PROIETTIVO: COME E PERCHÉ

- Motivazioni.
- Spazî proiettivi.
- Esempî.
- Dipendenza e sottospazî.
- Riferimenti.
- Proiettività.
- Prospettività.

- Dualità.
- Collegamento affine – proiettivo.
- Punti improprî.
- Iperquadriche.
- Polarità.
- Iperquadriche nell' affine e nell' euclideo.
- Fascî di coniche.

MOTIVAZIONI

1) Trattazione vettoriale di allineamento, complanarità, ecc.

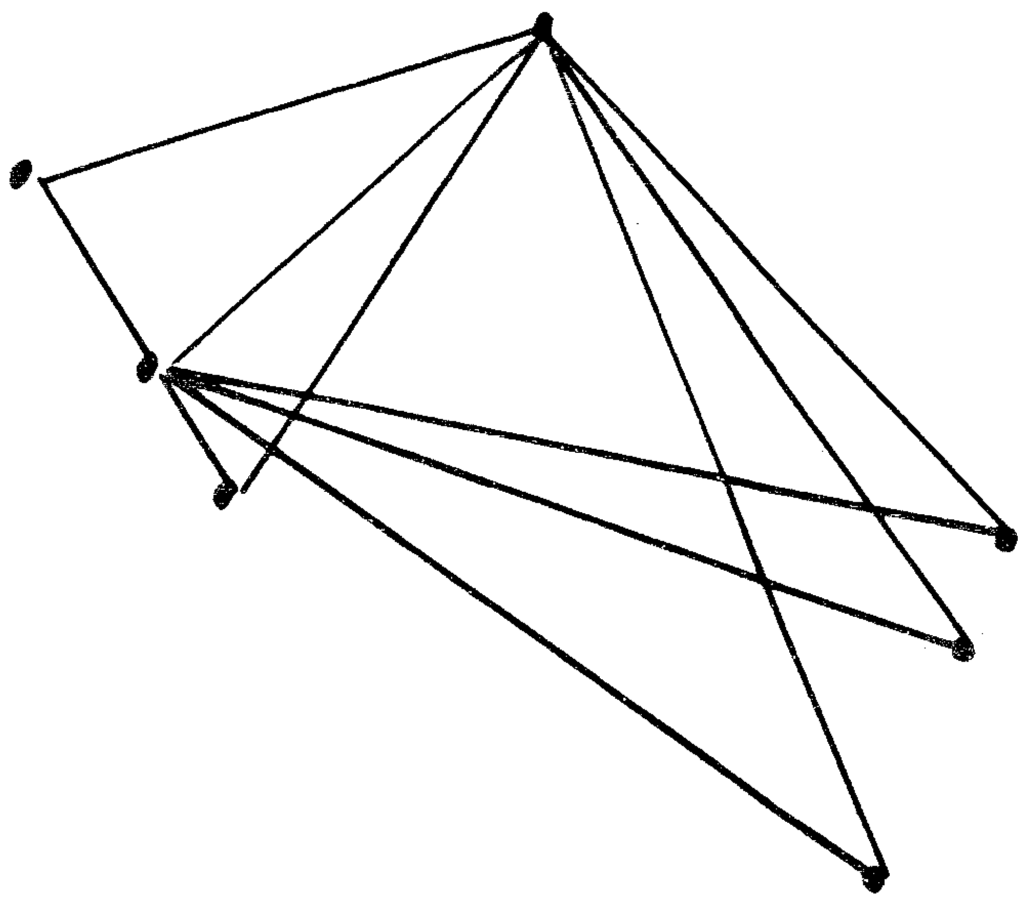
2) Trasformazioni prospettiche.

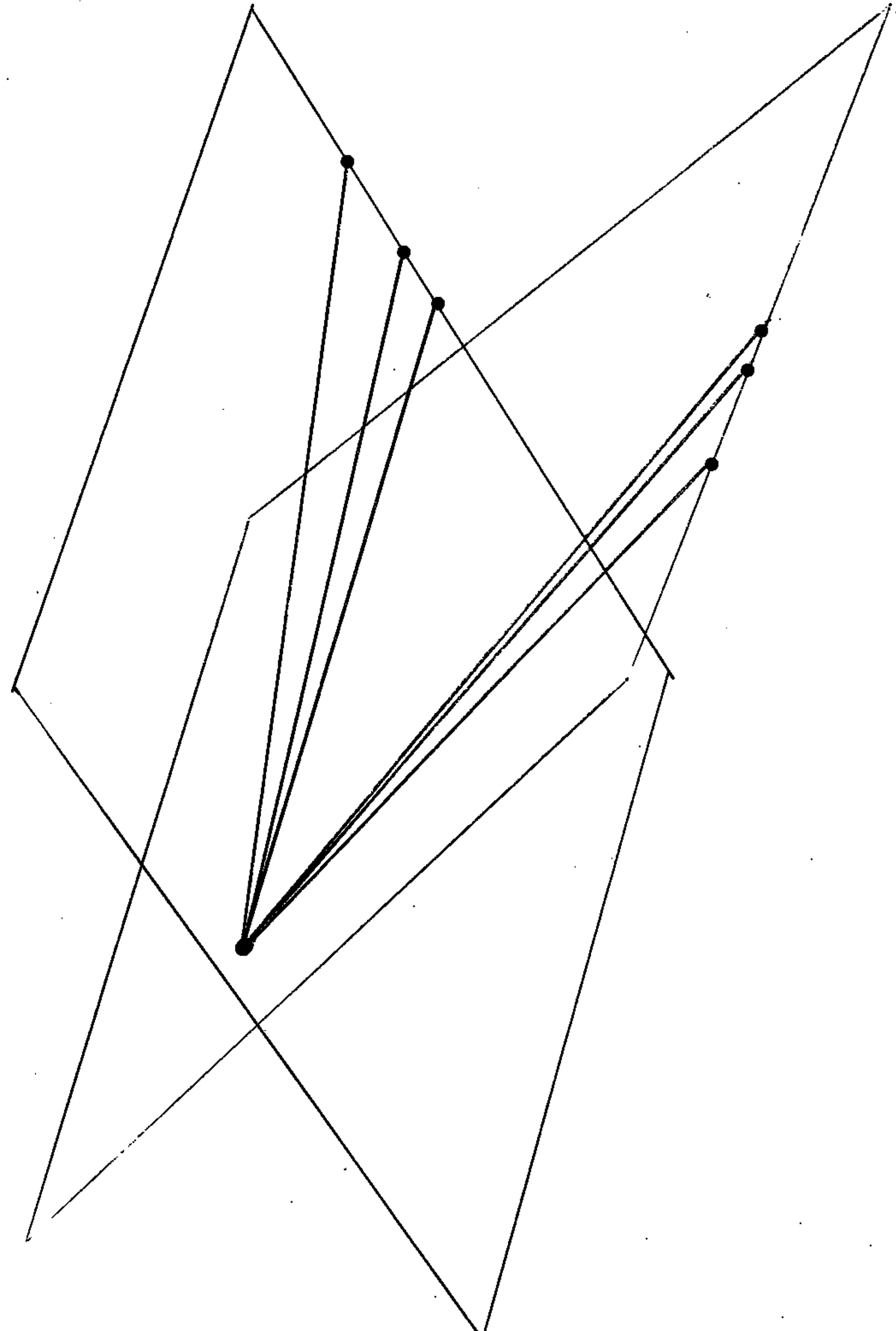
3) "Vettori nonnulli a meno di costante moltiplicativa". Gradi di libertà.

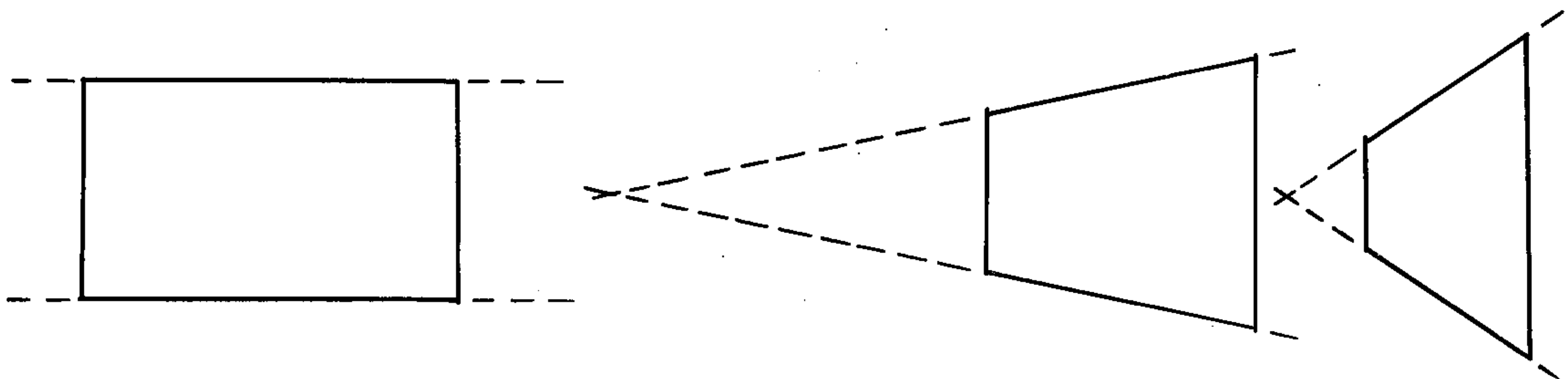
"Sottoprodotti":

1) Unificazione di situazioni separate nell' affine.

2) Dualità.







SPAZÎ PROIETTIVI

Diremo *spazio proiettivo* sul campo $\mathbf{K}$ ogni terna $(V, \mathcal{P}, \theta)$, dove V è uno spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, $\mathcal{P}$ è un insieme e $\theta : V - \{\overline{O}_V\} \to \mathcal{P}$ è un' applicazione suriettiva tale che

$$\theta(v) = \theta(w) \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{K},\ w = \alpha v.$$

Se V ha dimensione finita $n+1$, diciamo che lo spazio proiettivo ha *dimensione* n.

Gli elementi del *sostegno* $\mathcal{P}$ si dicono *punti* dello spazio proiettivo.

Solitamente si indicherà uno spazio proiettivo con il simbolo del suo sostegno $\mathcal{P}$.

Per ogni spazio vettoriale non banale V su $\mathbf{K}$ c' è uno spazio proiettivo *naturalmente associato* $(V, \mathcal{P}(V), \theta)$, dove, detta $\sim$ la relazione di *proporzionalità* su $V - \{\overline{O}_V\}$

$$v \sim w \Leftrightarrow \exists \alpha \in \mathbf{K},\ w = \alpha v,$$

si definisce $\mathcal{P}(V) = \frac{V - \{\overline{O}_V\}}{\sim}$ e

$$\begin{array}{rccc} \theta : & V - \{\overline{O}_V\} & \longrightarrow & \mathcal{P}(V) \\ & v & \longmapsto & [v]_\sim \end{array}$$

è la proiezione canonica.

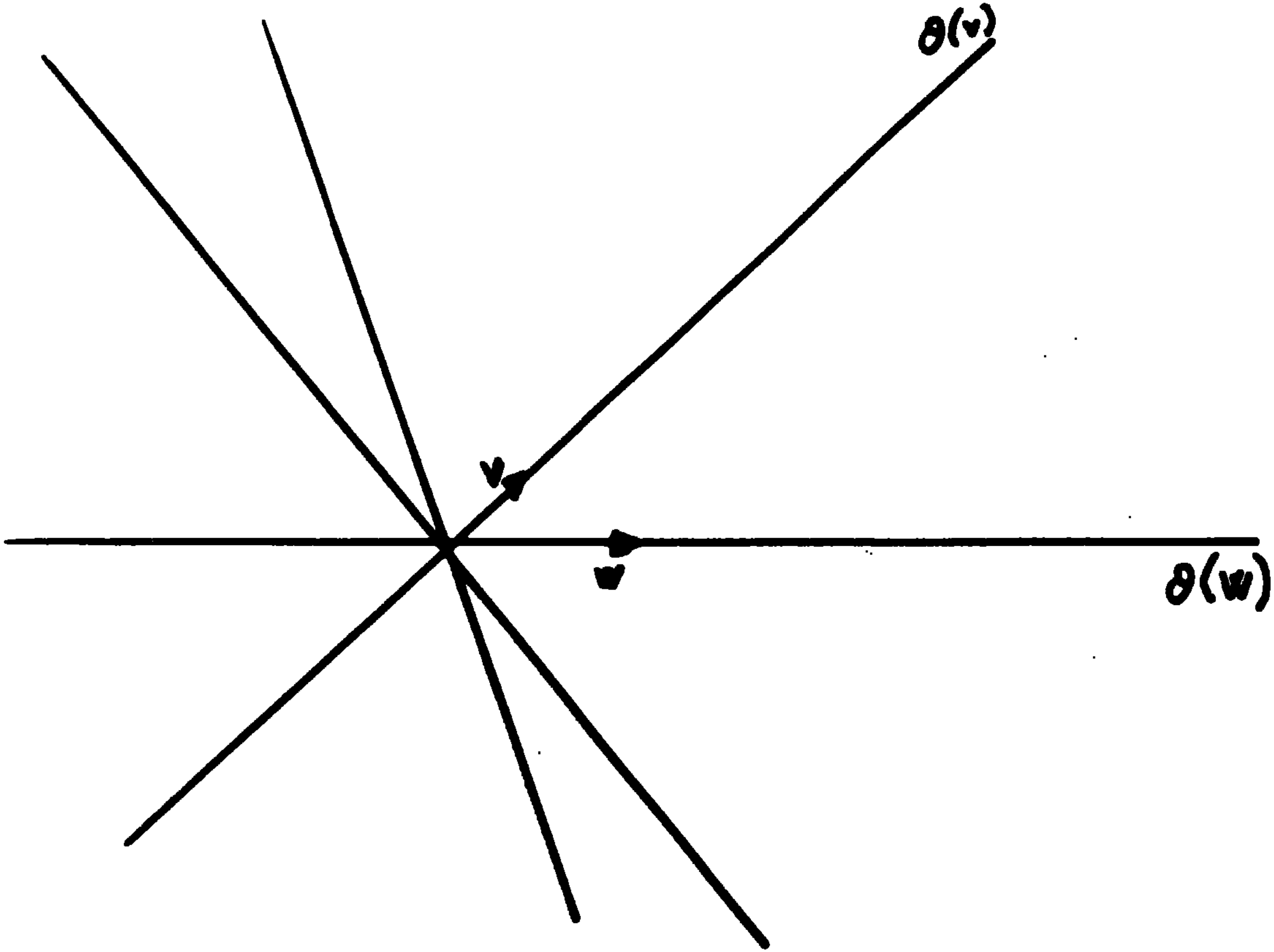
ESEMPI

1) $\mathbf{KP}^n$, canonicamente associato a $V = \mathbf{K}^{n+1}$. Punti: classi di proporzionalità di $(n+1)$–ple non-nulle di elementi di $\mathbf{K}$:

$$[(x_0, x_1, \ldots, x_n)].$$

Viene detto *spazio proiettivo standard* di dimensione n su $\mathbf{K}$.

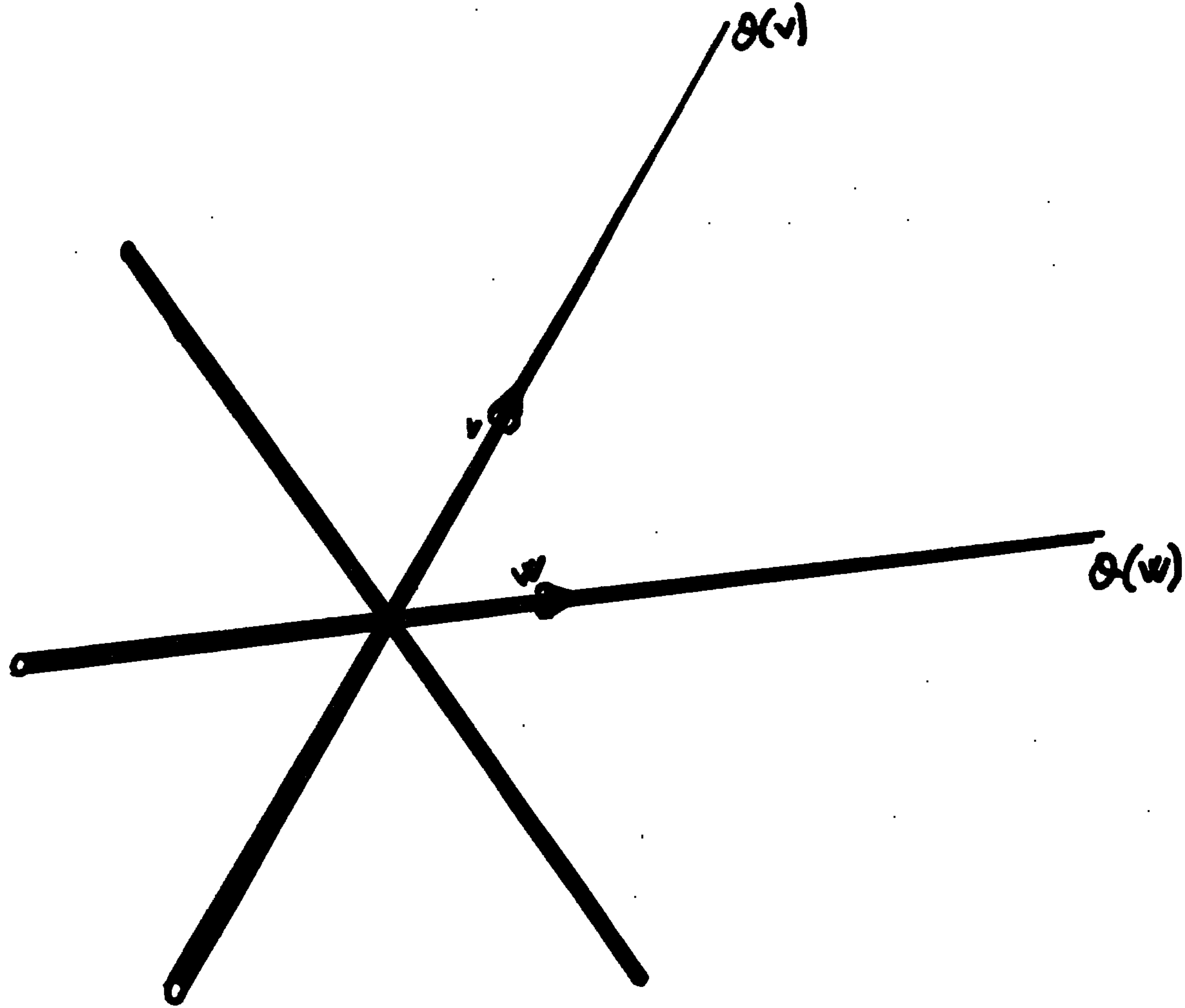
2) $V = \{$segmenti di un piano Π, uscenti da un punto $P\}$.
$\mathcal{P} = \{$rette di Π passanti per $P\}$.
Dimensione: 1.



∂(v)
v
w
∂(w)

2') $V = \{$segmenti dello spazio ordinario Σ, uscenti da un punto $P\}$.
$\mathcal{P} = \{$rette di Σ passanti per $P\}$.
Dimensione: 2.

3) $\mathcal{P}(V)$ con $V = W^* = \{$forme lineari su $W\}$. (W spazio vettoriale su $\mathbf{K}$).
I "punti" di questo spazio proiettivo sono gli *iperpiani* di $\mathcal{P}(W)$. È lo spazio proiettivo *duale* di $\mathcal{P}(W)$ e si indica con $\mathcal{P}^*(W)$.



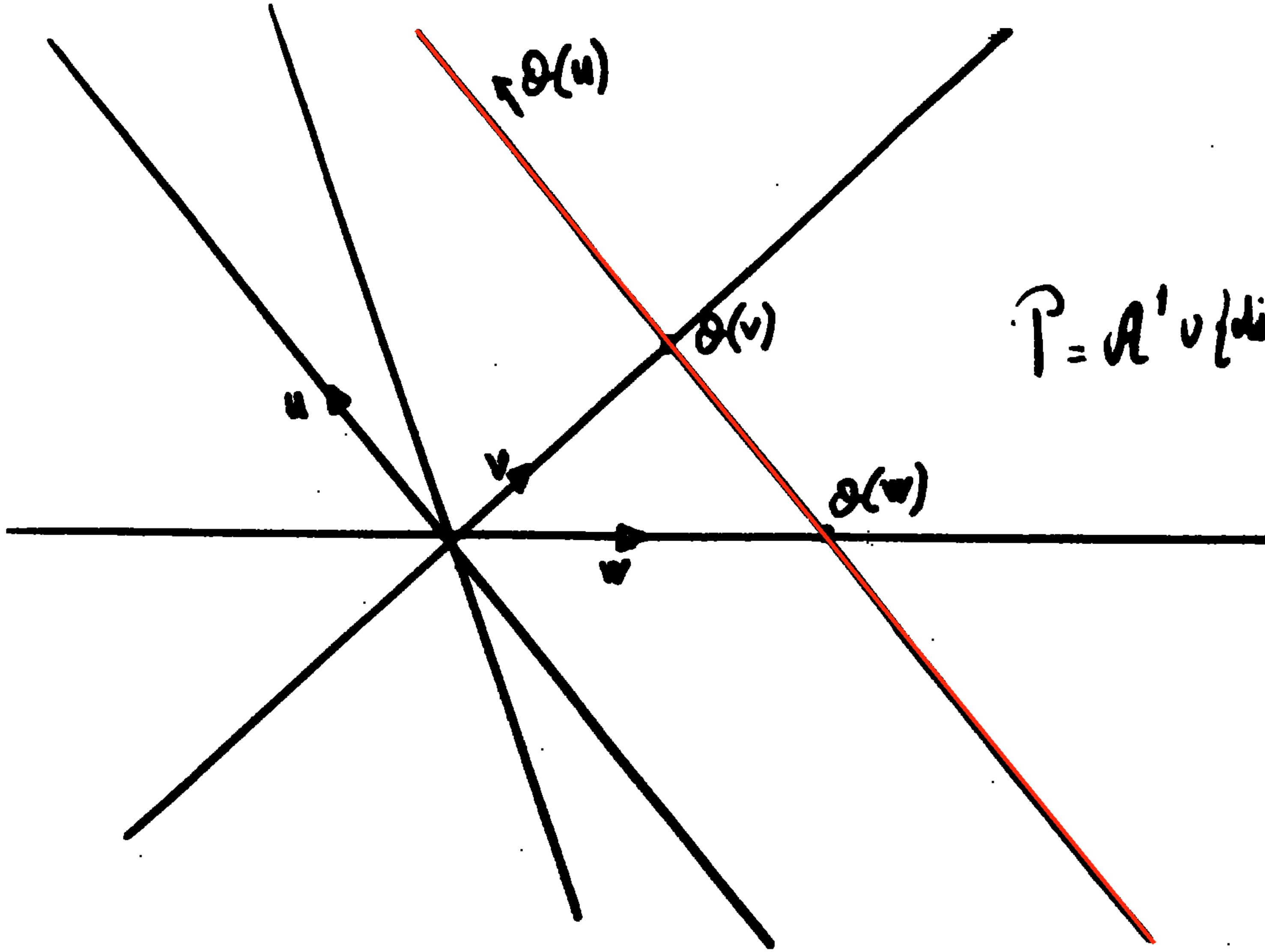
θ(v)
v
w
θ(w)

4) $\mathcal{P}(V)$ con $V = \{$forme quadratiche su $W\}$. (W spazio vettoriale su $\mathbf{K}$).
I "punti" di questo spazio proiettivo sono le *iperquadriche* di $\mathcal{P}(W)$.

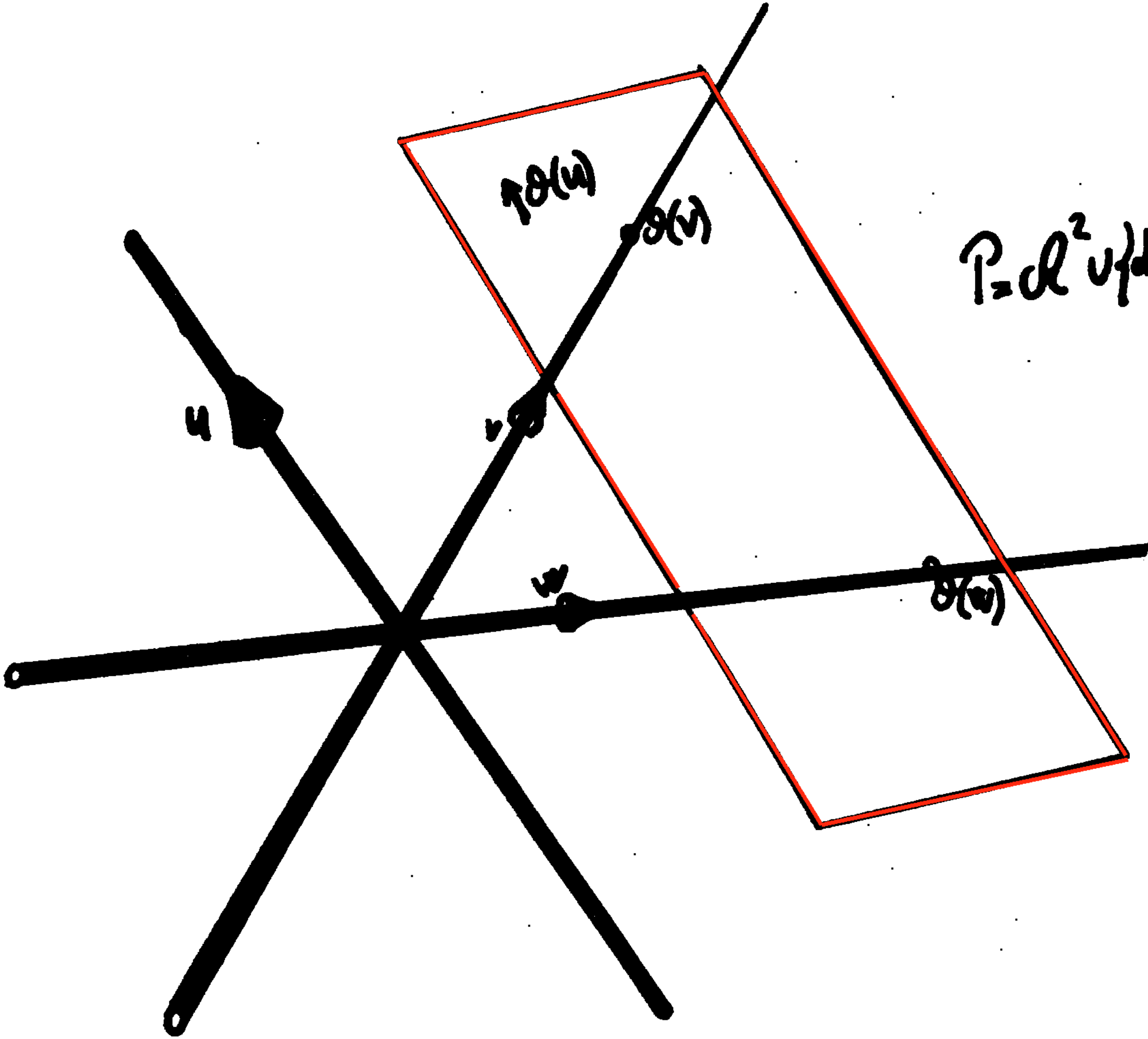
5) $\mathcal{P}(V)$ con V insieme delle soluzioni (di cui almeno una non banale) di un sistema lineare omogeneo.

6) $\mathcal{P}(V)$ con V insieme delle soluzioni (di cui almeno una non banale) di un' equazione differenziale lineare omogenea.

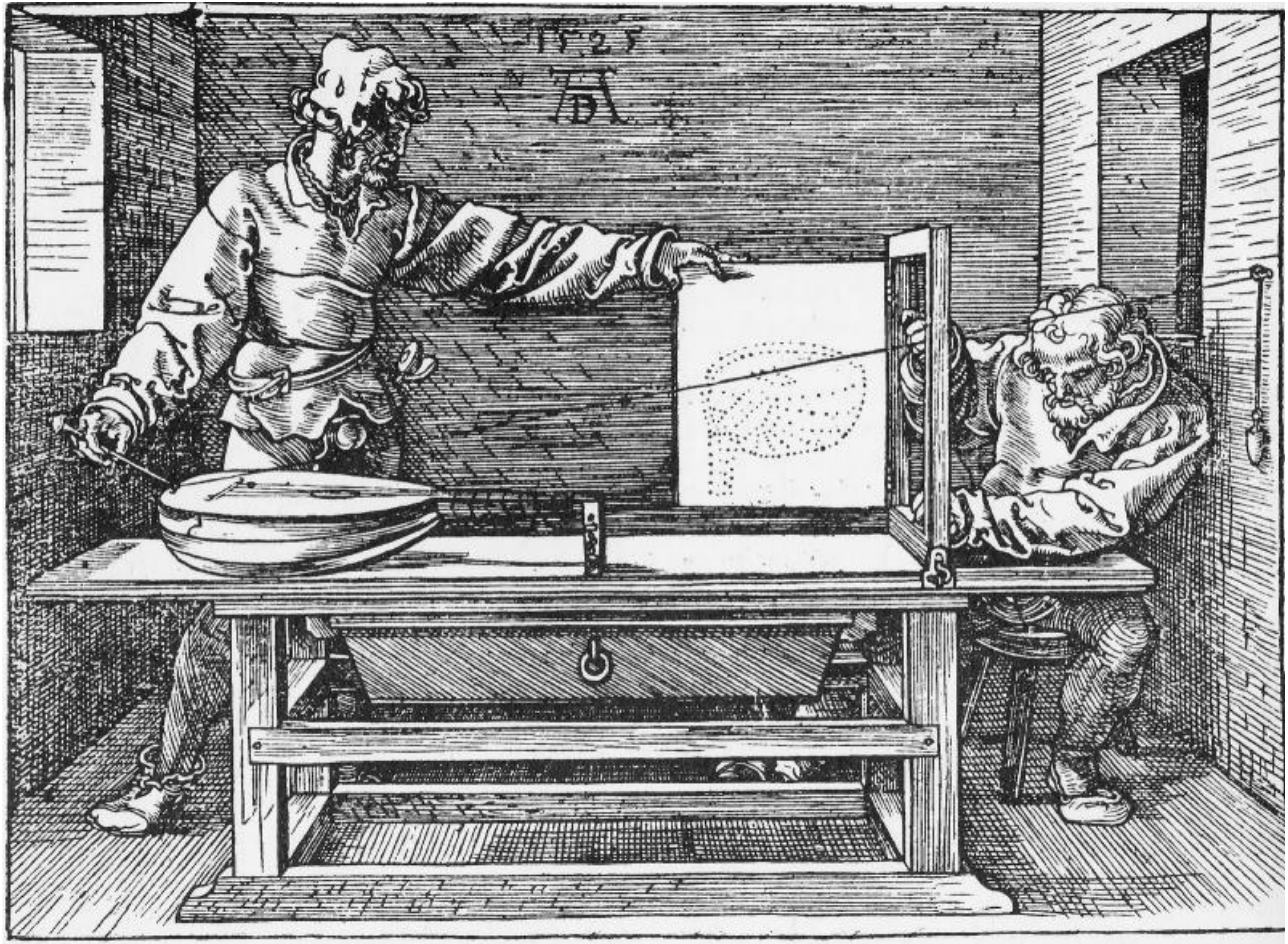
7) $V = \mathbf{K}^{n+1}$, $\mathcal{P} = \mathcal{A}^n \cup \{\text{direzioni di } \mathcal{A}^n\}$. ($\mathcal{A}^n$ spazio affine n–dimensionale). θ verrà descritta più avanti.



$\mathbb{P} = \mathbb{A}^1 \cup \{\text{direzione}\}$



$P = \mathbb{R}^2 \cup \{\text{direzioni}\}$


1525

DIPENDENZA E SOTTOSPAZÎ

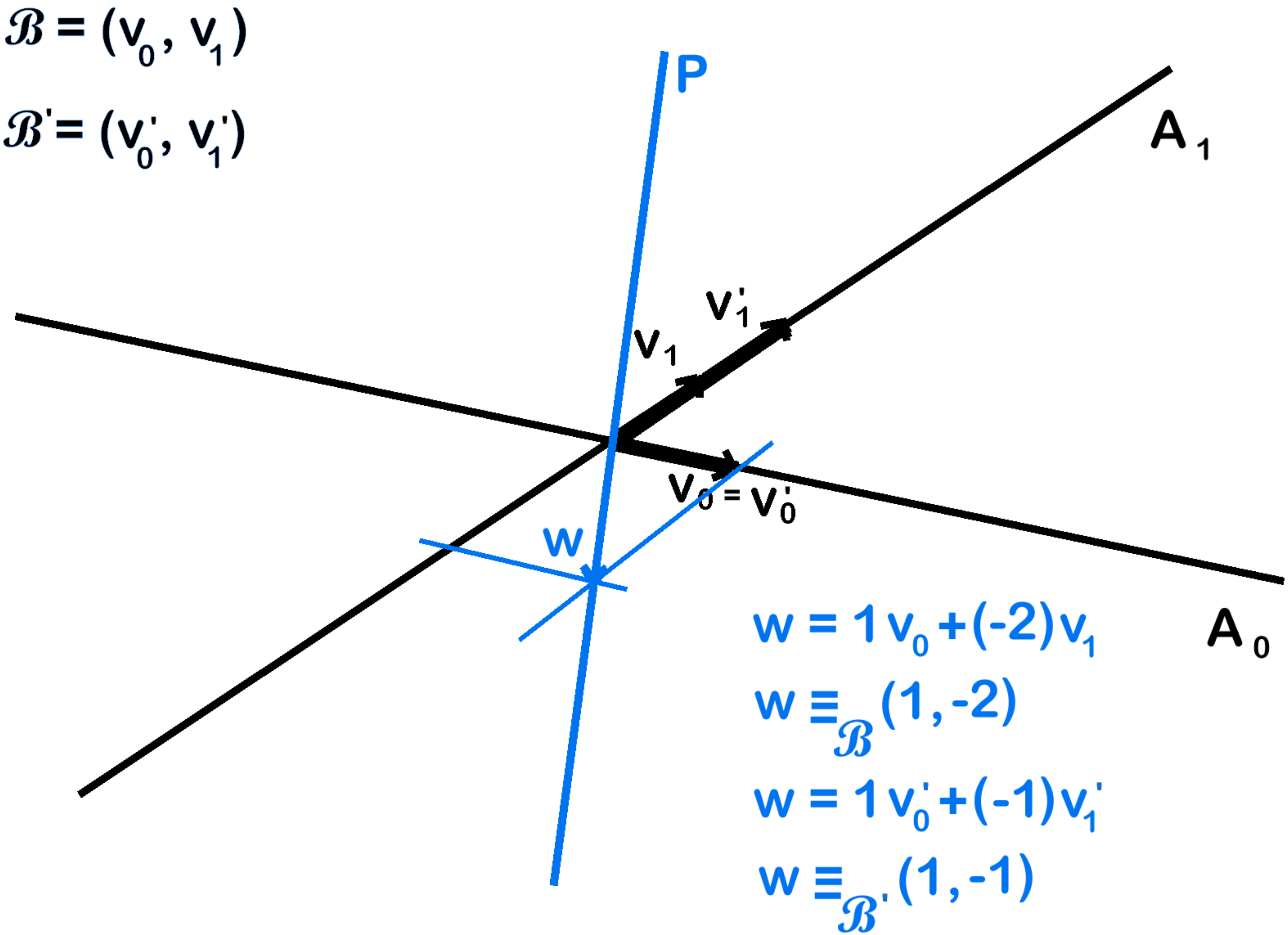
Prop. *In uno spazio vettoriale V su $\mathbf{K}$, dati $v_1 \sim v_1', \ldots, v_h \sim v_h'$, vale*

$$v_1, \ldots, v_h \text{ \textit{lin. dip.} } \Leftrightarrow v_1', \ldots, v_h' \text{ \textit{lin. dip.}}$$

In $(V, \mathcal{P}, \theta)$, dati $P_1 = \theta(v_1), \ldots, P_h = \theta(v_h)$, diciamo che $P_1, \ldots, P_h$ sono *linearmente dipendenti* se $v_1, \ldots, v_h$ lo sono in V.

Sottospazio proiettivo di $(V, \mathcal{P}, \theta)$ è ogni spazio proiettivo $(V', \mathcal{P}', \theta')$, dove V' è sottospazio vettoriale di V, $\mathcal{P}' = \theta(V')$, $\theta' = \theta|_{V'}$.

Prop. *Sostegni di sottospazî proiettivi di* $\mathbf{KP}^n$ *sono tutti e soli gli insiemi di soluzioni (di cui almeno una non banale), a meno di proporzionalità, di sistemi lineari omogenei in* $n+1$ *incognite.*



$\mathcal{B} = (v_0, v_1)$
$\mathcal{B}' = (v_0', v_1')$
P
A_1
v_1'
v_1
$v_0 = v_0'$
w
A_0
$w = 1v_0 + (-2)v_1$
$w \equiv_{\mathcal{B}} (1, -2)$
$w = 1v_0' + (-1)v_1'$
$w \equiv_{\mathcal{B}'} (1, -1)$

RIFERIMENTI

In V, spazio vettoriale su $\mathbf{K}$, diremo che due basi ordinate $\mathcal{B} = (v_0, \dots, v_n)$, $\mathcal{B}' = (v'_0, \dots, v'_n)$ sono *proporzionali* (scritto $\mathcal{B} \approx \mathcal{B}'$) se

$$\exists \alpha \in \mathbf{K} \text{ tale che } v'_i = \alpha v_i \ (i = 0, \dots, n).$$

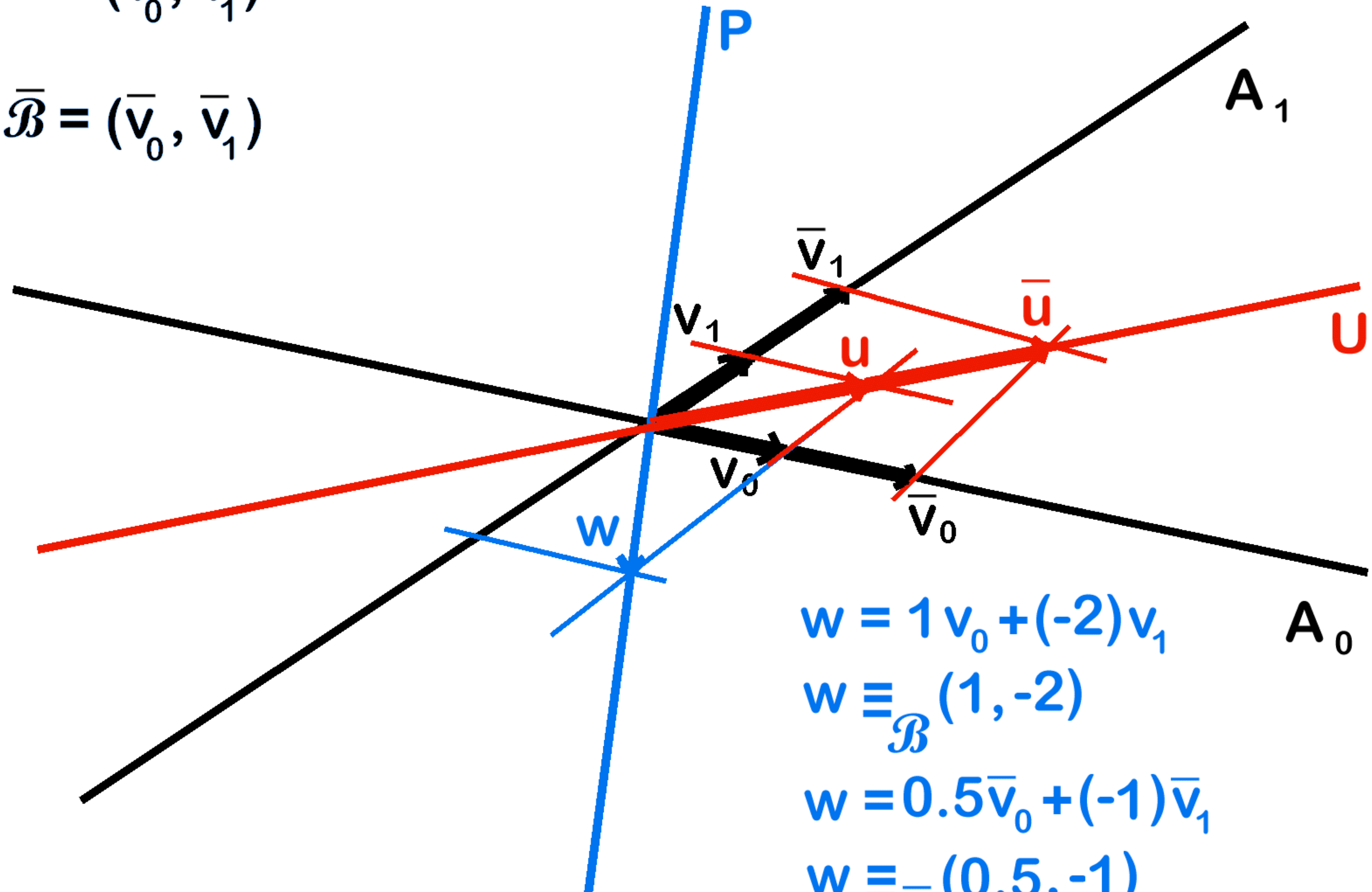
Chiameremo *riferimento* (*proiettivo* o *omogeneo*) di uno spazio proiettivo $(V, \mathcal{P}, \theta)$ di dimensione n ogni $(n+2)$–pla $\mathcal{S} = (A_0, \ldots, A_n, U)$ di punti a $n+1$ a $n+1$ linearmente indipendenti. $A_0, \ldots, A_n$ si dicono *punti fondamentali*, U *punto unità*.

Prop. *È biiettiva l' applicazione*

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\varphi}: & \dfrac{\{\text{Basi}\}}{\approx} & \to & \{\textit{Riferimenti}\} \\ & [(v_0, \ldots, v_n)] & \mapsto & ([v_0], \ldots, [v_n], [v_0 + \cdots + v_n]) \end{array}$$

$\mathcal{B} = (v_0, v_1)$

$\bar{\mathcal{B}} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1)$



$w = 1v_0 + (-2)v_1$

$w \equiv_{\mathcal{B}} (1, -2)$

$w = 0.5\bar{v}_0 + (-1)\bar{v}_1$

$w \equiv_{\bar{\mathcal{B}}} (0.5, -1)$

Dato un riferimento $\mathcal{S}$, una qualunque base $\mathcal{B}$ rappresentante di $\tilde{\varphi}^{-1}(\mathcal{S})$ si dice *normalizzata rispetto ad* $\mathcal{S}$.

Dato un punto P, sue *coordinate proiettive* (o *omogenee*) *rispetto ad* $\mathcal{S}$ sono le componenti $(x_0, \dots, x_n)$ di un suo qualunque rappresentante rispetto ad una base normalizzata rispetto ad $\mathcal{S}$. Si scriverà $P \equiv (x_0, \dots, x_n)$.

Le coordinate proiettive di un punto sono non tutte nulle e determinate a meno di un fattore moltiplicativo.

PROIETTIVITÀ

Siano $(V, \mathcal{P}, \theta)$, $(V', \mathcal{P}', \theta')$ spazî proiettivi su $\mathbf{K}$. Sia $T : V \to V'$ una trasformazione lineare **iniettiva**. Allora T induce un' applicazione $\bar{T} : V - \{\overline{O}_V\} \to V' - \{\overline{O}_{V'}\}$ compatibile con le proporzionalità, cioè tale che

$$u \sim v \;\Leftrightarrow\; \bar{T}(u) \sim \bar{T}(v).$$

Dunque T induce anche un' applicazione

$$\begin{array}{rccc} \omega_T : & \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathcal{P}' \\ & \theta(v) & \longmapsto & \theta'(T(v)) \end{array}$$

che verrà detta *associata* a T.

Chiameremo *proiettività* da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ ogni applicazione $\omega : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$ tale che esista una trasformazione lineare iniettiva T per cui sia $\omega = \omega_T$. Una proiettività da $\mathcal{P}$ a se stesso viene chiamata *omografia*.

Se $T : V \to V'$ è una trasformazione lineare non iniettiva e $\mathcal{K}_T$ è il sottospazio proiettivo associato a $\ker T$, allora T induce un' applicazione $\bar{T}: V - \ker T \to V' - \{\overline{O}_{V'}\}$ e una $\omega_T : \mathcal{P} - \mathcal{K}_T \to \mathcal{P}'$; ogni applicazione come quest' ultima ω_T viene detta *proiettività degenere*, e $\mathcal{K}_T$ viene considerato il suo *nucleo*.

Prop. *Ogni proiettività, anche degenere, trasforma sottospazî proiettivi in sottospazî proiettivi; se non è degenere, conserva le dimensioni.*

Prop. *Dati uno spazio proiettivo $\mathcal{P}$ di dimensione n e un suo riferimento $\mathcal{S}$, l' applicazione $\Phi_{\mathcal{S}}$ che ad ogni punto associa la classe di proporzionalità delle sue coordinate proiettive rispetto ad $\mathcal{S}$ è una proiettività*

$$\Phi_{\mathcal{S}}: \quad \mathcal{P} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{KP}^n.$$

Data una quaterna (A, B, C, D) di punti di una retta proiettiva, dette (α, β) le coordinate proiettive di D rispetto al riferimento (A, B, C), si chiama *birapporto* della quaterna (scritto $(ABCD)$) il numero $\frac{\alpha}{\beta}$ se $\beta \neq 0$, il simbolo ∞ altrimenti.

Prop. *Ogni proiettività conserva i birapporti di punti allineati.*

Teor. *Un' applicazione fra due rette proiettive è una proiettività se e solo se conserva i birapporti di tutte le quaterne.*

Teor. *Un' applicazione biiettiva fra due spazî proiettivi di dimensioni* $n \geq 2$ *è una proiettività se e solo se trasforma tutte le rette in rette.*

Teor. *(fondamentale delle proiettività) Dati, in due spazî proiettivi $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$, riferimenti $\overline{\mathcal{S}}, \overline{\mathcal{S}}'$ rispettivamente, esiste ed è unica la proiettività da $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}'$ che trasforma ordinatamente $\overline{\mathcal{S}}$ in $\overline{\mathcal{S}}'$.*

Prop. *Dati spazî proiettivi $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ di dimensioni m, n, loro riferimenti $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ rispettivamente e una proiettività (anche degenere) $\omega : \mathcal{P} \to \mathcal{P}'$, esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(m+1)}$ per cui, se $A \equiv (x)$, $\omega(A) \equiv (y)$*

$$\lambda(y) = M \cdot (x)$$

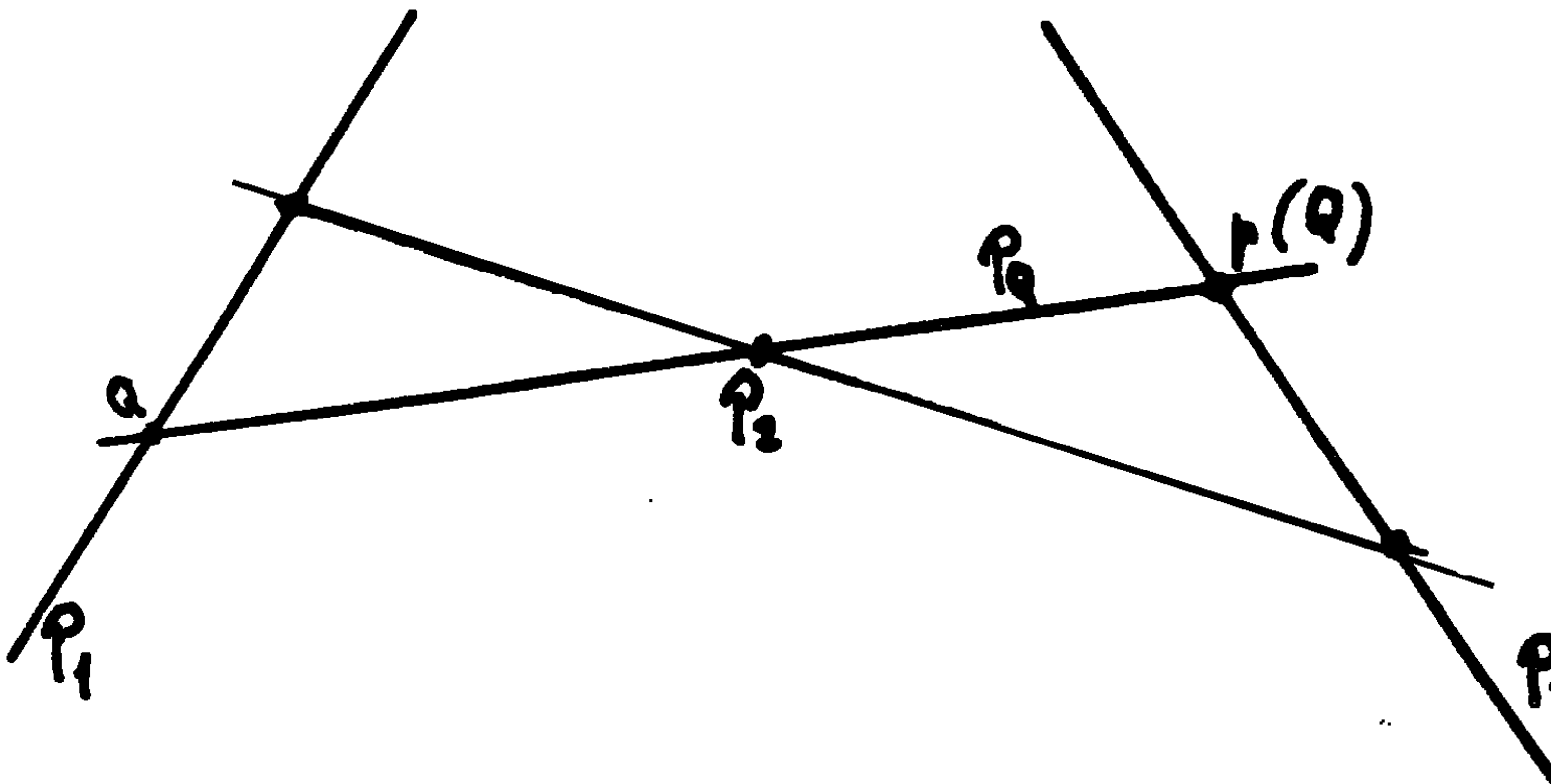
per $\lambda \in \mathbf{K}$ opportuno.

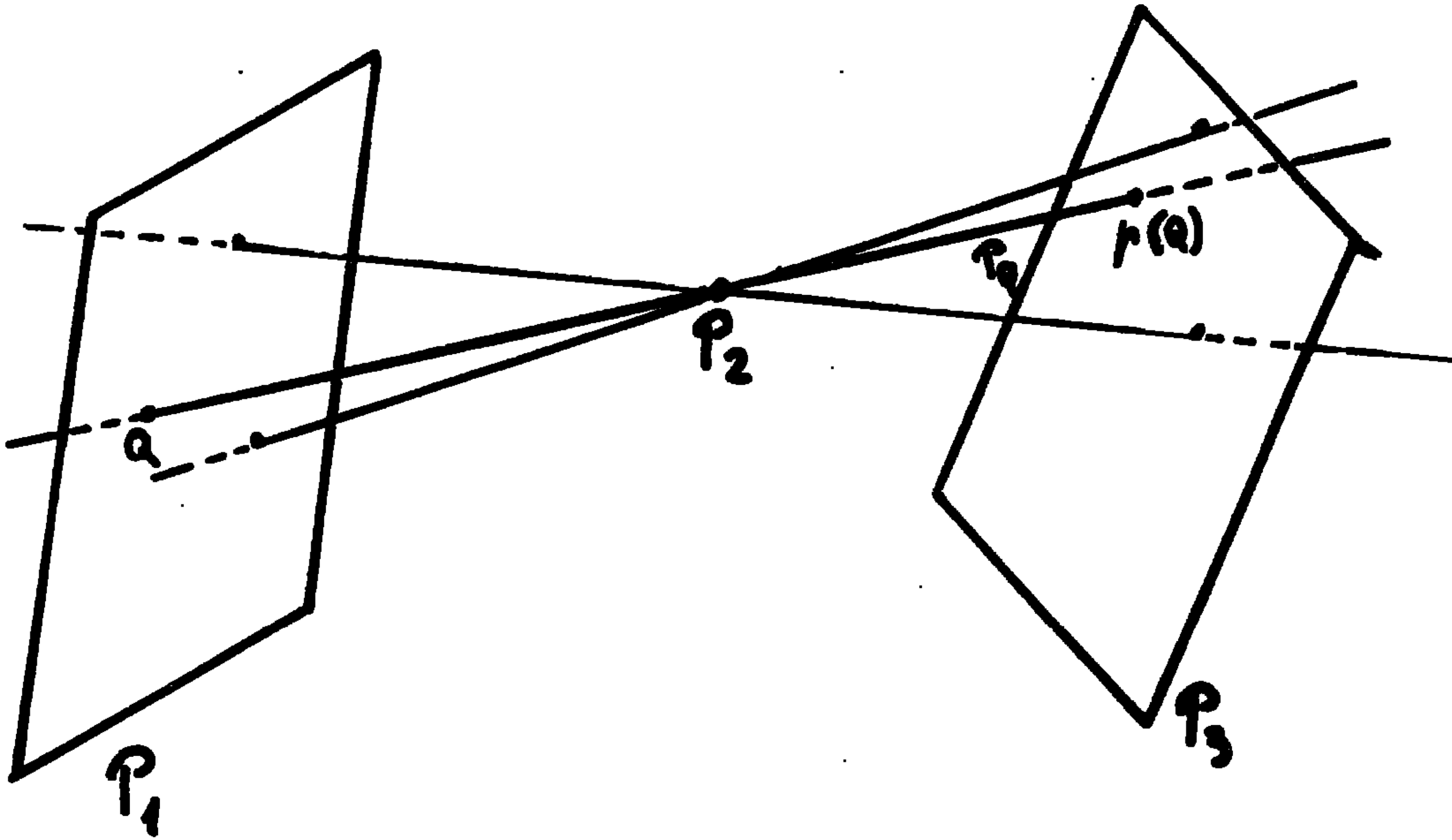
PROSPETTIVITÀ

Dati sottospazî $\mathcal{P}', \mathcal{P}''$ di uno spazio proiettivo $\mathcal{P}$, chiamiamo sottospazio *intersezione* [*congiungente*] il sottospazio proiettivo associato al sottospazio vettoriale intersezione [congiungente] dei sottospazî vettoriali ad essi associati.

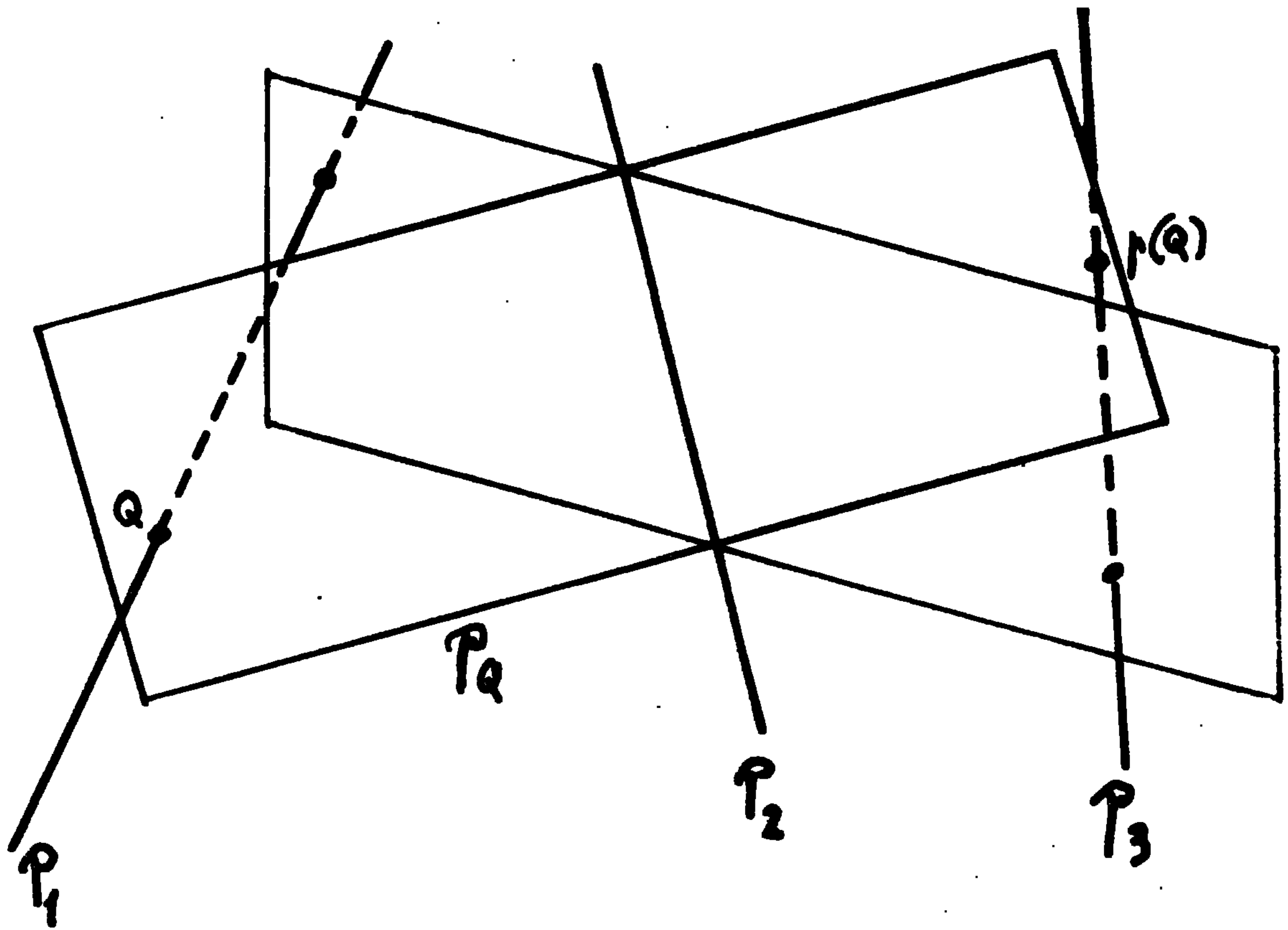
Siano $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ sottospazî di uno spazio proiettivo $\mathcal{P}$. Per ogni punto $Q \in \mathcal{P}_1$, sia $\mathcal{P}_Q$ il sottospazio congiungente di Q e $\mathcal{P}_2$.

Se per ogni $Q \in \mathcal{P}_1$ vale che $\mathcal{P}_Q \cap \mathcal{P}_3$ è costituito da un solo punto, l' applicazione $p : \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_3$ che a Q associa tale punto viene detta *proiezione di* $\mathcal{P}_1$ *da* $\mathcal{P}_2$ *su* $\mathcal{P}_3$.


$p(Q)$
p_Q
Q
p_2
p_1
p_3



P_1
q
P_2
$p(q)$
r_q
P_3



Q
$r(Q)$
P_Q
P_1
P_2
P_3

Se $\dim \mathcal{P}_1 = \dim \mathcal{P}_3$ e la proiezione non è costante, essa viene detta *prospettività* e $\mathcal{P}_2$ è detto *spazio di prospettiva.*

Teor. *Ogni proiettività fra sottospazî di uguale dimensione è la composizione di un numero finito di prospettività.*

DUALITÀ

Due spazî proiettivi si dicono *isomorfi* se esiste una proiettività biiettiva (*isomorfismo*) fra loro.

Prop. *Ogni spazio proiettivo* $(V, \mathcal{P}, \theta)$ *è isomorfo allo spazio proiettivo* $\mathcal{P}(V)$ *canonicamente associato a* V.

Chiamiamo *dualizzazione* ogni proiettività da $\mathcal{P}(V)$ a $\mathcal{P}^*(V)$.

Prop. *Fissato su* $\mathcal{P}(V)$ *un riferimento* $\mathcal{S}$, *l' applicazione che ad ogni punto* $P \equiv (\alpha_0, \dots, \alpha_n)$ *associa l' iperpiano di equazione* $\alpha_0 x_0 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ *è una dualizzazione.*

Prop. *Data una dualizzazione* $\omega : \mathcal{P}(V) \to \mathcal{P}^*(V)$, *con* $\dim \mathcal{P}(V) = n$, *comunque dato un sottospazio* $\mathcal{P}'$ *di* $\mathcal{P}(V)$, *con* $\dim \mathcal{P}' = h$,

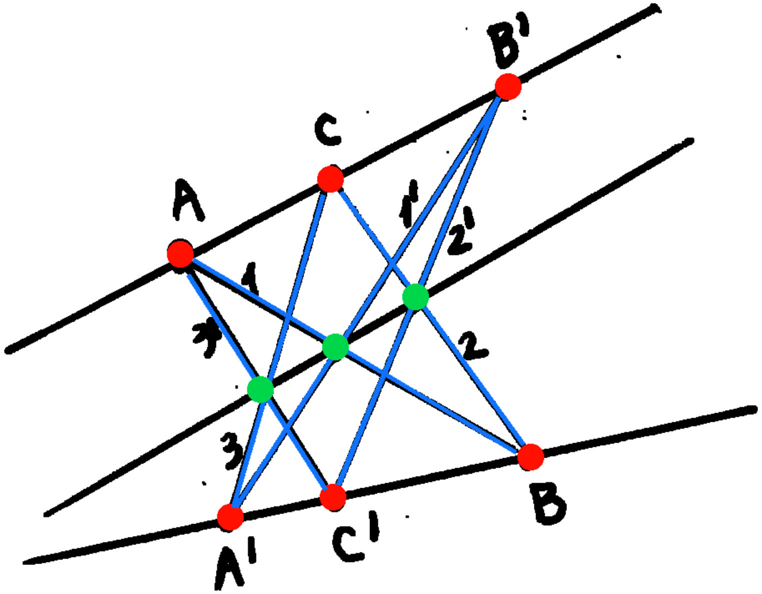
i) *esiste esattamente un sottospazio* $\mathcal{P}''$, *con* $\dim \mathcal{P}'' = n - h - 1$, *contenuto in* $\omega(Q)$ *per ogni* $Q \in \mathcal{P}'$;

ii) *non esistono sottospazî di dimensione maggiore con la stessa proprietà;*

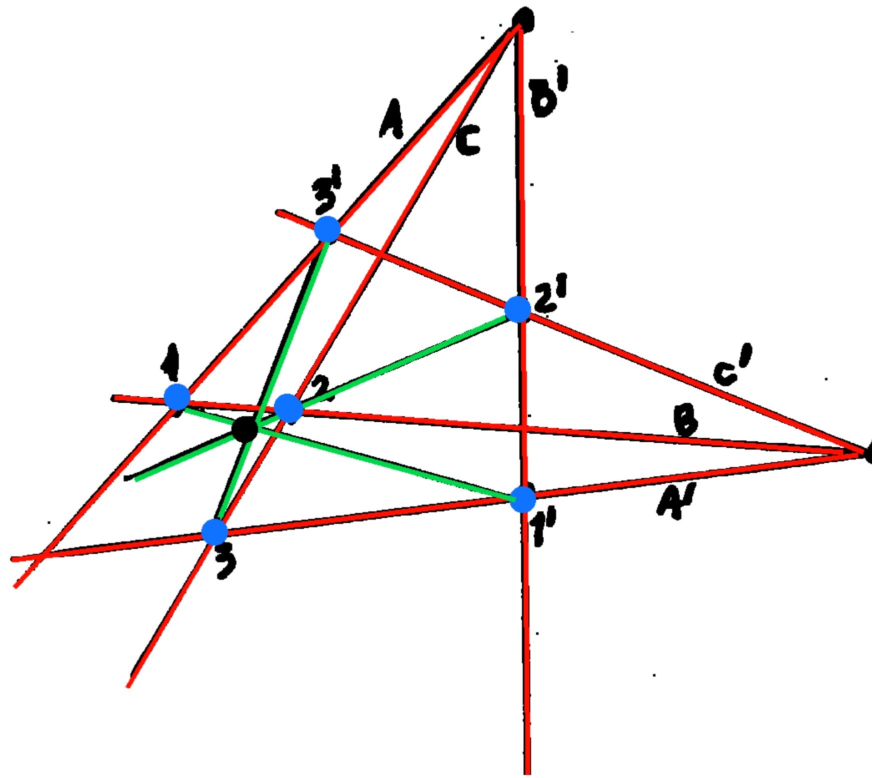
iii) *l' applicazione che ad ogni* $\mathcal{P}'$ *associa il sottospazio* $\mathcal{P}''$ *di i) conserva (rovesciandola) l' inclusione.*

Cor. *(Dualità) Ad ogni proposizione vera della geometria proiettiva ne corrisponde una vera (detta duale) ottenuta dalla precedente scambiando la dimensione h con la dimensione $n-h-1$, $\subset$ con $\supset$.*

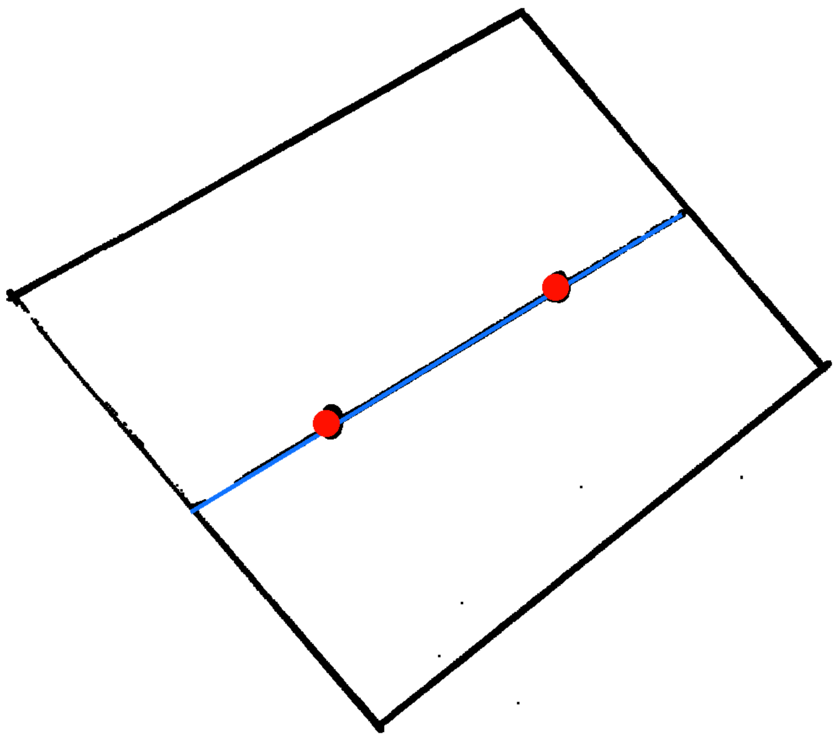
Si noti che una analoga proprietà di dualità **non** vale negli spazî affini.

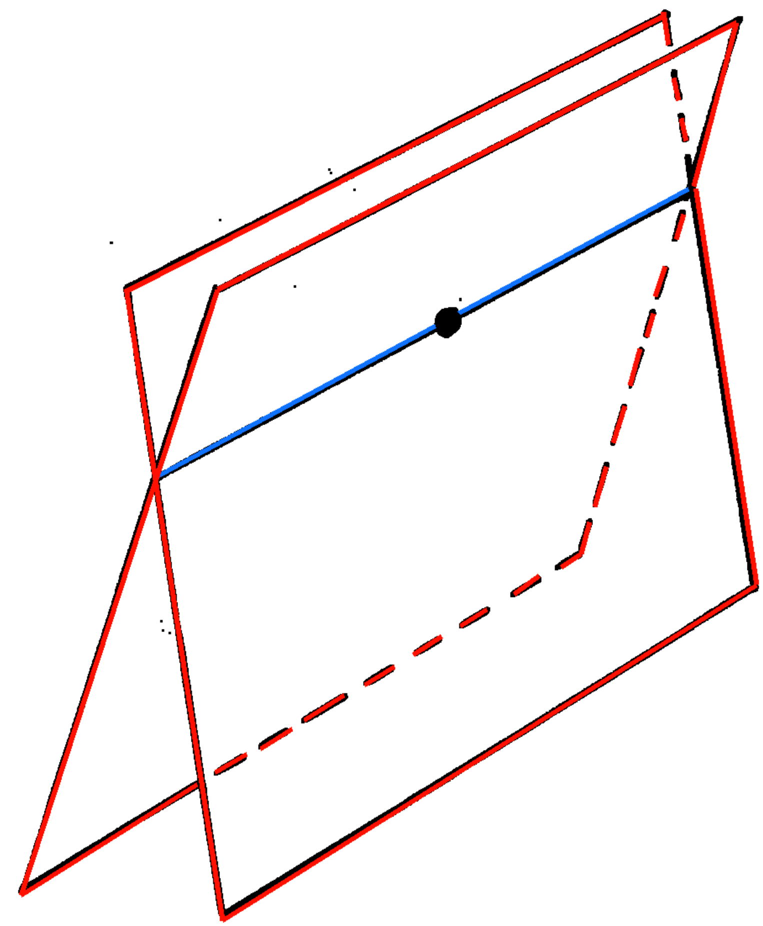


A
C
B'
1
1'
2'
3'
2
3
A'
C'
B



A
C
B'
3'
2'
1
2
C'
B
A'
1'
3





COLLEGAMENTO AFFINE–PROIETTIVO

È possibile trovare una applicazione biiettiva fra uno spazio proiettivo e uno spazio affine della stessa dimensione sullo stesso **K**?

Nel caso di **K** infinito, sì; in particolare, se $\mathbf{K} = \mathbf{R}$, entrambi gli spazî hanno la potenza del continuo.

Ma è possibile trovare una tale corrispondenza che trasformi sottospazî in sottospazî?

No: in un piano proiettivo tutte le coppie di rette sono incidenti, mentre in un piano affine ciò non è sempre vero.

$$\begin{cases} aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \\ dX_0 + eX_1 + fX_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} bx + cy + a = 0 \\ ex + fy + d = 0 \end{cases}$$

Ampliamento proiettivo di uno spazio affine.
Sia $\mathcal{A}^n$ uno spazio affine n–dimensionale su $\mathbf{K}$; sia inoltre $\vec{\mathcal{A}}^n$ il suo spazio dei vettori liberi. Sia infine $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ lo spazio proiettivo naturalmente associato ad $\vec{\mathcal{A}}^n$.

Prop. *I punti di $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ sono le direzioni di $\mathcal{A}^n$.*

Fissiamo un riferimento affine $\mathcal{S} = (M, \vec{\mathcal{B}})$ su $\mathcal{A}^n$. Rispetto ad esso ogni vettore libero avrà una n–pla di componenti, e ogni punto P avrà una n–pla di coordinate (le componenti di $\vec{MP}$).

Completiamo ora l' esempio 7 dell' inizio, definendo l' applicazione (che risulta biiettiva)

$$\theta: \mathbf{K}^{n+1} - \{(0)\} \to \mathcal{A}^n \cup \vec{\mathcal{P}}^{n-1}$$

$$(X_0, X_1, \dots, X_n) \mapsto \begin{cases} P \equiv \left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) & \text{se } X_0 \neq 0 \\ [\vec{u}] \text{ con } \vec{u} \equiv (X_1, \dots, X_n) & \text{se } X_0 = 0. \end{cases}$$

Prop. $(\mathbf{K}^{n+1}, \mathcal{A}^n \cup \vec{\mathcal{P}}^{n-1}, \theta)$ è *uno spazio proiettivo. La sua struttura non dipende dalla scelta di* $\mathcal{S}$.

Tale spazio è detto *ampliamento proiettivo* di $\mathcal{A}^n$.

Carte affini di uno spazio proiettivo.

Sia $\mathcal{P}^n$ uno spazio proiettivo n–dimensionale su $\mathbf{K}$. Indichiamo con $\mathbf{K}^n$ anche lo spazio affine naturalmente associato allo spazio vettoriale $\mathbf{K}^n$.

Sia $\mathcal{P}^{n-1}$ un iperpiano di $\mathcal{P}^n$. Fissiamo un riferimento proiettivo $\mathcal{S}$ su $\mathcal{P}^n$ in modo tale che $\mathcal{P}^{n-1}$ abbia equazione $X_0 = 0$.

Prop. *L' applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \alpha : & \mathcal{P}^n - \mathcal{P}^{n-1} & \longrightarrow & \mathbf{K}^n \\ & P & \longmapsto & \left(\frac{X_1}{X_0}, \dots, \frac{X_n}{X_0}\right) \end{array}$$

è biiettiva e manda sottospazî non contenuti in $\mathcal{P}^{n-1}$ in sottospazî affini della stessa dimensione. α non dipende dalla scelta di $\mathcal{S}$.

Su $\mathcal{P}^n - \mathcal{P}^{n-1}$ viene quindi indotta una struttura di spazio affine, che viene detta *carta affine*.

Prop. *Se $\mathcal{A}^n = \mathbf{K}^n$, $\mathcal{P}^n$ ne è l' ampliamento proiettivo e $\mathcal{P}^{n-1} = \vec{\mathcal{P}}^{n-1}$, allora $\alpha \circ \theta^{-1} = id_{\mathbf{K}^n}$.*

PUNTI IMPROPRI

Dato l' ampliamento proiettivo $\mathcal{P}^n = \mathcal{A}^n \cup \vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ di uno spazio affine $\mathcal{A}^n$, si dice *improprio* ogni punto, sottospazio proiettivo, sottoinsieme di $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$, che verrà chiamato *iperpiano improprio*. Un analogo elemento verrà detto *proprio* se non è contenuto nell' iperpiano improprio.

Si noti che ogni riferimento affine di $\mathcal{A}^n$ determina un riferimento proiettivo (che assumeremo d' ora in poi) dell' ampliamento proiettivo, tale che, dette $x_1, \dots, x_n$ le coordinate affini di un punto $P \in \mathcal{A}^n$ e $X_0, X_1, \dots, X_n$ le coordinate proiettive di $\theta^{-1}(P)$, per $i = 1, \dots, n$ valga $\quad x_i = \dfrac{X_i}{X_0}$.

Con tali riferimenti, vale anche

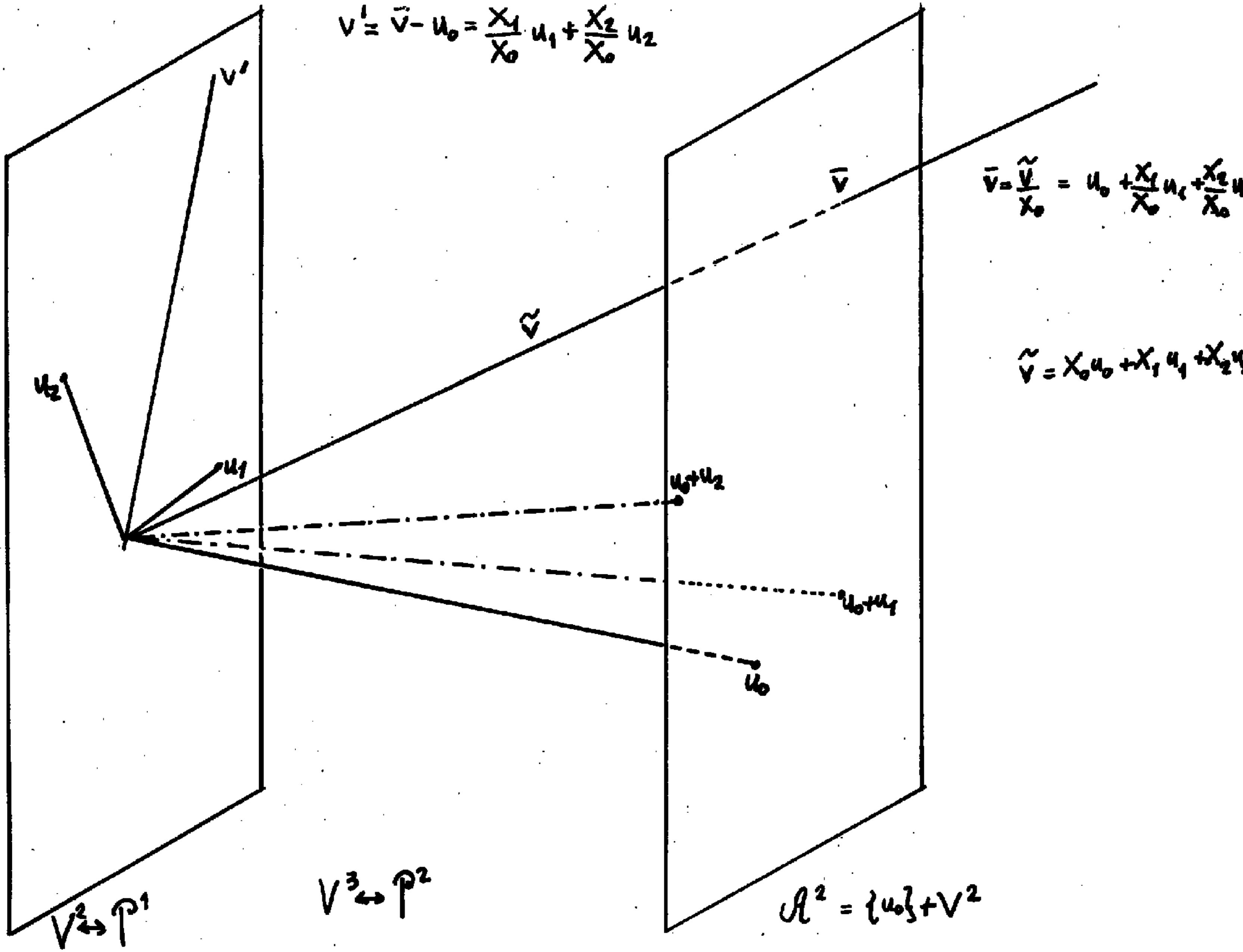
$$(X_0, X_1, \dots, X_n) = \lambda(1, x_1, \dots, x_n).$$

Prop. *Se un iperpiano di $\mathcal{A}^n$ ha equazione*

$$a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n + b = 0,$$

allora il suo ampliamento proiettivo ha equazione

$$bX_0 + a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n = 0.$$



$v' = \bar{v} - u_0 = \frac{X_1}{X_0} u_1 + \frac{X_2}{X_0} u_2$
v'
$\bar{v}$
$\bar{v} = \frac{\tilde{v}}{X_0} = u_0 + \frac{X_1}{X_0} u_1 + \frac{X_2}{X_0} u_2$
$\tilde{v}$
$\tilde{v} = X_0 u_0 + X_1 u_1 + X_2 u_2$
u_2
u_1
$u_0 + u_2$
$u_0 + u_1$
u_0
$V^2 \leftrightarrow \mathbb{P}^1$
$V^3 \leftrightarrow \mathbb{P}^2$
$\mathcal{A}^2 = \{u_0\} + V^2$

Si consideri la proiezione π dell' iperpiano improprio $\vec{\mathcal{P}}^{n-1}$ su un iperpiano proprio $\mathcal{P}^{n-1}$, da un punto P esterno ad entrambi. Ogni punto improprio Q_∞ viene proiettato in un punto $\pi(Q_\infty)$ di $\mathcal{P}^{n-1}$; se tale punto è proprio, esso viene detto *punto di fuga* della corrispondente direzione, rispetto a π.

Con abuso di linguaggio, si confonde spesso un sottospazio affine con il suo ampliamento proiettivo.

Prop. *Due rette affini parallele si intersecano in un punto improprio. Le loro proiezioni su un iperpiano proprio si intersecano nel punto di fuga della direzione comune.*

Stereovisione