

PROIETTIVO: COME E PERCHÉ

- Motivazioni.
- Spazi proiettivi.
- Esempi.
- Dipendenza e sottospazi.
- Riferimenti.
- Proiettività.
- Prospettività.

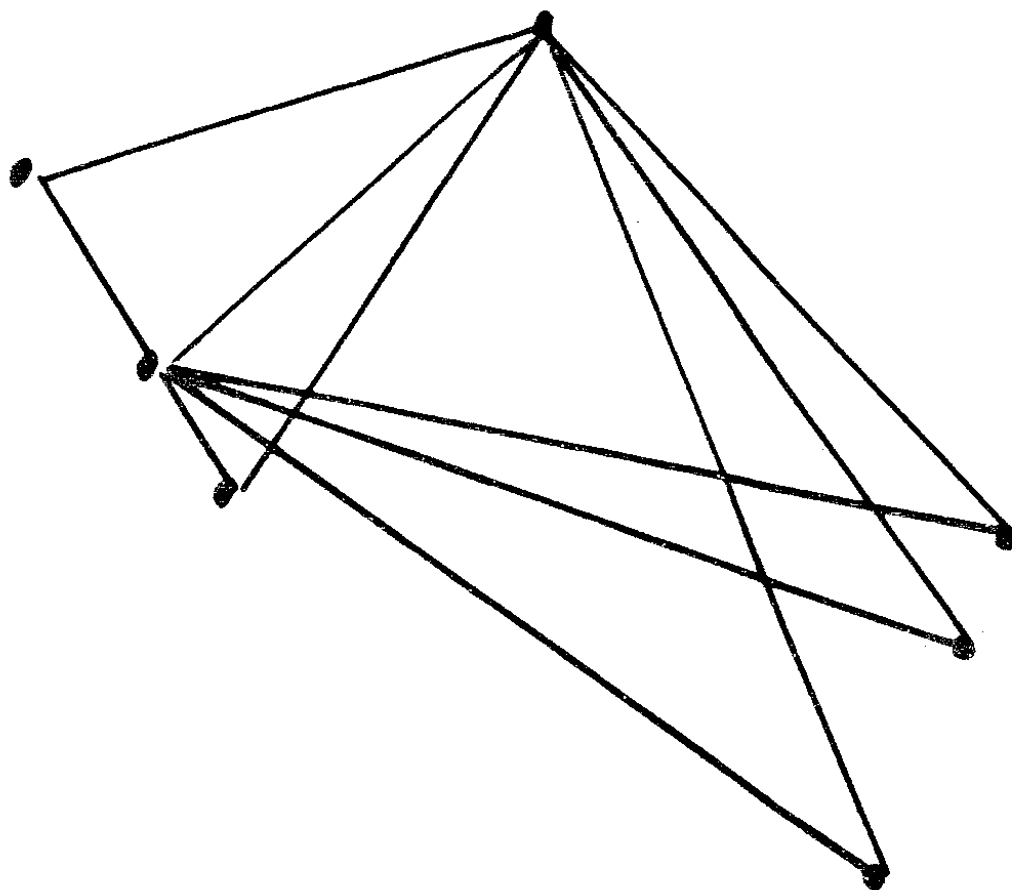
- Dualità.
- Collegamento affine – proiettivo.
- Punti impropri.
- Iperquadriche.
- Polarità.
- Iperquadriche nell' affine e nell' euclideo.
- Fasci di coniche.

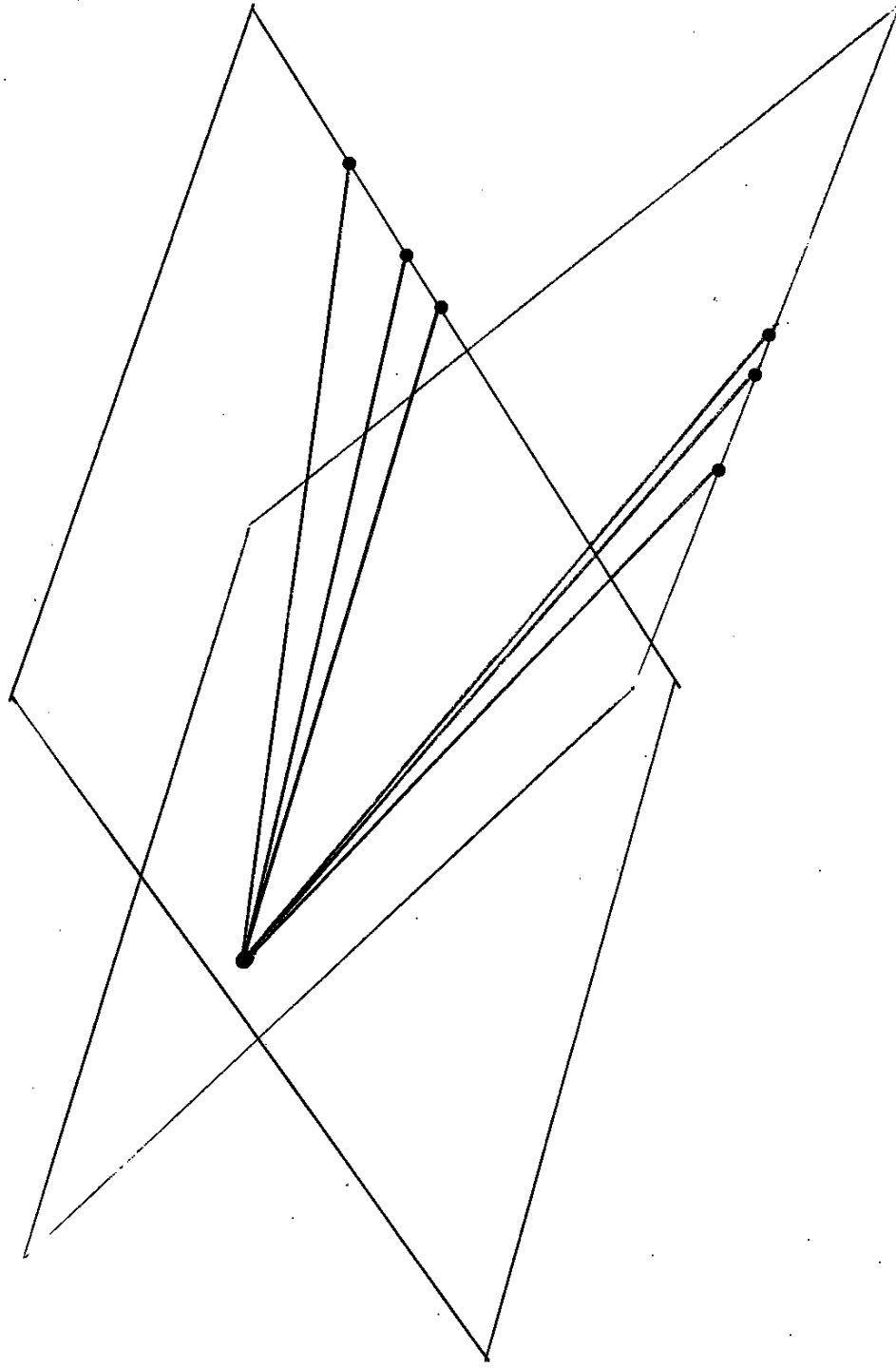
MOTIVAZIONI

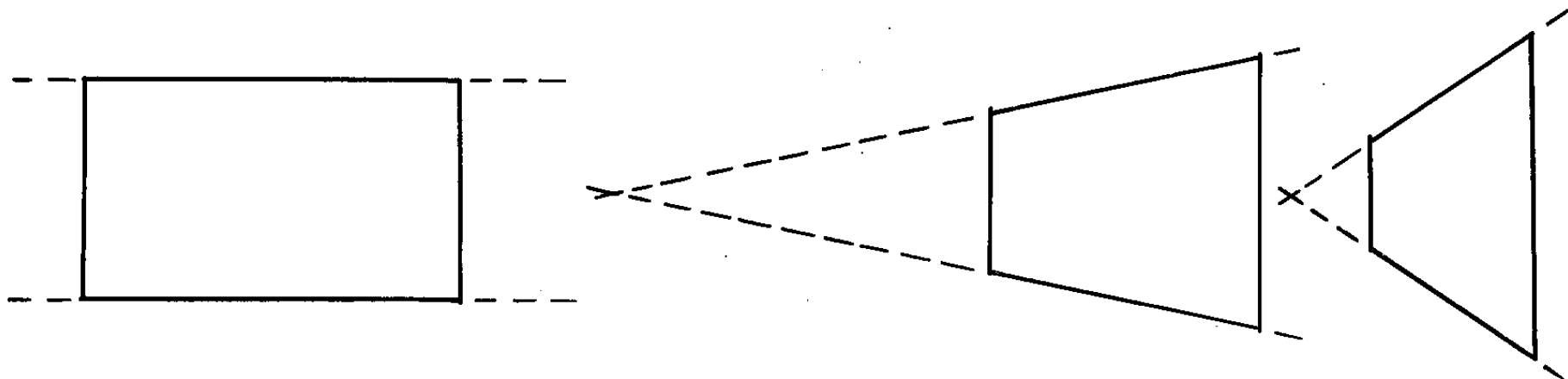
- 1) Trattazione vettoriale di allineamento, complanarità, ecc.
- 2) Trasformazioni prospettiche.
- 3) “Vettori nonnulli a meno di costante moltiplicativa”. Gradi di libertà.

“Sottoprodotti”:

- 1) Unificazione di situazioni separate nell' affine.
- 2) Dualità.







SPAZI PROIETTIVI

Diremo *spazio proiettivo* sul campo $\mathbf{K}$ ogni terna $(V, \mathcal{P}, \theta)$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{P}$ è un insieme e $\theta : V - \{\overline{O}_V\} \rightarrow \mathcal{P}$ è un' applicazione suriettiva tale che

$$\theta(v) = \theta(w) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{K}, w = \alpha v.$$

Se V ha dimensione finita $n+1$, diciamo che lo spazio proiettivo ha *dimensione* n .

Gli elementi del *sostegno* $\mathcal{P}$ si dicono *punti* dello spazio proiettivo.

Solitamente si indicherà uno spazio proiettivo con il simbolo del suo sostegno $\mathcal{P}$.

Per ogni spazio vettoriale non banale V su $\mathbf{K}$ c'è uno spazio proiettivo *naturalmente associato* $(V, \mathcal{P}(V), \theta)$, dove, detta $\sim$ la relazione di *proporzionalità* su $V - \{\bar{O}_V\}$

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{K}, w = \alpha v,$$

si definisce $\mathcal{P}(V) = \frac{V - \{\bar{O}_V\}}{\sim}$ e

$$\begin{array}{ccc} \theta : & V - \{\bar{O}_V\} & \longrightarrow \mathcal{P}(V) \\ & v & \longmapsto [v]_{\sim} \end{array}$$

è la proiezione canonica.

ESEMPI

1) $\mathbf{KP}^n$, canonicamente associato a $V = \mathbf{K}^{n+1}$.
Punti: classi di proporzionalità di $(n + 1)$ -ple non-nulle di elementi di $\mathbf{K}$:

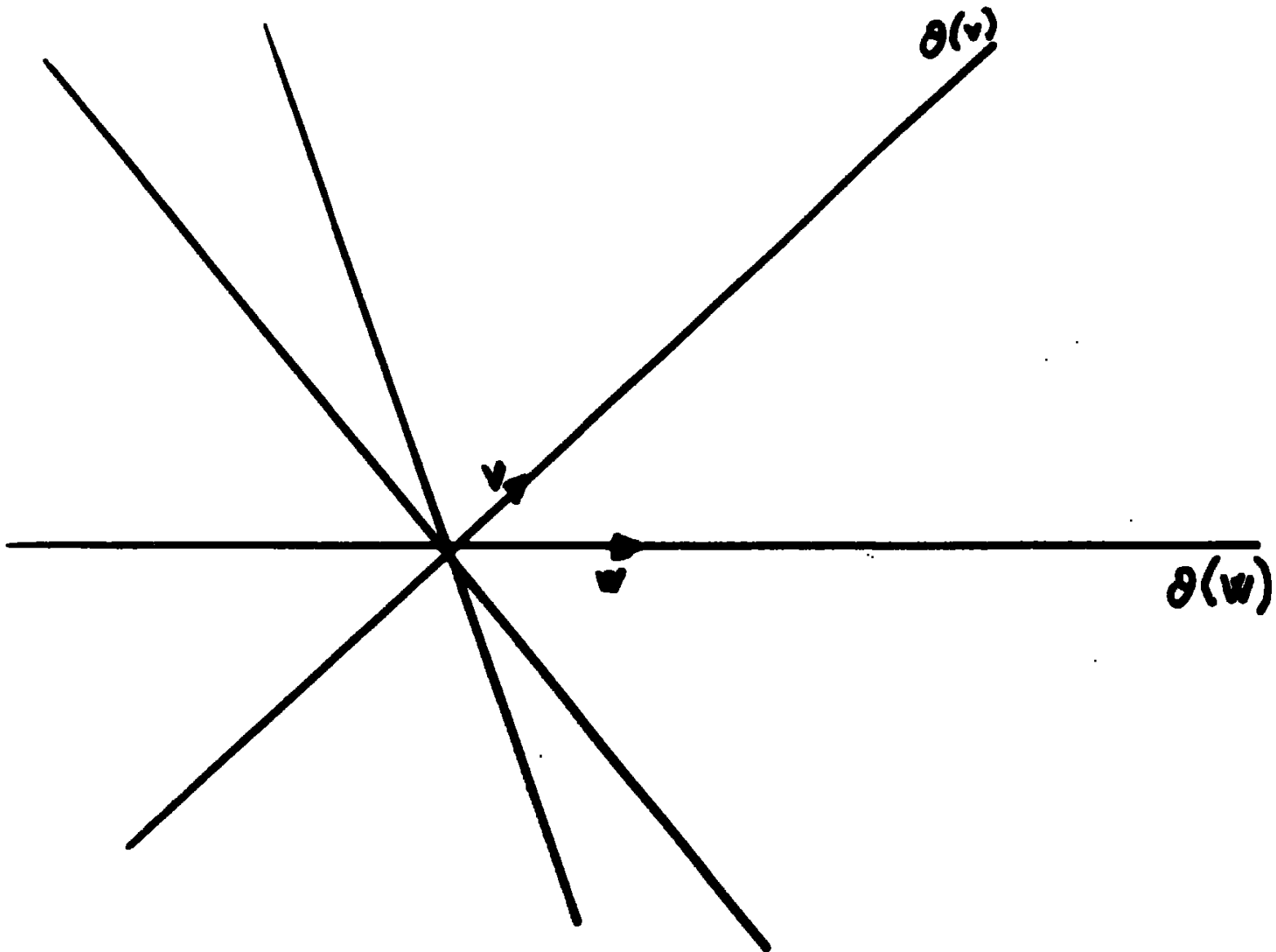
$$[(x_0, x_1, \dots, x_n)].$$

Viene detto *spazio proiettivo standard* di dimensione n su $\mathbf{K}$.

2) $V = \{\text{segmenti di un piano } \Pi, \text{ uscenti da un punto } P\}$.

$\mathcal{P} = \{\text{rette di } \Pi \text{ passanti per } P\}$.

Dimensione: 1.



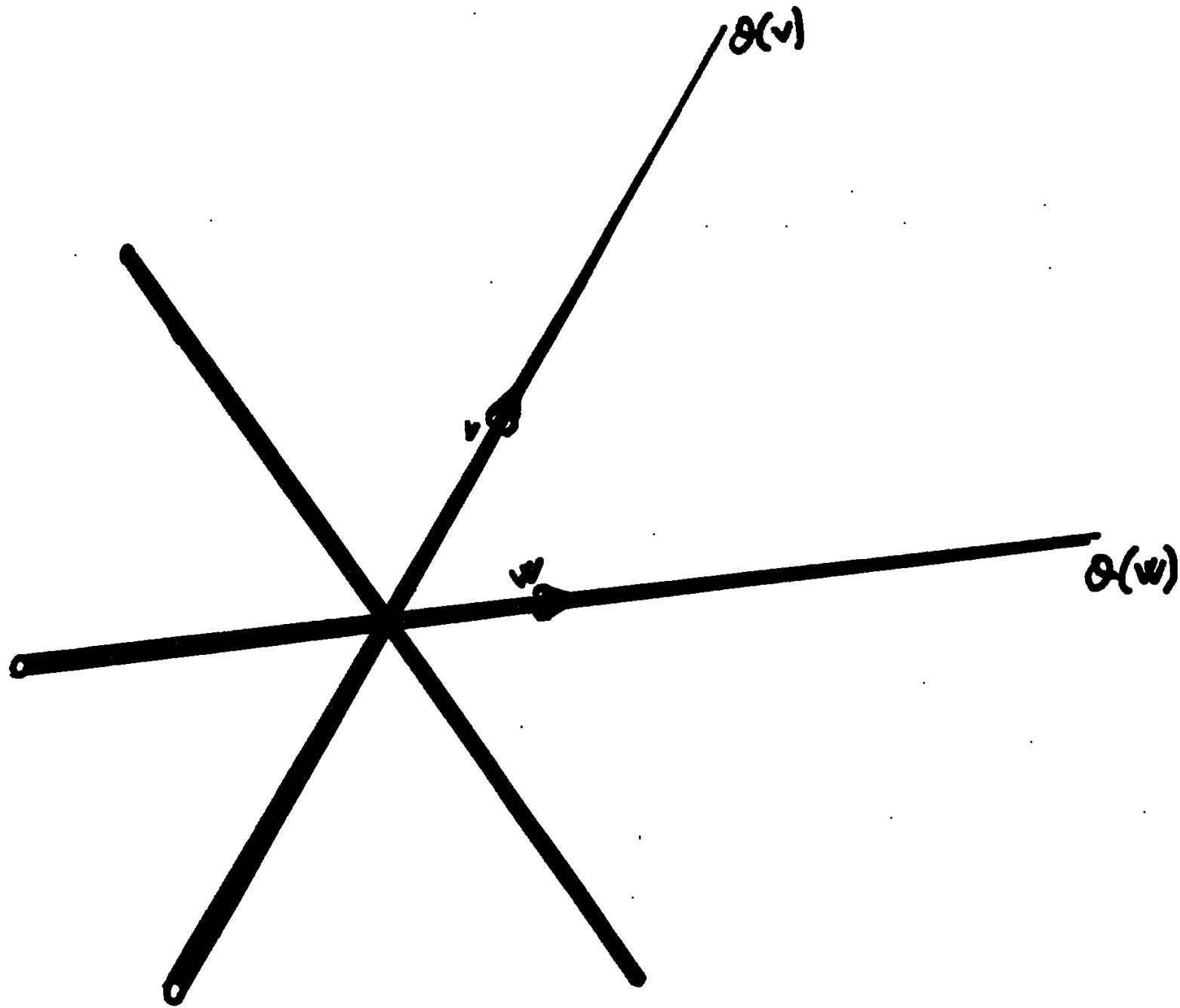
2') $V = \{\text{segmenti dello spazio ordinario } \Sigma, \text{ uscenti da un punto } P\}.$

$\mathcal{P} = \{\text{rette di } \Sigma \text{ passanti per } P\}.$

Dimensione: 2.

3) $\mathcal{P}(V)$ con $V = W^* = \{\text{forme lineari su } W\}.$
(W spazio vettoriale su $\mathbf{K}$).

I “punti” di questo spazio proiettivo sono gli *iperpiani* di $\mathcal{P}(W)$. È lo spazio proiettivo *duale* di $\mathcal{P}(W)$ e si indica con $\mathcal{P}^*(W)$.



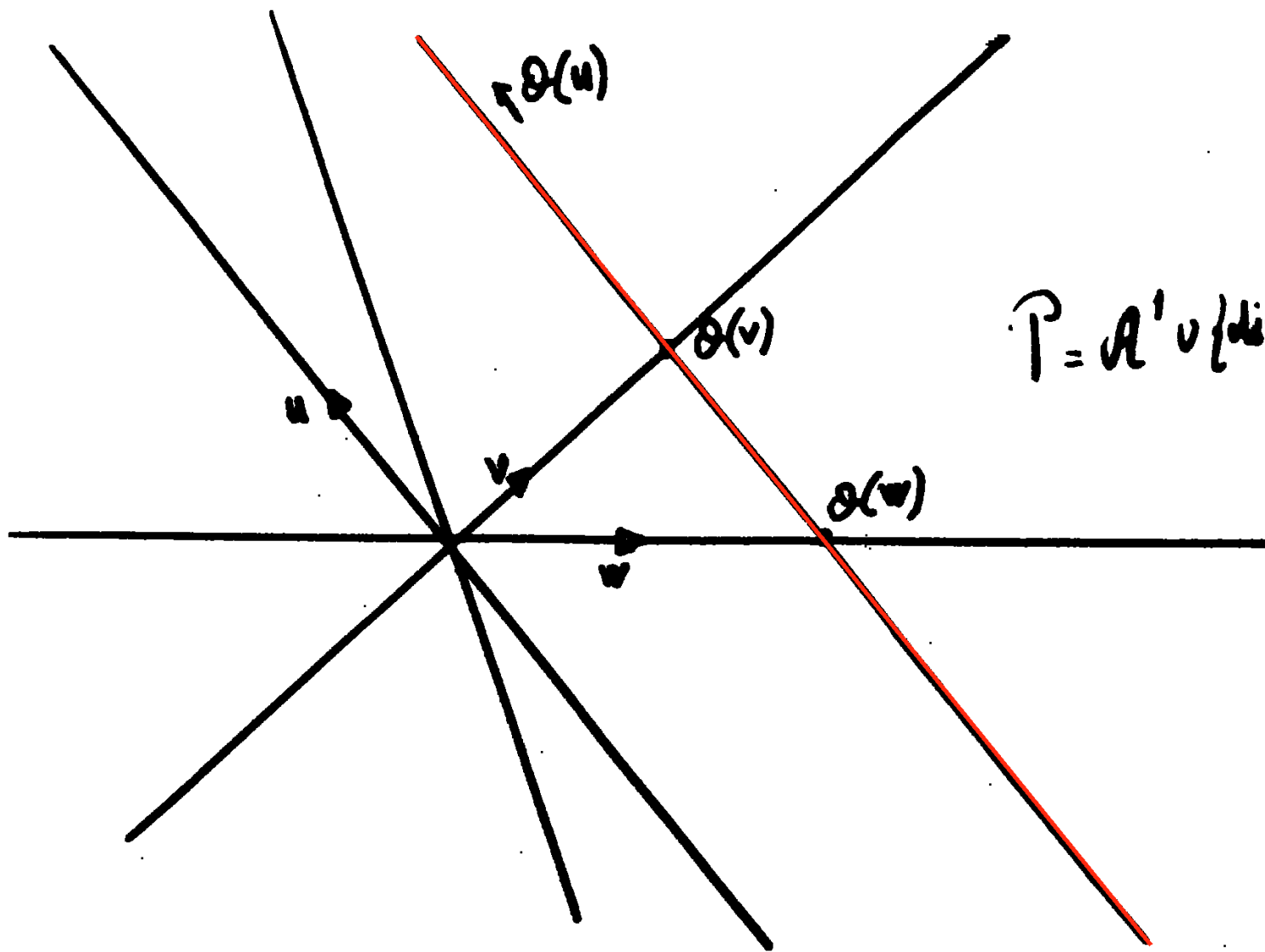
4) $\mathcal{P}(V)$ con $V = \{\text{forme quadratiche su } W\}$. (W spazio vettoriale su $\mathbf{K}$).

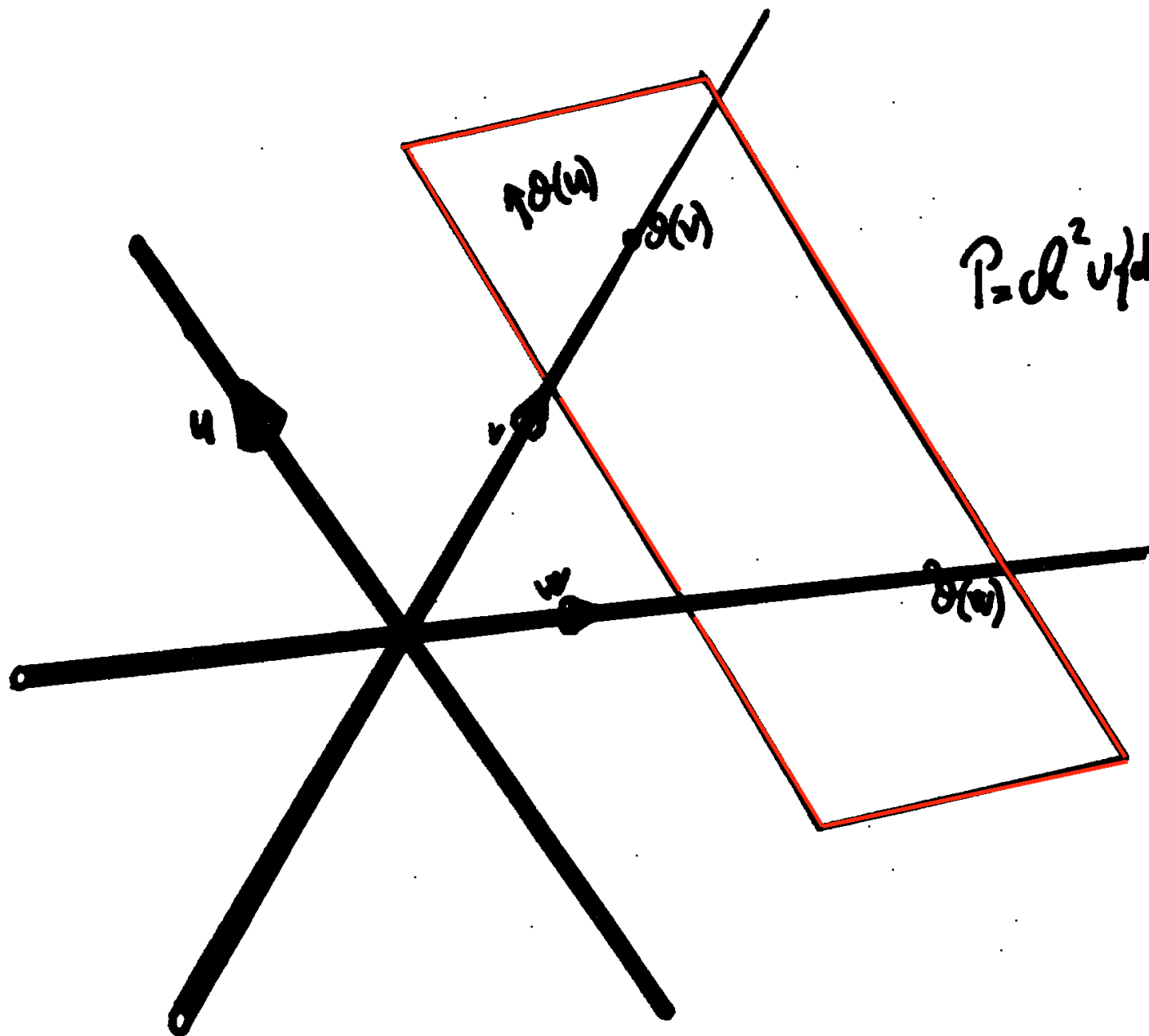
I “punti” di questo spazio proiettivo sono le *iperquadriche* di $\mathcal{P}(W)$.

5) $\mathcal{P}(V)$ con V insieme delle soluzioni (di cui almeno una non banale) di un sistema lineare omogeneo.

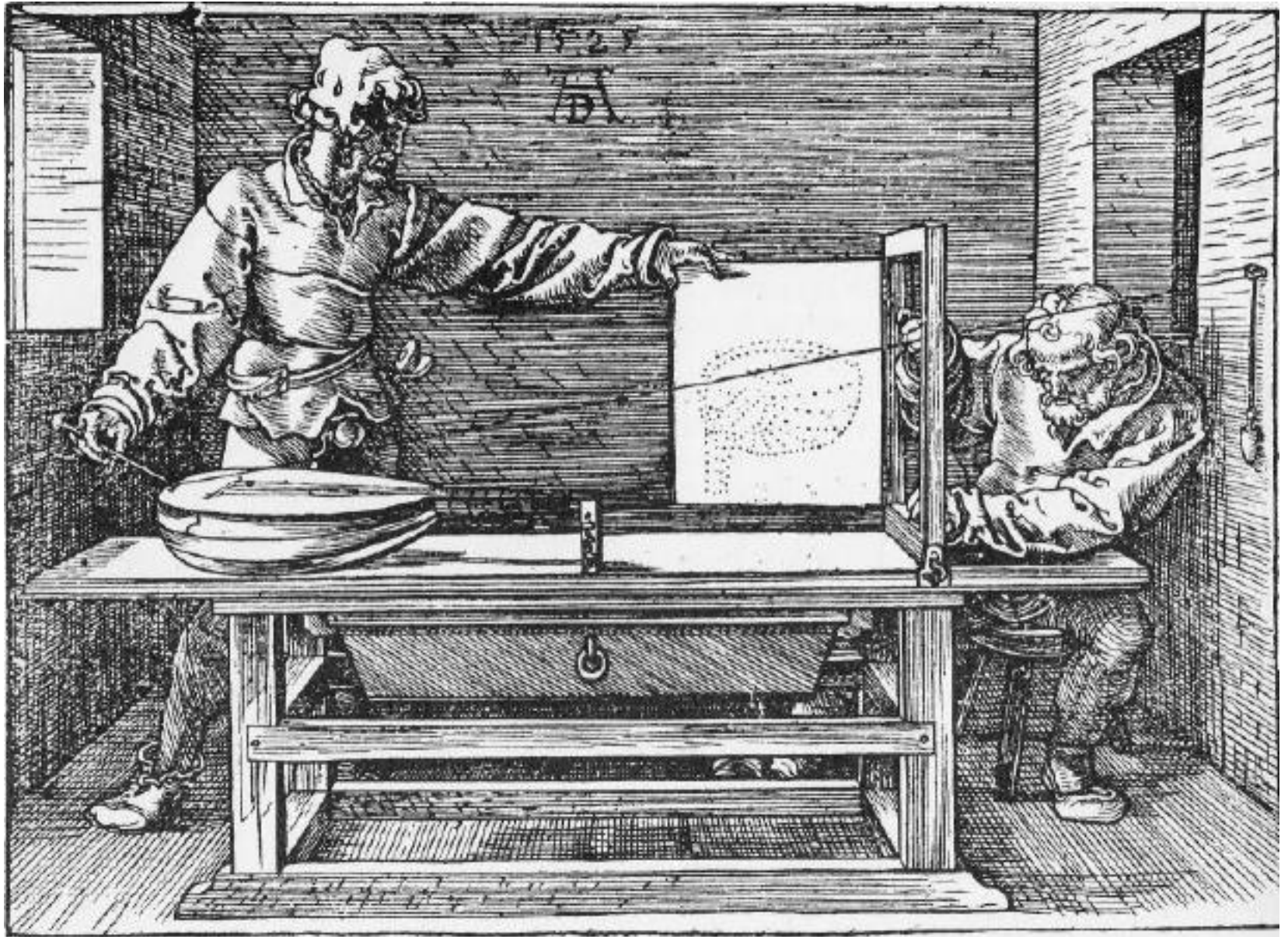
6) $\mathcal{P}(V)$ con V insieme delle soluzioni (di cui almeno una non banale) di un'equazione differenziale lineare omogenea.

7) $V = \mathbf{K}^{n+1}$, $\mathcal{P} = \mathcal{A}^n \cup \{\text{direzioni di } \mathcal{A}^n\}$. ($\mathcal{A}^n$ spazio affine n -dimensionale). θ verrà descritta più avanti.





$P = \mathcal{R}^2 \cup \{\text{direzioni}\}$



DIPENDENZA E SOTTOSPAZÎ

Prop. *In uno spazio vettoriale V su $\mathbf{K}$, dati $v_1 \sim v'_1, \dots, v_h \sim v'_h$, vale*

$$v_1, \dots, v_h \text{ lin. dip.} \Leftrightarrow v'_1, \dots, v'_h \text{ lin. dip.}$$

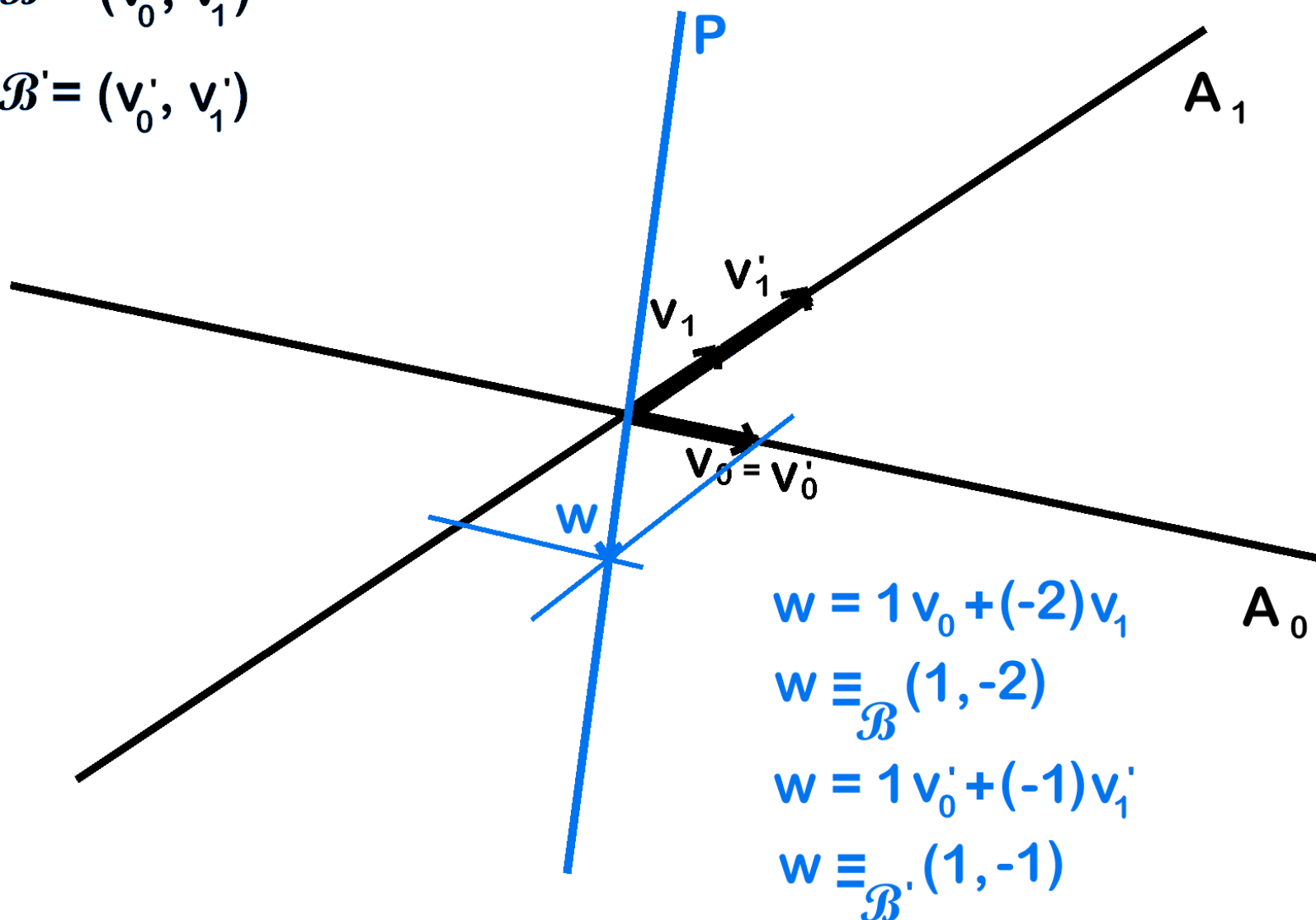
In $(V, \mathcal{P}, \theta)$, dati $P_1 = \theta(v_1), \dots, P_h = \theta(v_h)$, diciamo che $P_1, \dots, P_h$ sono *linearmente dipendenti* se $v_1, \dots, v_h$ lo sono in V .

Sottospazio proiettivo di $(V, \mathcal{P}, \theta)$ è ogni spazio proiettivo $(V', \mathcal{P}', \theta')$, dove V' è sottospazio vettoriale di V , $\mathcal{P}' = \theta(V')$, $\theta' = \theta|_{V'}$.

Prop. *Sostegni di sottospazi proiettivi di $\mathbf{KP}^n$ sono tutti e soli gli insiemi di soluzioni (di cui almeno una non banale), a meno di proporzionalità, di sistemi lineari omogenei in $n + 1$ incognite.*

$$\mathcal{B} = (v_0, v_1)$$

$$\mathcal{B}' = (v'_0, v'_1)$$



RIFERIMENTI

In V , spazio vettoriale su K , diremo che due basi ordinate $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_0, \dots, v'_n)$ sono *proporzionali* (scritto $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$) se

$$\exists \alpha \in K \text{ tale che } v'_i = \alpha v_i \ (i = 0, \dots, n).$$

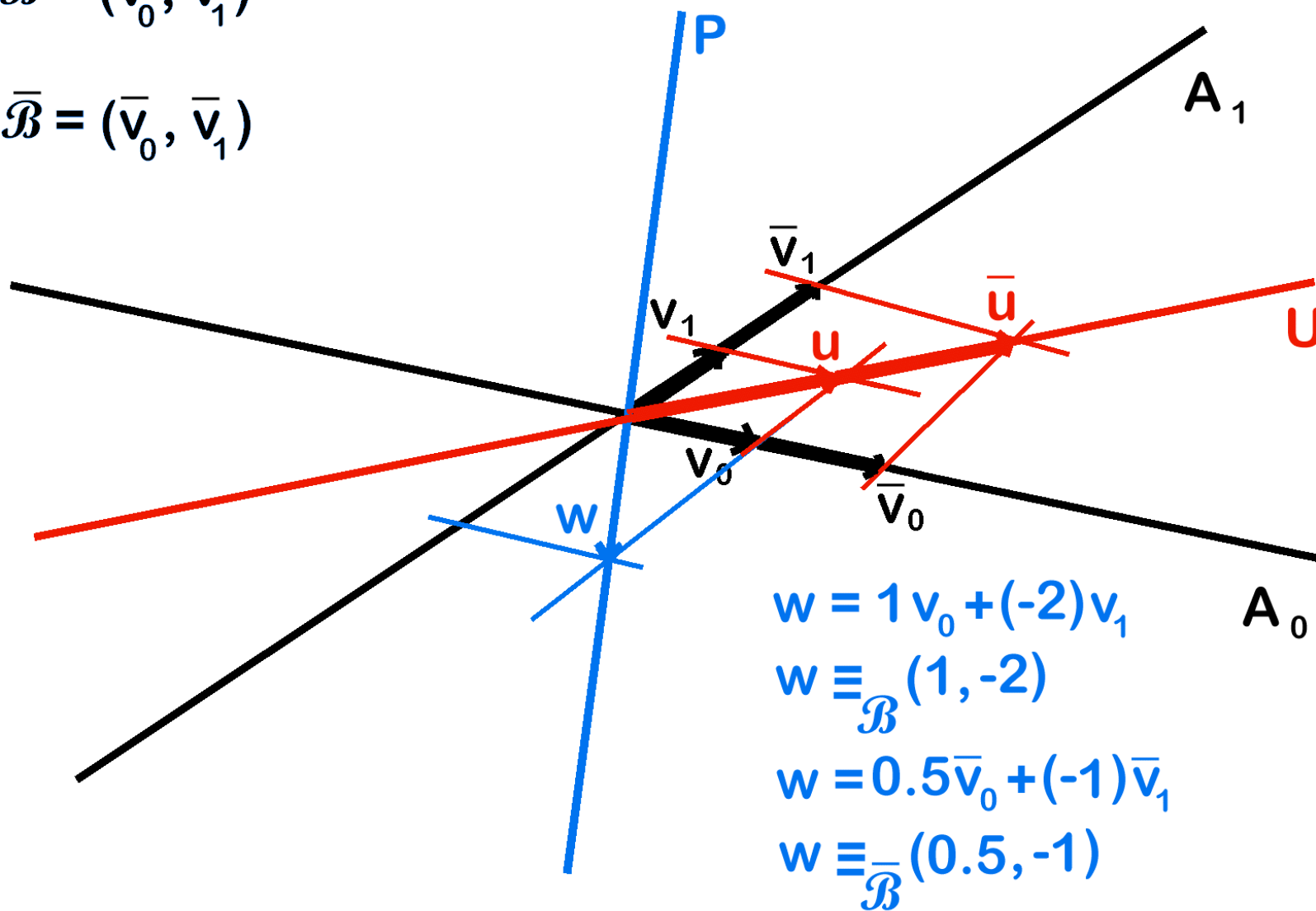
Chiameremo *riferimento* (*proiettivo* o *omogeneo*) di uno spazio proiettivo $(V, \mathcal{P}, \theta)$ di dimensione n ogni $(n + 2)$ -pla $\mathcal{S} = (A_0, \dots, A_n, U)$ di punti a $n + 1$ a $n + 1$ linearmente indipendenti. $A_0, \dots, A_n$ si dicono *punti fondamentali*, U *punto unità*.

Prop. È biiettiva l' applicazione

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\varphi} : \frac{\{\text{Basi}\}}{\approx} & \rightarrow & \{\text{Riferimenti}\} \\ [(v_0, \dots, v_n)] & \mapsto & ([v_0], \dots, [v_n], [v_0 + \dots + v_n]) \end{array}$$

$$\mathcal{B} = (v_0, v_1)$$

$$\bar{\mathcal{B}} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1)$$



Dato un riferimento $\mathcal{S}$, una qualunque base $\mathcal{B}$ rappresentante di $\tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{S})$ si dice *normalizzata rispetto ad $\mathcal{S}$* .

Dato un punto P , sue *coordinate proiettive* (o *omogenee*) *rispetto ad $\mathcal{S}$* sono le componenti $(x_0, \dots, x_n)$ di un suo qualunque rappresentante rispetto ad una base normalizzata rispetto ad $\mathcal{S}$. Si scriverà $P \equiv (x_0, \dots, x_n)$.

Le coordinate proiettive di un punto sono non tutte nulle e determinate a meno di un fattore moltiplicativo.

PROIETTIVITÀ

Siano $(V, \mathcal{P}, \theta)$, $(V', \mathcal{P}', \theta')$ spazi proiettivi su $\mathbf{K}$. Sia $T : V \rightarrow V'$ una trasformazione lineare **iniettiva**. Allora T induce un' applicazione $\bar{T} : V - \{\bar{O}_V\} \rightarrow V' - \{\bar{O}_{V'}\}$ compatibile con le proporzionalità, cioè tale che

$$u \sim v \Leftrightarrow \bar{T}(u) \sim \bar{T}(v).$$

Dunque T induce anche un' applicazione

$$\begin{array}{ccc} \omega_T : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}' \\ & \theta(v) & \longmapsto & \theta'(T(v)) \end{array}$$

che verrà detta *associata* a T .

Chiameremo *proiettività* da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ ogni applicazione $\omega : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$ tale che esista una trasformazione lineare iniettiva T per cui sia $\omega = \omega_T$. Una proiettività da $\mathcal{P}$ a se stesso viene chiamata *omografia*.

Se $T : V \rightarrow V'$ è una trasformazione lineare non iniettiva e $\mathcal{K}_T$ è il sottospazio proiettivo associato a $\ker T$, allora T induce un' applicazione $\bar{T} : V - \ker T \rightarrow V' - \{\bar{O}_{V'}\}$ e una $\omega_T : \mathcal{P} - \mathcal{K}_T \rightarrow \mathcal{P}'$; ogni applicazione come quest' ultima ω_T viene detta *proiettività degenera*, e $\mathcal{K}_T$ viene considerato il suo *nucleo*.

Prop. Ogni proiettività, anche degenera, trasforma sottospazi proiettivi in sottospazi proiettivi; se non è degenera, conserva le dimensioni.

Prop. *Dati uno spazio proiettivo $\mathcal{P}$ di dimensione n e un suo riferimento $\mathcal{S}$, l'applicazione $\Phi_{\mathcal{S}}$ che ad ogni punto associa la classe di proporzionalità delle sue coordinate proiettive rispetto ad $\mathcal{S}$ è una proiettività*

$$\Phi_{\mathcal{S}} : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbf{KP}^n.$$

Data una quaterna (A, B, C, D) di punti di una retta proiettiva, dette (α, β) le coordinate proiettive di D rispetto al riferimento (A, B, C) , si chiama *birapporto* della quaterna (scritto $(ABCD)$) il numero $\frac{\alpha}{\beta}$ se $\beta \neq 0$, il simbolo ∞ altrimenti.

Prop. *Ogni proiettività conserva i birapporti di punti allineati.*

Teor. *Un' applicazione fra due rette proiettive è una proiettività se e solo se conserva i birapporti di tutte le quaterne.*

Teor. *Un' applicazione biiettiva fra due spazi proiettivi di dimensioni $n \geq 2$ è una proiettività se e solo se trasforma tutte le rette in rette.*

Teor. (fondamentale delle proiettività) Dati, in due spazi proiettivi $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, riferimenti $\bar{\mathcal{S}}, \bar{\mathcal{S}}'$ rispettivamente, esiste ed è unica la proiettività da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ che trasforma ordinatamente $\bar{\mathcal{S}}$ in $\bar{\mathcal{S}}'$.

Prop. Dati spazi proiettivi $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ di dimensioni m, n , loro riferimenti $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ rispettivamente e una proiettività (anche degenera) $\omega : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}'$, esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_{(n+1) \times (m+1)}$ per cui, se $A \equiv (x)$, $\omega(A) \equiv (y)$

$$\lambda(y) = M \cdot (x)$$

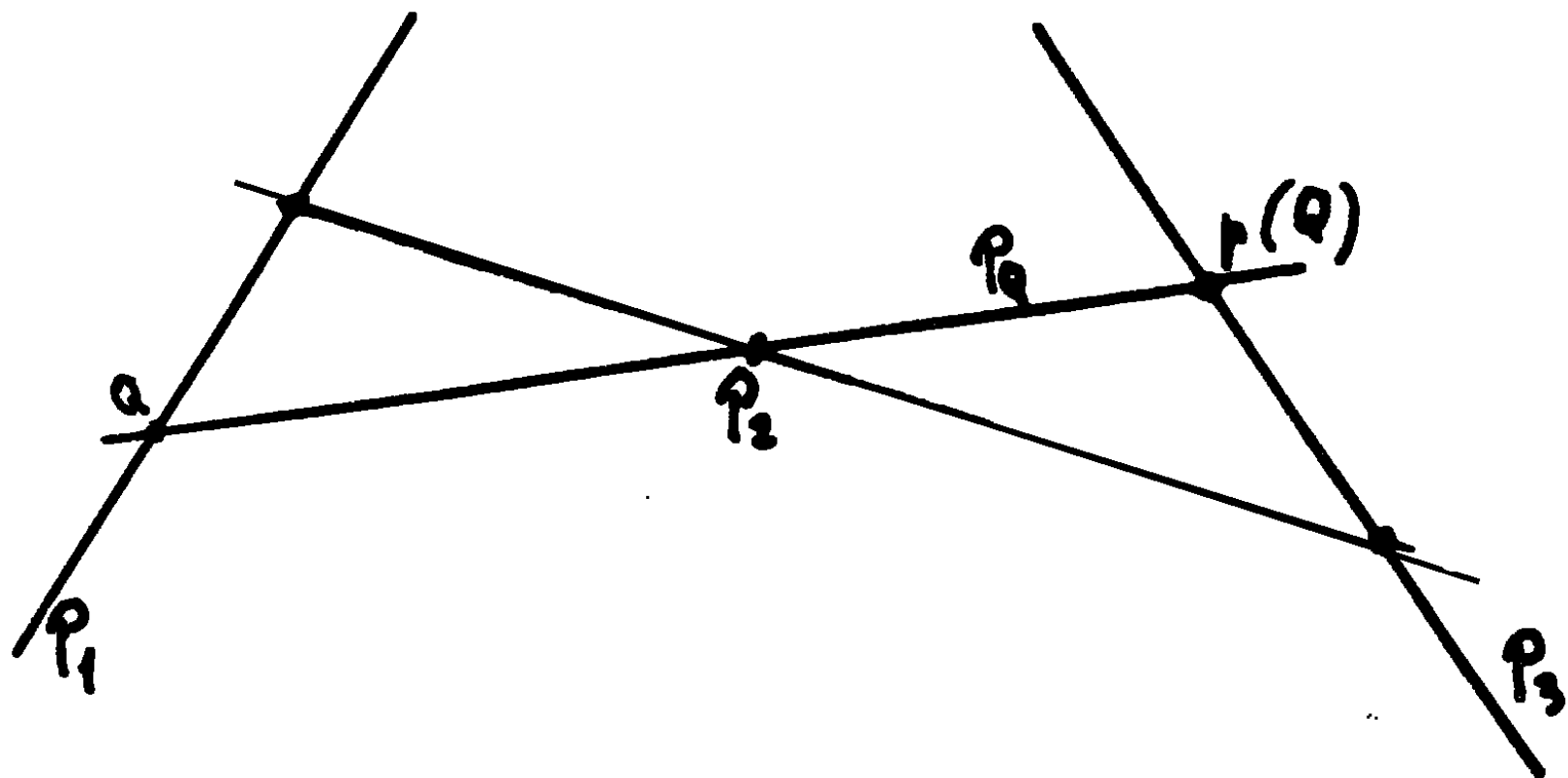
per $\lambda \in \mathbf{K}$ opportuno.

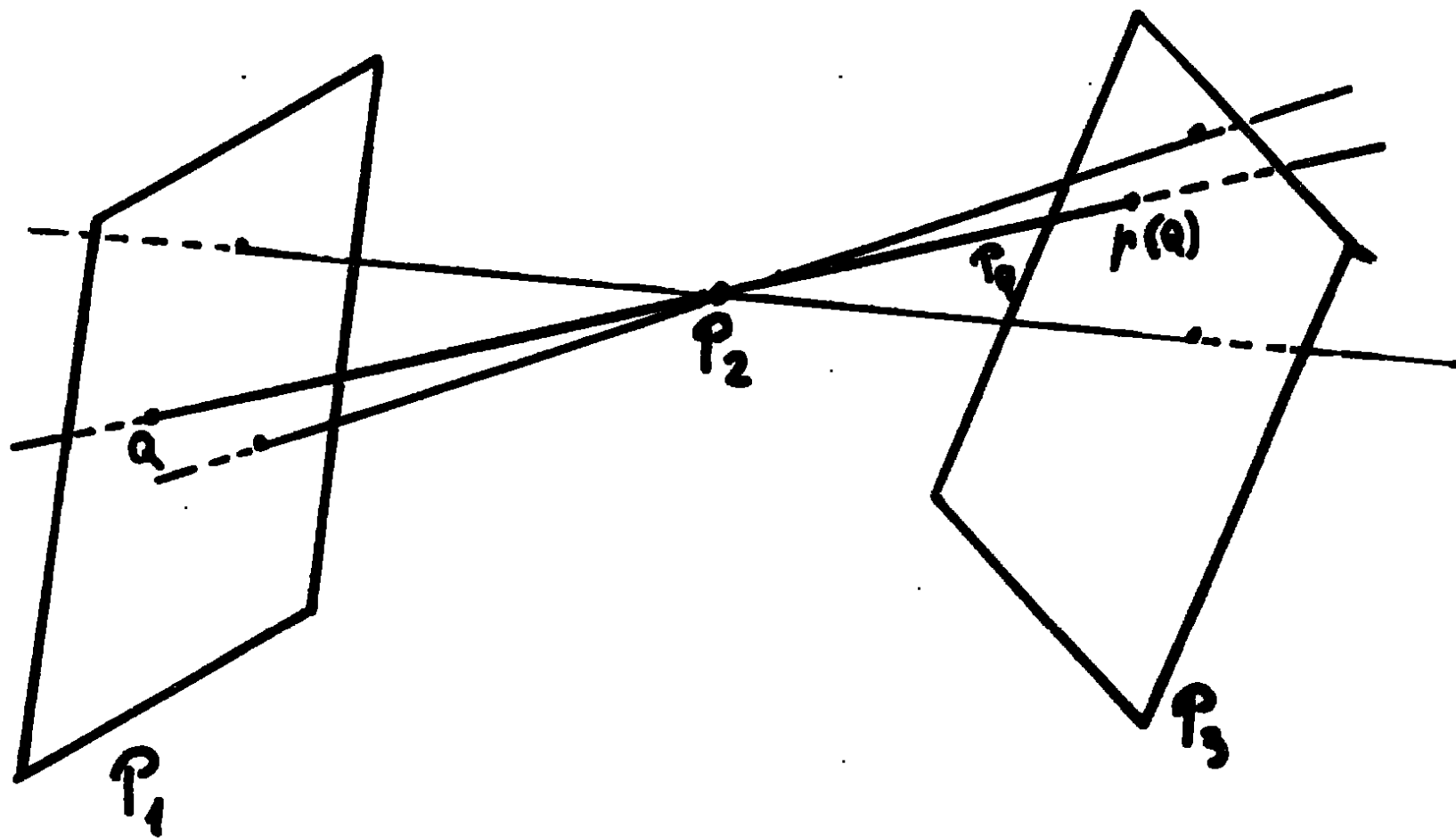
PROSPETTIVITÀ

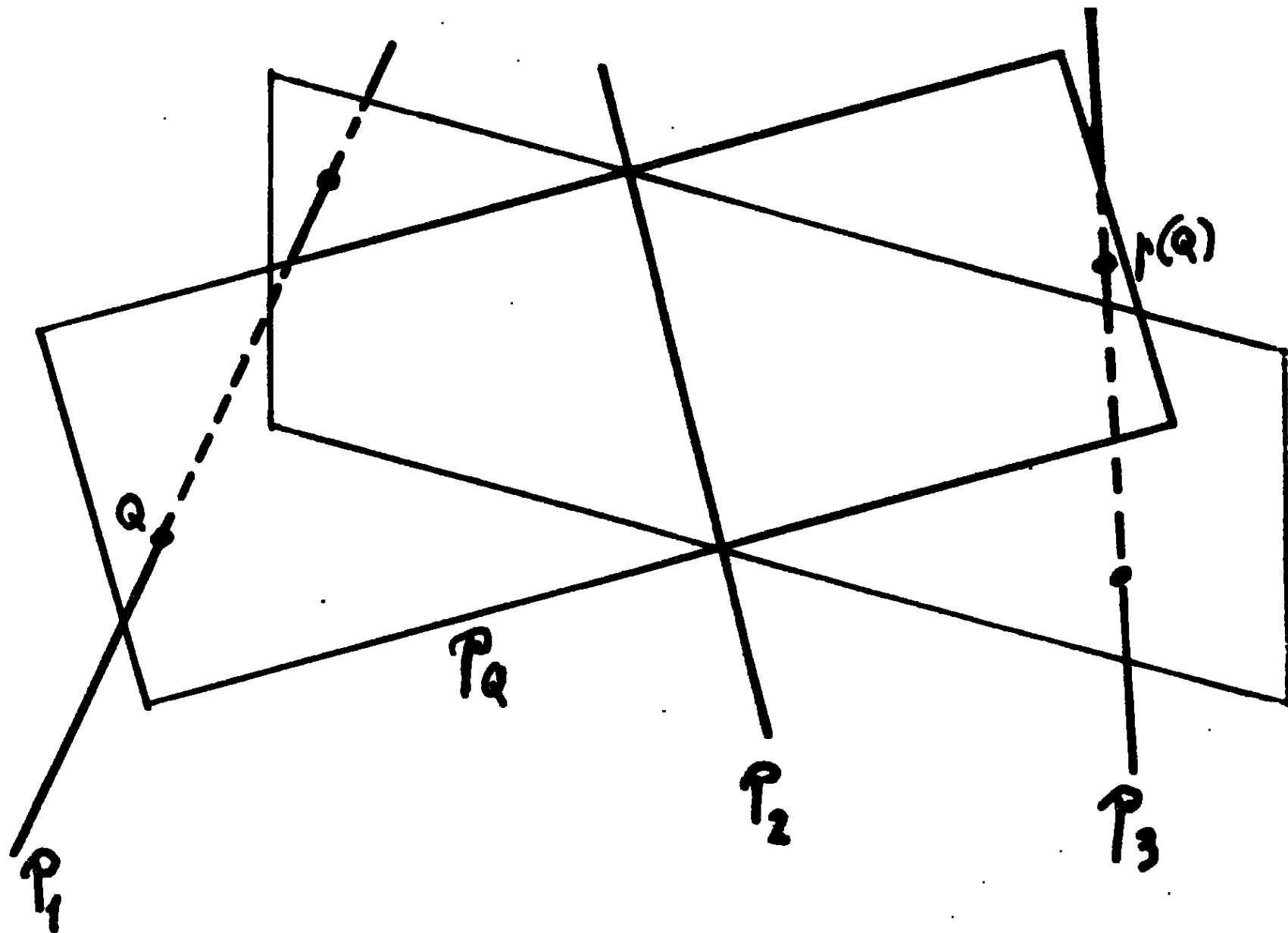
Dati sottospazi $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$ di uno spazio proiettivo $\mathcal{P}$, chiamiamo sottospazio *intersezione* [congiungente] il sottospazio proiettivo associato al sottospazio vettoriale intersezione [congiungente] dei sottospazi vettoriali ad essi associati.

Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ sottospazi di uno spazio proiettivo $\mathcal{P}$. Per ogni punto $Q \in \mathcal{P}_1$, sia $\mathcal{P}_Q$ il sottospazio congiungente di Q e $\mathcal{P}_2$.

Se per ogni $Q \in \mathcal{P}_1$ vale che $\mathcal{P}_Q \cap \mathcal{P}_3$ è costituito da un solo punto, l'applicazione $p : \mathcal{P}_1 \rightarrow \mathcal{P}_3$ che a Q associa tale punto viene detta *proiezione di $\mathcal{P}_1$ da $\mathcal{P}_2$ su $\mathcal{P}_3$* .







Se $\dim \mathcal{P}_1 = \dim \mathcal{P}_3$ e la proiezione non è costante, essa viene detta *prospettività* e $\mathcal{P}_2$ è detto *spazio di prospettiva*.

Teor. Ogni proiettività fra sottospazi di uguale dimensione è la composizione di un numero finito di prospettività.

DUALITÀ

Due spazi proiettivi si dicono *isomorfi* se esiste una proiettività biiettiva (*isomorfismo*) fra loro.

Prop. Ogni spazio proiettivo $(V, \mathcal{P}, \theta)$ è isomorfo allo spazio proiettivo $\mathcal{P}(V)$ canonicamente associato a V .

Chiamiamo *dualizzazione* ogni proiettività da $\mathcal{P}(V)$ a $\mathcal{P}^*(V)$.

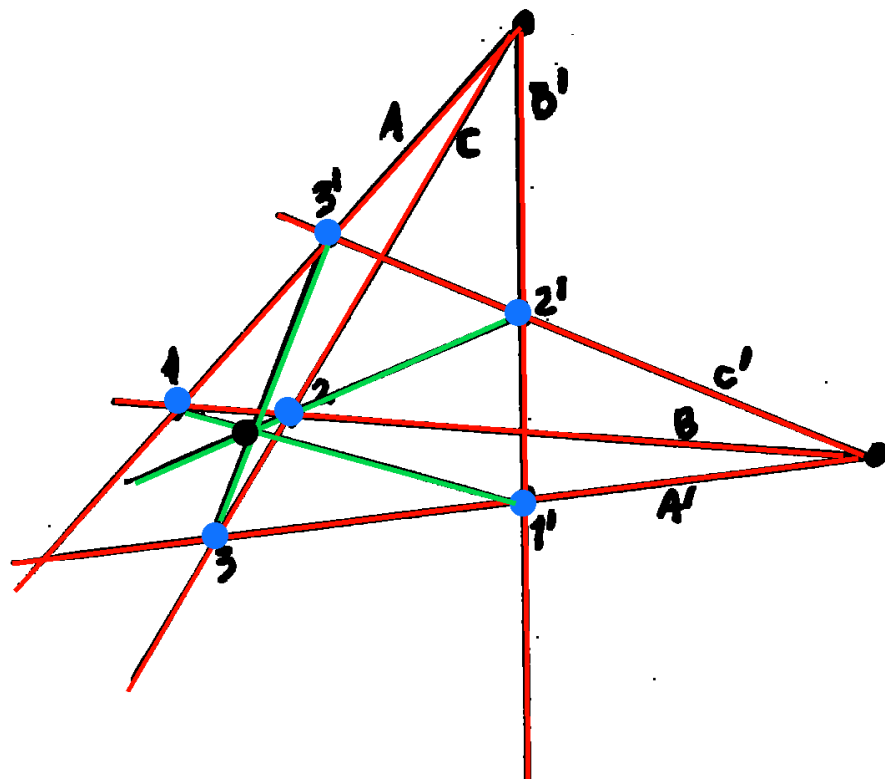
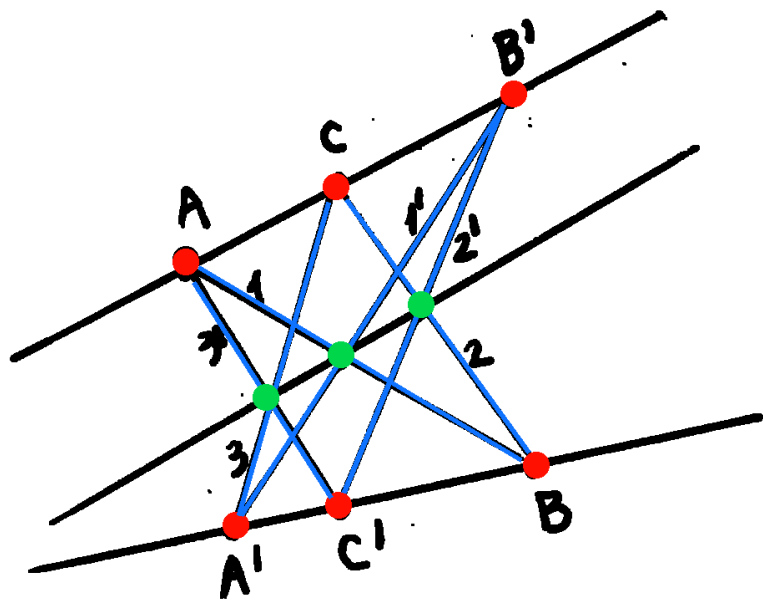
Prop. Fissato su $\mathcal{P}(V)$ un riferimento $\mathcal{S}$, l' applicazione che ad ogni punto $P \equiv (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ associa l' iperpiano di equazione $\alpha_0 x_0 + \dots + \alpha_n x_n = 0$ è una dualizzazione.

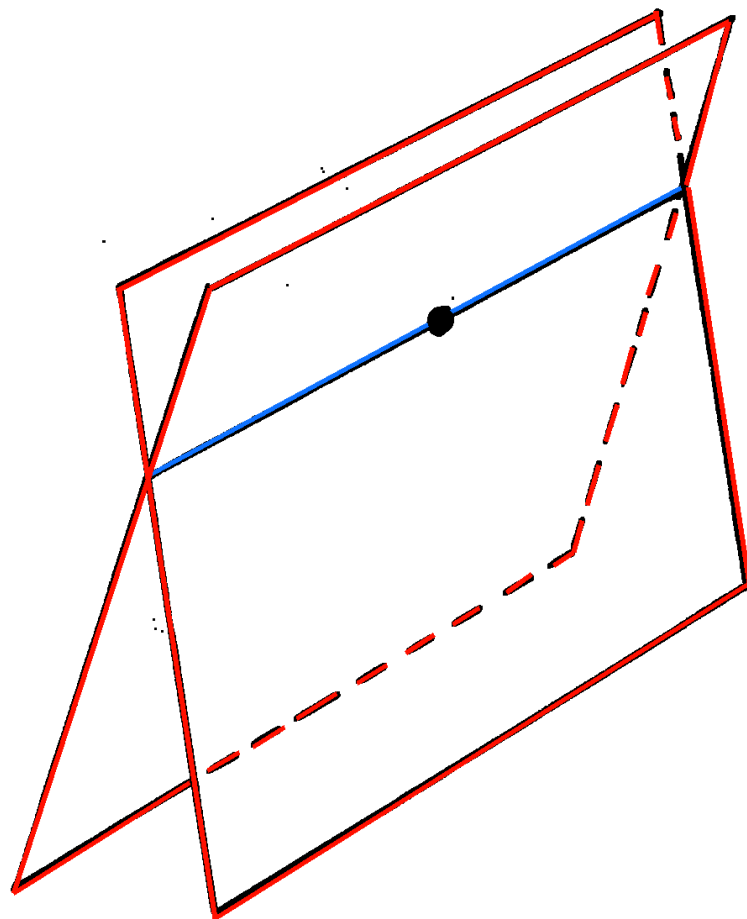
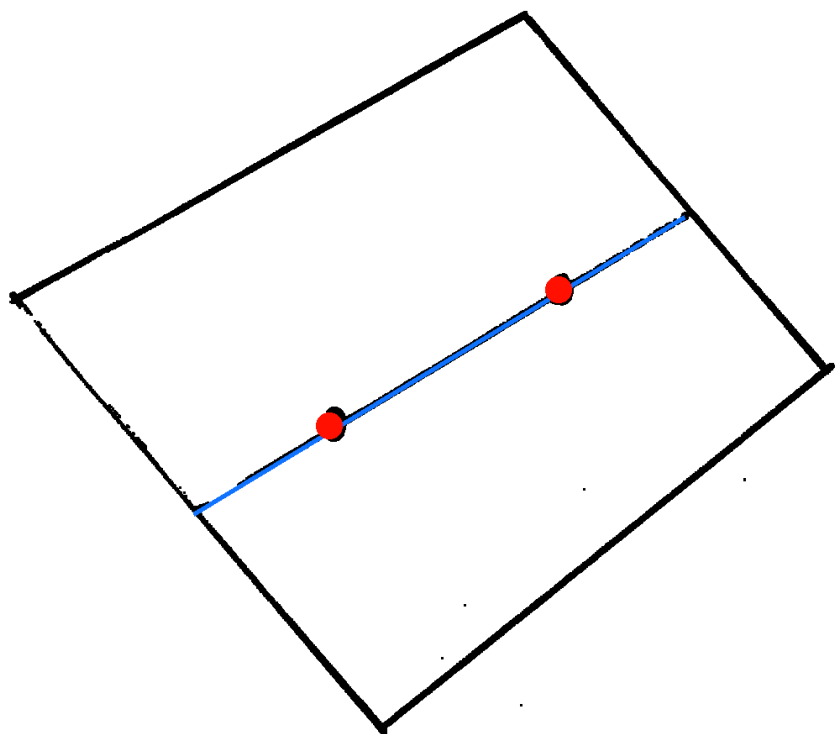
Prop. *Data una dualizzazione $\omega : \mathcal{P}(V) \rightarrow \mathcal{P}^*(V)$, con $\dim \mathcal{P}(V) = n$, comunque dato un sottospazio $\mathcal{P}'$ di $\mathcal{P}(V)$, con $\dim \mathcal{P}' = h$,*

- i) esiste esattamente un sottospazio $\mathcal{P}''$, con $\dim \mathcal{P}'' = n - h - 1$, contenuto in $\omega(Q)$ per ogni $Q \in \mathcal{P}'$;*
- ii) non esistono sottospazi di dimensione maggiore con la stessa proprietà;*
- iii) l' applicazione che ad ogni $\mathcal{P}'$ associa il sottospazio $\mathcal{P}''$ di i) conserva (rovesciandola) l' inclusione.*

Cor. (*Dualità*) Ad ogni proposizione vera della geometria proiettiva ne corrisponde una vera (detta duale) ottenuta dalla precedente scambiando la dimensione h con la dimensione $n - h - 1$, $\subset$ con $\supset$.

Si noti che una analoga proprietà di dualità **non** vale negli spazi affini.





COLLEGAMENTO AFFINE-PROIETTIVO

È possibile trovare una applicazione biiettiva fra uno spazio proiettivo e uno spazio affine della stessa dimensione sullo stesso $\mathbf{K}$?

Nel caso di $\mathbf{K}$ infinito, sì; in particolare, se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, entrambi gli spazi hanno la potenza del continuo.

Ma è possibile trovare una tale corrispondenza che trasformi sottospazi in sottospazi?

No: in un piano proiettivo tutte le coppie di rette sono incidenti, mentre in un piano affine ciò non è sempre vero.

$$\begin{cases} aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \\ dX_0 + eX_1 + fX_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} bx + cy + a = 0 \\ ex + fy + d = 0 \end{cases}$$

Ampliamento proiettivo di uno spazio affine.

Sia $\mathcal{A}^n$ uno spazio affine n -dimensionale su $\mathbf{K}$; sia inoltre $\vec{\mathcal{A}}^n$ il suo spazio dei vettori liberi. Sia infine $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ lo spazio proiettivo naturalmente associato ad $\vec{\mathcal{A}}^n$.

Prop. *I punti di $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ sono le direzioni di $\mathcal{A}^n$.*

Fissiamo un riferimento affine $\mathcal{S} = (M, \vec{\mathcal{B}})$ su $\mathcal{A}^n$. Rispetto ad esso ogni vettore libero avrà una n -pla di componenti, e ogni punto P avrà una n -pla di coordinate (le componenti di $\vec{MP}$).

Completiamo ora l' esempio 7 dell' inizio, definendo l' applicazione (che risulta suriettiva)

$$\theta : \mathbf{K}^{n+1} - \{(0)\} \rightarrow \mathcal{A}^n \cup \vec{\mathcal{P}}^{n-1}$$

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) \mapsto \begin{cases} P \equiv \left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0} \right) \\ \text{se } X_0 \neq 0 \\ \\ [\vec{u}] \text{ con } \vec{u} \equiv (X_1, \dots, X_n) \\ \text{se } X_0 = 0. \end{cases}$$

Prop. $(\mathbf{K}^{n+1}, \mathcal{A}^n \cup \vec{\mathcal{P}}^{n-1}, \theta)$ è uno spazio proiettivo.
 La sua struttura non dipende dalla scelta di S .

Tale spazio è detto *ampliamento proiettivo* di $\mathcal{A}^n$.

Carte affini di uno spazio proiettivo.

Sia $\mathcal{P}^n$ uno spazio proiettivo n -dimensionale su $\mathbf{K}$. Indichiamo con $\mathbf{K}^n$ anche lo spazio affine naturalmente associato allo spazio vettoriale $\mathbf{K}^n$.

Sia $\mathcal{P}^{n-1}$ un iperpiano di $\mathcal{P}^n$. Fissiamo un riferimento proiettivo $\mathcal{S}$ su $\mathcal{P}^n$ in modo tale che $\mathcal{P}^{n-1}$ abbia equazione $X_0 = 0$.

Prop. *L' applicazione*

$$\begin{array}{ccc} \alpha : & \mathcal{P}^n - \mathcal{P}^{n-1} & \longrightarrow \mathbf{K}^n \\ & P & \longmapsto \left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0} \right) \end{array}$$

è biiettiva e manda sottospazi non contenuti in $\mathcal{P}^{n-1}$ in sottospazi affini della stessa dimensione. α non dipende dalla scelta di S .

Su $\mathcal{P}^n - \mathcal{P}^{n-1}$ viene quindi indotta una struttura di spazio affine, che viene detta *carta affine*.

Prop. *Se $\mathcal{A}^n = \mathbf{K}^n$, $\mathcal{P}^n$ ne è l' ampliamento proiettivo e $\mathcal{P}^{n-1} = \vec{\mathcal{P}}^{n-1}$, allora $\alpha \circ \theta^{-1} = id_{\mathbf{K}^n}$.*

PUNTI IMPROPRI

Dato l' ampliamento proiettivo $\mathcal{P}^n = \mathcal{A}^n \cup \vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ di uno spazio affine $\mathcal{A}^n$, si dice *improprio* ogni punto, sottospazio proiettivo, sottoinsieme di $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$, che verrà chiamato *iperpiano improprio*. Un analogo elemento verrà detto *proprio* se non è contenuto nell' iperpiano improprio.

Si noti che ogni riferimento affine di $\mathcal{A}^n$ determina un riferimento proiettivo (che assumeremo d' ora in poi) dell' ampliamento proiettivo, tale che, dette $x_1, \dots, x_n$ le coordinate affini di un punto $P \in \mathcal{A}^n$ e $X_0, X_1, \dots, X_n$ le coordinate proiettive di $\theta^{-1}(P)$, per $i = 1, \dots, n$ valga $x_i = \frac{X_i}{X_0}$.

Con tali riferimenti, vale anche

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) = \lambda(1, x_1, \dots, x_n).$$

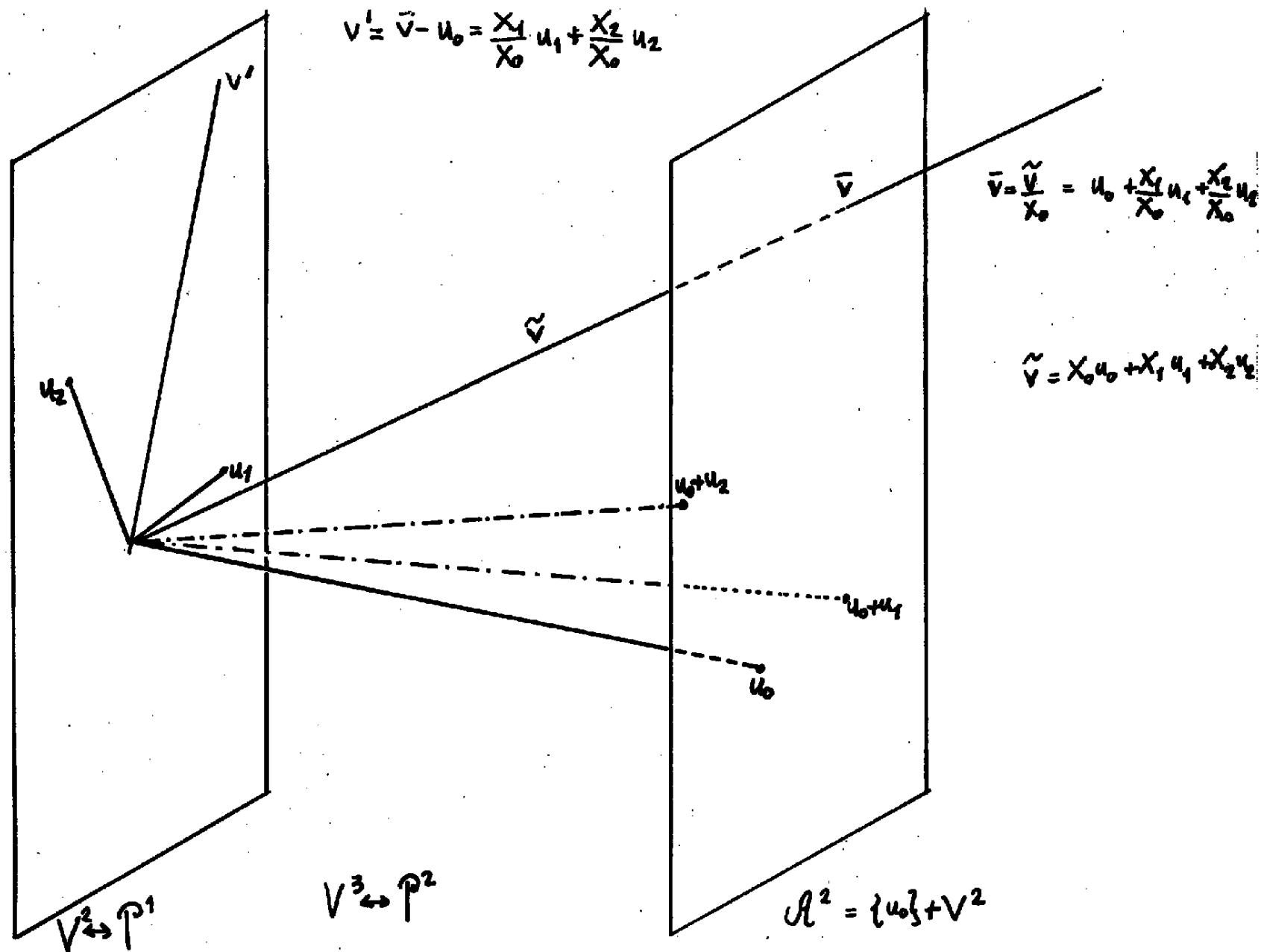
Prop. *Se un iperpiano di $\mathcal{A}^n$ ha equazione*

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + b = 0,$$

allora il suo ampliamento proiettivo ha equazione

$$bX_0 + a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = 0.$$

$$V^1 = \bar{V} - u_0 = \frac{X_1}{X_0} u_1 + \frac{X_2}{X_0} u_2$$



Si consideri la proiezione π dell' iperpiano improprio $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ su un iperpiano proprio $\mathcal{P}^{n-1}$, da un punto P esterno ad entrambi. Ogni punto improprio Q_∞ viene proiettato in un punto $\pi(Q_\infty)$ di $\mathcal{P}^{n-1}$; se tale punto è proprio, esso viene detto *punto di fuga* della corrispondente direzione, rispetto a π .

Con abuso di linguaggio, si confonde spesso un sottospazio affine con il suo ampliamento proiettivo.

Prop. *Due rette affini parallele si intersecano in un punto improprio. Le loro proiezioni su un iperpiano proprio si intersecano nel punto di fuga della direzione comune.*

Stereovisione

