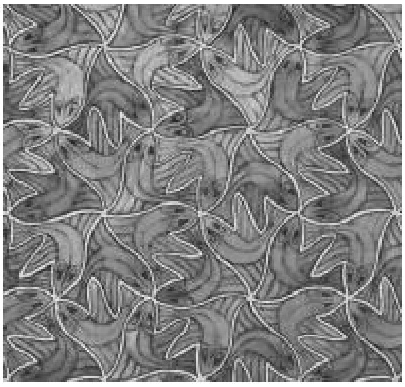
Dall'analisi dei reticoli e dei point-groups, si arriva a dimostrare che i gruppi cristallografici del piano si possono classificare in soli 17 gruppi secondo la seguente tabella:

Gruppo	Riflessioni	Glisso-riflessioni	Rotazioni di ordine 2	Rotazioni di ordine 3	Rotazioni di ordine 4	Rotazioni di ordine 6
p1	0	0	0	0	0	0
pg	0	2	0	0	0	0
pm	2	0	0	0	0	0
cm	1	1	0	0	0	0
p2	0	0	4	0	0	0
pmm	4	0	4	0	0	0
pmg	2	2	4	0	0	0
pgg	0	4	4	0	0	0
cmm	2	2	3	0	0	0
p3	0	0	0	3	0	0
p31m	3	3	0	2	0	0
p3m1	3	3	0	3	0	0
p4	0	0	2	0	2	0
p4m	6	2	2	0	2	0
p4g	2	6	2	0	2	0
p6	0	0	3	2	0	1
p6m	9	3	3	2	0	1

4.3 classificazione

Partendo dalle caratteristiche dei gruppi cristallografici e dalle analisi fatte precedentemente sui disegni di Escher, abbiamo proceduto alla classificazione degli stessi. Nella tabella che segue è riportata la classificazione a cui sono stati aggiunti due disegni analizzati da me e non proposti all'interno del laboratorio.

Gruppo	Esempi	Descrizione
p1		Gruppo costituito solo da traslazioni. Due traslazioni indipendenti generano pertanto tutto il gruppo: $$p1 = \langle T_a, T_b \rangle$$
pg	 Senza tener conto del colore	Gruppo costituito dalle infinite traslazioni generate dalle traslazioni che compongono il reticolo e da infinite glissoriflessioni. Può essere generato dalla traslazione perpendicolare all'asse di glissoriflessione e dalla glissoriflessione stessa o da due glissoriflessioni
cm		Gruppo costituito da infinite traslazioni, infinite riflessioni e glissoriflessioni. Può essere generato dalle due traslazioni indipendenti che generano il reticolo e da una riflessione.
pmg		Gruppo costituito da infinite traslazioni, infinite rotazioni di ordine 2, infinite riflessioni e glissoriflessioni. Può essere generato da una traslazione, una riflessione e una glissoriflessione

Gruppo	Esempi	Descrizione
p3		Gruppo costituito da infinite traslazioni e rotazioni di ordine 3. Due possibili generatori sono due rotazioni di ordine 3 con centri vicini.
p4		Gruppo costituito da infinite traslazioni, infinite rotazioni di ordine 2 e di ordine 4 e reticolo quadrato. Possibili generatori per questo gruppo sono una traslazione e una rotazione di ordine 4, oppure due rotazioni di ordine 4.
p4g		Gruppo generato da infinite traslazioni, rotazioni di ordine 2 e 4 e infinite riflessioni e glissoriflessioni. Può essere generato dalle due traslazioni indipendenti, una glissoriflessione e una riflessione
p6		Può essere riportato come esempio del gruppo p6 lo stesso che abbiamo inserito in p3. Nel primo caso si considera la differenze di colori, mentre in questo caso si considera solo la forma e la posizione dei diversi pesci.

Bibliografia

http://www.scienceu.com/geometry/

http://www2.polito.it/didattica/polymath/htmlS/Archivio/Mappa/Argomenti/Matematicae.htm

http://web.unife.it/progetti/geometria/Escher_A/frame_tessell.htm