IPERQUADRICHE

D' ora in poi fissiamo uno spazio proiettivo $(V^{n+1}, \mathcal{P}^n, \theta)$ su $\mathbf{K}$, e un suo riferimento proiettivo $\mathcal{S}$.

Iperquadrica di $\mathcal{P}^n$ è una classe di proporzionalità di forme quadratiche non nulle su V^{n+1} (per $n = 2$: *conica*, $n = 3$: *quadrica*).

Discriminante di un' iperquadrica $[f]$ rispetto ad $\mathcal{S}$ è la matrice simmetrica associata ad f o a qualunque altra rappresentante rispetto ad una base normalizzata.

Rango di $[f]$ è il rango di f e quindi di ogni suo discriminante. $[f]$ è *specializzata* se il suo rango è $\leq n$.

Immagine di un' iperquadrica $[f]$ è l' insieme

$$Im[f] = \{P = [u] \in \mathcal{P}^n \mid f(u) = 0\}.$$

Dato un discriminante A, l' immagine è descritta dall' equazione $\quad {}^t(X) \cdot A \cdot (X) = 0,$

dove
$$(X) = \begin{pmatrix} X_0 \\ X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}.$$

Vertice di $[f]$ è il sottospazio proiettivo

$$W[f] = \{P \equiv (X) \,|\, A \cdot (X) = (0)\}.$$

Prop. *Il vertice non dipende dalla scelta del riferimento.*

Prop. $W[f] \subset Im[f]$. $W[f] \neq \emptyset$ *se e solo se* $[f]$ *è specializzata.*

Quindi solo iperquadriche non specializzate possono avere immagine vuota; ciò può in effetti succedere se $\mathbf{K}$ non è algebricamente chiuso.

Teor. *Con* $\mathbf{K}$ *algebricamente chiuso,* $[f] = [g] \Leftrightarrow Im[f] = Im[g]$.

Teor. *(di Steiner) Ogni immagine non vuota di conica di un piano proiettivo reale è l'insieme dei punti d' intersezione delle rette di due fasci che si corrispondono in una proiettività.*

POLARITÀ

Data una forma f rappresentante della iperquadrica $[f]$, sia $\varphi : V^{n+1} \times V^{n+1} \to \mathbf{K}$ la forma bilineare simmetrica associata ad f. Consideriamo fissati, nel seguito, f, φ e un riferimento proiettivo $\mathcal{S}$.

Due punti $P = [u]$, $Q = [v]$ si dicono *coniugati rispetto a* $[f]$ se $\varphi(u, v) = 0$.

Prop. *Sia $P \in \mathcal{P}^n$; rispetto ad $[f]$ l' insieme dei punti coniugati a P è*

a) *tutto $\mathcal{P}^n$ se $P \in W[f]$;*
b) *un iperpiano se $P \notin W[f]$.*

L' applicazione $\tau : \mathcal{P}^n - W[f] \to \mathcal{P}^*$ che ad ogni punto associa l' iperpiano dei punti ad esso coniugati rispetto a $[f]$ si chiama *polarità* rispetto a $[f]$. $\tau(P)$ è l' *iperpiano polare* di P rispetto a $[f]$; P è il *polo* di $\tau(P)$.

Teor. *(di reciprocità)* $P \in \tau(Q) \;\Leftrightarrow\; Q \in \tau(P)$.

Prop. *Ogni iperpiano polare contiene il vertice.*

Prop. *Se* $[f]$ *è non specializzata,* τ *è una dualizzazione.*

Con A discriminante di $[f]$, $P \equiv (\bar{Y})$, $\tau(P)$ ha equazione

$$^t(\bar{Y}) \cdot A \cdot (X) = 0.$$

Prop. *Siano* $P, Q \in \mathcal{P}^n - Im[f]$ *due punti distinti, coniugati rispetto a* $[f]$. *Se la retta* PQ *interseca* $Im[f]$*,* e *questa intersezione è costituita da due punti distinti* A, B*,* allora *vale, per il birapporto,*

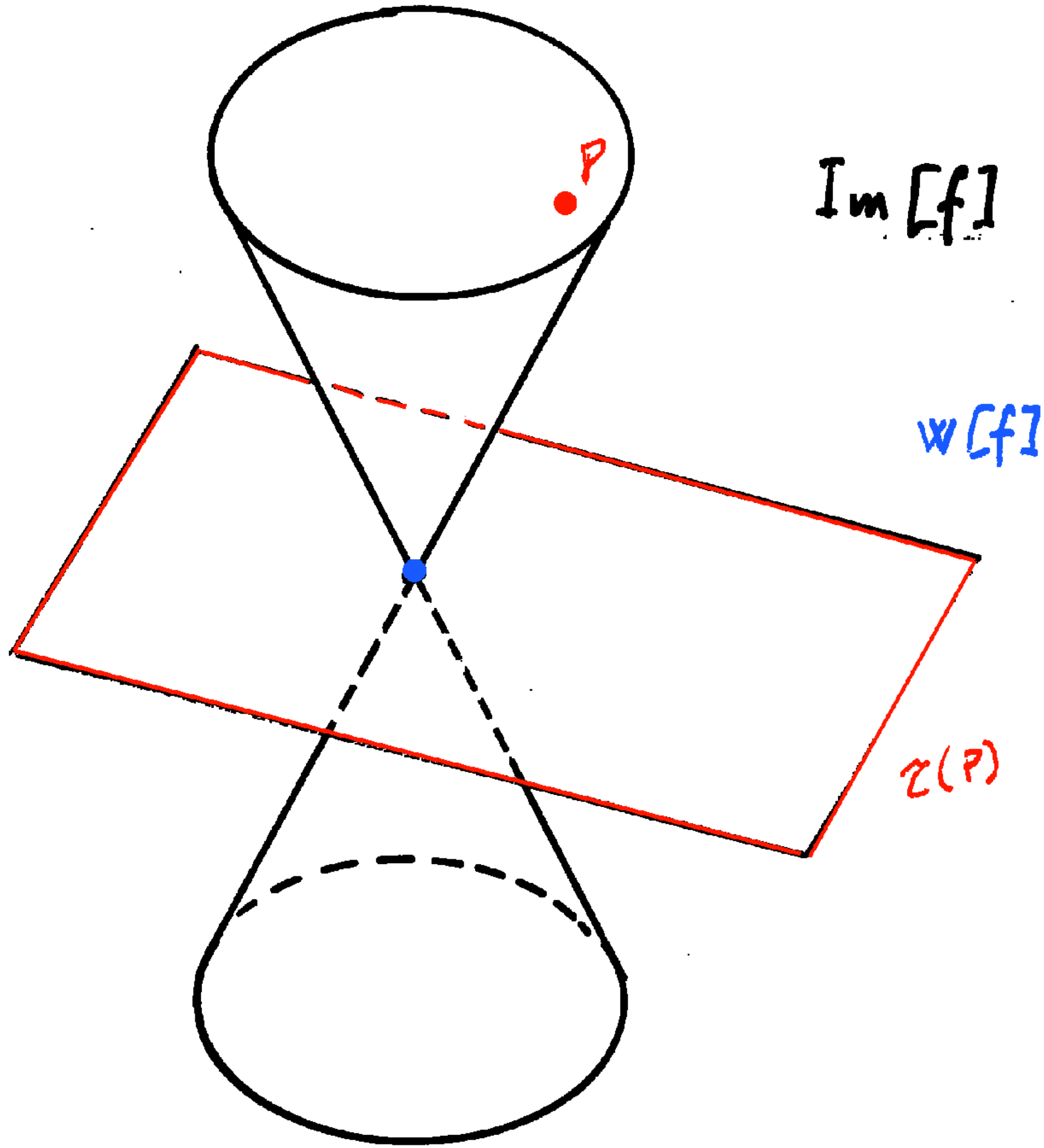
$$(PQAB) = -1.$$

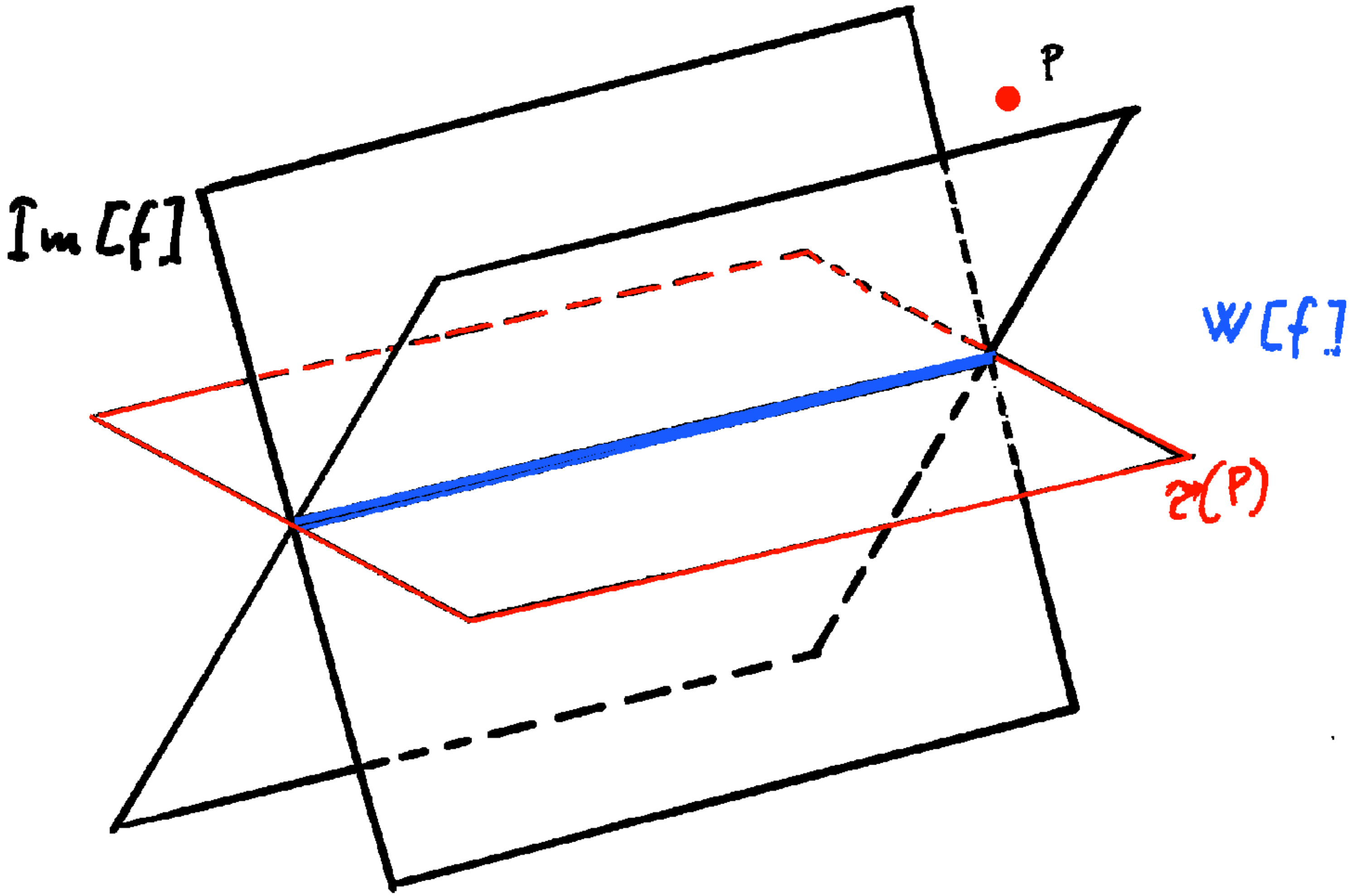
Prop. $P \in \tau(P) \Leftrightarrow P \in Im[f]$.

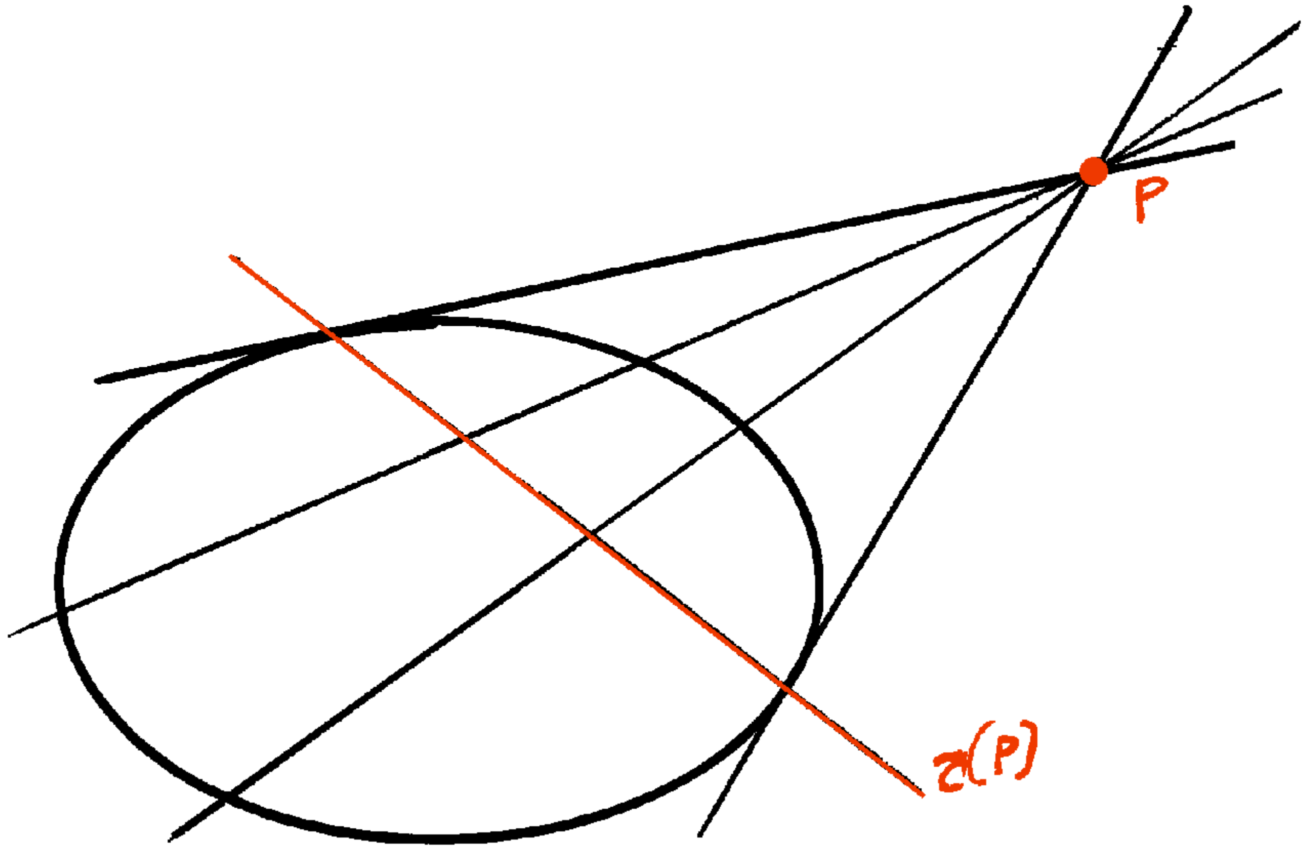
Una retta r si dice *tangente* a $[f]$ in Y se o (i) $\{Y\} = r \cap Im[f]$, o (ii) $Y \in r \subset Im[f]$.

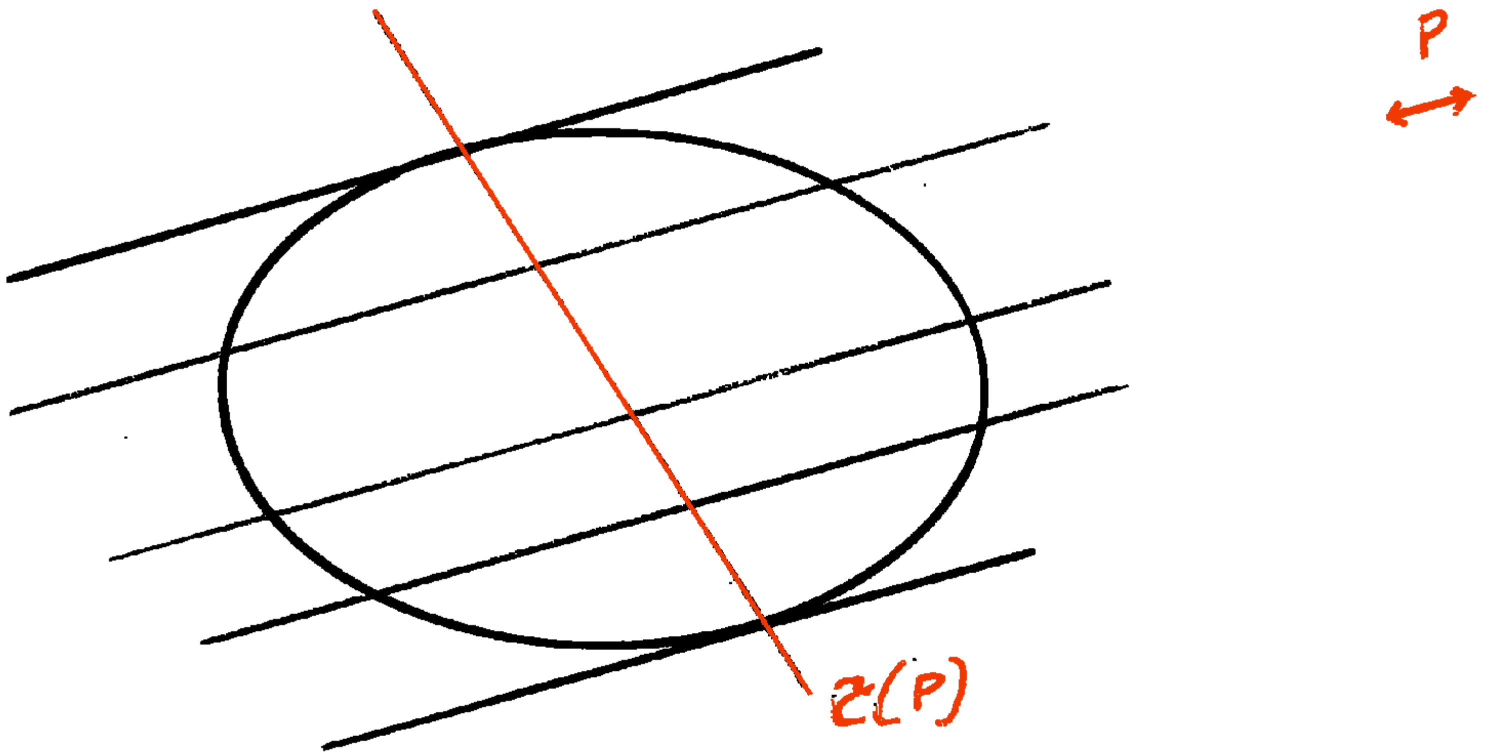
Prop. *Dato* $P \in Im[f] - W[f]$, *l' unione delle rette tangenti a* $[f]$ *in* P *è l' iperpiano polare di* P *rispetto a* $[f]$.

Tale iperpiano è detto iperpiano tangente a $[f]$ in P.


p
Im [f]
w [f]
τ(p)


Im[f]
P
W[f]


P
π(P)


P
ℓ(P)

Inserisco alcune pagine da:
C. Gagliardi, L. Grasselli, Algebra lineare e geometria,
vol. 1-3, coll. Leonardo, ed. Esculapio, 1993
come invito alla lettura di tale ottimo testo.

Sia $\mathscr{R}^1$ una retta di $\mathscr{P}^n$ e siano X, Y due punti distinti di $\mathscr{R}^1$. Sia poi $\mathscr{Q}$ una quadrica di $\mathscr{P}^n$, avente la matrice $A \in \mathrm{S}_{n+1}(\mathbf{K})$ quale discriminante, rispetto ad S_O.
Indicate rispettivamente con $(x), (y) \in \mathscr{M}_{(n+1)\times 1}(\mathbf{K})$ le colonne delle coordinate di X e Y, rispetto ad S_O, le equazioni parametriche di $\mathscr{R}^1$, relativamente ad S_O, sono (§ 4.8):

$$(*) \qquad (z) = \lambda(x) + \mu(y), \qquad \text{con } (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

dove $(z) = \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{(n+1)\times 1}(\mathbf{K}).$

I punti $Z \underset{S_o}{\equiv} [(z_0, \dots, z_n)]$ di $\mathscr{T}(\mathscr{Q}) \cap \mathscr{R}^1$ si ottengono quindi in corrispondenza dei valori di $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, soddisfacenti la seguente condizione:

$$(**) \qquad {}^t(\lambda(x) + \mu(y)) \cdot A \cdot (\lambda(x) + \mu(y)) = 0 .$$

Eseguendo i calcoli nel primo membro di (**), si ottiene la seguente equazione algebrica omogenea di 2° grado, nelle incognite λ e μ:

$$(***) \qquad \lambda^2({}^t(x) \cdot A \cdot (x)) + 2\lambda\mu({}^t(x) \cdot A \cdot (y)) + \mu^2({}^t(y) \cdot A \cdot (y)) = 0 ,$$

le cui soluzioni non nulle, sostituite nella (*), forniscono le coordinate dei punti di $\mathscr{T}(\mathscr{Q}) \cap \mathscr{R}^1$.

Si osservi che due soluzioni proporzionali (λ', μ') e $\alpha(\lambda', \mu')$, $\alpha \in \mathrm{K}^*$, di (***) producono lo stesso punto di $\mathscr{T}(\mathscr{Q}) \cap \mathscr{R}^1$.

■ **Teorema 6.26.** *Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non degenere di $\mathcal{P}^n$ e sia $\mathcal{P}^{n-1}$ un iperpiano di $\mathcal{P}^n$. La quadrica $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}^{n-1}$ di $\mathcal{P}^{n-1}$ è degenere se e solo se $\mathcal{P}^{n-1}$ è tangente a $\mathcal{Q}$. In tal caso, detto Y il punto di tangenza,*

$\mathcal{T}(\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}^{n-1})$ è costituito dal solo punto Y oppure da un'unione di rette passanti per Y.

Due iperquadriche di $\mathcal{P}^n$ si dicono *proiettivamente equivalenti* se esiste una omografia di $\mathcal{P}^n$ che trasforma una nell' altra.

Prop. *Date due iperquadriche $[f], [g]$ di $\mathcal{P}^n$ di discriminanti rispettivamente A, B, vale:*

$$[f], [g] \text{ sono proiettivamente equivalenti}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{esiste } \lambda \neq 0 \text{ tale che } A \text{ è congruente a } \lambda B$$
$$\Updownarrow$$
$$(K = C) \ \ A \text{ è congruente a } B$$
$$(K = R) \ \ A \text{ è congruente a } \pm B.$$

Naturalmente, tutte le proprietà proiettive sono condivise da iperquadriche proiettivamente equivalenti.

■ **Teorema 6.28 (Classificazione proiettiva delle coniche reali).** *Le coniche del piano proiettivo reale $\mathscr{P}^2$ si suddividono, rispetto alla relazione di equivalenza, nel modo seguente.*

(a) RANGO 1 (*Coniche doppiamente degeneri*).
Esiste un'unica classe con:

> ***segnatura***: $\{1,0\}$;
> ***equazione canonica***: $x_0^2 = 0$;
> ***supporto***: *una retta di* $\mathscr{P}^2$, *che si dice «contata due volte»*;
> ***vertice***: *coincidente col supporto* (*tutti i punti del supporto sono doppi*).

(b) RANGO 2 (*Coniche semplicemente degeneri*).
Si suddividono in due classi:

(b_1) ***segnatura***: $\{2, 0\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 = 0$;
supporto: *un punto* V *di* $\mathscr{P}^2$;
vertice: *il punto* V (*l'unico punto del supporto è doppio*).

(b_2) ***segnatura***: $\{1, 1\}$;
equazione canonica: $x_0^2 - x_1^2 = 0$;
supporto: *unione di due rette distinte* $\mathscr{R}$, $\mathscr{R}'$ *di* $\mathscr{P}^2$;
vertice: *il punto* $V = \mathscr{R} \cap \mathscr{R}'$.

(*c*) RANGO 3 (*Coniche non degeneri*).
Si suddividono in due classi:

(c_1) (*Coniche immaginarie*) *con*:
segnatura: $\{3, 0\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$;
supporto: $\emptyset$;
vertice: $\emptyset$.

(c_2) (*Coniche reali non degeneri*) *con*:
segnatura: $\{2, 1\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$;
supporto: *figura di* $\mathscr{P}^2$, *contenente infiniti punti, ma non contenente rette*;
vertice: $\emptyset$ (*nessun punto del supporto è doppio*).

■ **Teorema 6.29 (Classificazione delle quadriche specializzate dello spazio proiettivo reale $\mathscr{P}^3$).** *Le quadriche specializzate dello spazio proiettivo reale $\mathscr{P}^3$ si suddividono, rispetto alla relazione di equivalenza, nel modo seguente.*

(*a*) RANGO 1 (*Quadriche doppiamente degeneri*).
Esiste un'unica classe con:

segnatura: $\{1, 0\}$;
equazione canonica: $x_0^2 = 0$;
supporto: un piano di $\mathscr{P}^3$, che si dice «contato due volte»;
vertice: coincidente col supporto (tutti i punti del supporto sono doppi).

(b) RANGO 2 (*Quadriche semplicemente degeneri*).
Si suddividono in due classi:

(b_1) ***segnatura***: $\{2, 0\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 = 0$;
supporto: *una retta* $\mathscr{R}$ *di* $\mathscr{P}^3$;
vertice: *la retta* $\mathscr{R}$ *(tutti i punti del supporto sono doppi)*.

(b_2) ***segnatura***: $\{1, 1\}$;
equazione canonica: $x_0^2 - x_1^2 = 0$;
supporto: *unione di due piani distinti* Π, Π' *di* $\mathscr{P}^3$;
vertice: *la retta* $\mathscr{R} = \Pi \cap \Pi'$.

(*c*) Rango 3 (*Coni*).

Si suddividono in due classi:

(c_1) (*Coni immaginari*) *con:*

segnatura: $\{3, 0\}$;

equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$;

vertice: *un punto V, detto vertice del cono immaginario;*

supporto: *il punto V (l'unico punto del supporto è doppio).*

(c_2) (*Coni reali*) *con:*

segnatura: $\{2, 1\}$;

equazione canonica: $x_1^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$;

vertice: *un punto V, detto vertice del cono reale;*

supporto: *figura di* $\mathscr{P}^3$ *non contenente piani costituita dall'unione di infinite rette, dette «generatrici», che si intersecano nel vertice V.*

● **Definizione 6.20.** Sia $\mathcal{Q}$ una quadrica non specializzata di $\mathcal{P}^3$. Un punto $Y \in \mathcal{S}(\mathcal{Q})$ è detto:

(i) *di tipo ellittico*, se $\mathcal{S}(\mathcal{Q} \cap \Pi_Y)$ è costituito dal solo punto Y;

(ii) *di tipo iperbolico*, se $\mathcal{S}(\mathcal{Q} \cap \Pi_Y)$ è costituito dall'unione di due rette distinte, dette *generatrici di* $\mathcal{Q}$, *passanti per* Y.

■ **Lemma 6.31.** *Se una quadrica non specializzata* $\mathcal{Q}$ *dello spazio proiettivo reale* $\mathcal{P}^3$ *ha almeno un punto di tipo ellittico* (*risp. iperbolico*)*, allora tutti i punti di* $\mathcal{Q}$ *sono di tipo ellittico* (*risp. iperbolico*).

■ **Teorema 6.32 (Classificazione delle quadriche non specializzate dello spazio proiettivo reale $\mathscr{P}^3$).** *Le quadriche non specializzate* (*cioè di rango* 4) *di* $\mathscr{P}^3$ *si suddividono, rispetto alla relazione di equivalenza, nelle seguenti tre classi.*

(d_1) (*Quadriche immaginarie*) *con:*
segnatura: $\{4, 0\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$;
supporto: $\emptyset$;
vertice: $\emptyset$.

(d_2) (*Quadriche non rigate, o di tipo ellittico*) *con:*
segnatura: $\{3, 1\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$;
supporto: *figura di* $\mathscr{P}^3$ *contenente infiniti punti, tutti di tipo ellittico*;
vertice: $\emptyset$.

(d_3) (*Quadriche doppiamente rigate, o di tipo iperbolico*) *con:*
segnatura: $\{2, 2\}$;
equazione canonica: $x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$;
supporto: *figura di* $\mathscr{P}^3$ *contenenti infiniti punti, tutti di tipo iperbolico*;
vertice: $\emptyset$.

IPERQUADRICHE NELL' AFFINE E NELL' EUCLIDEO

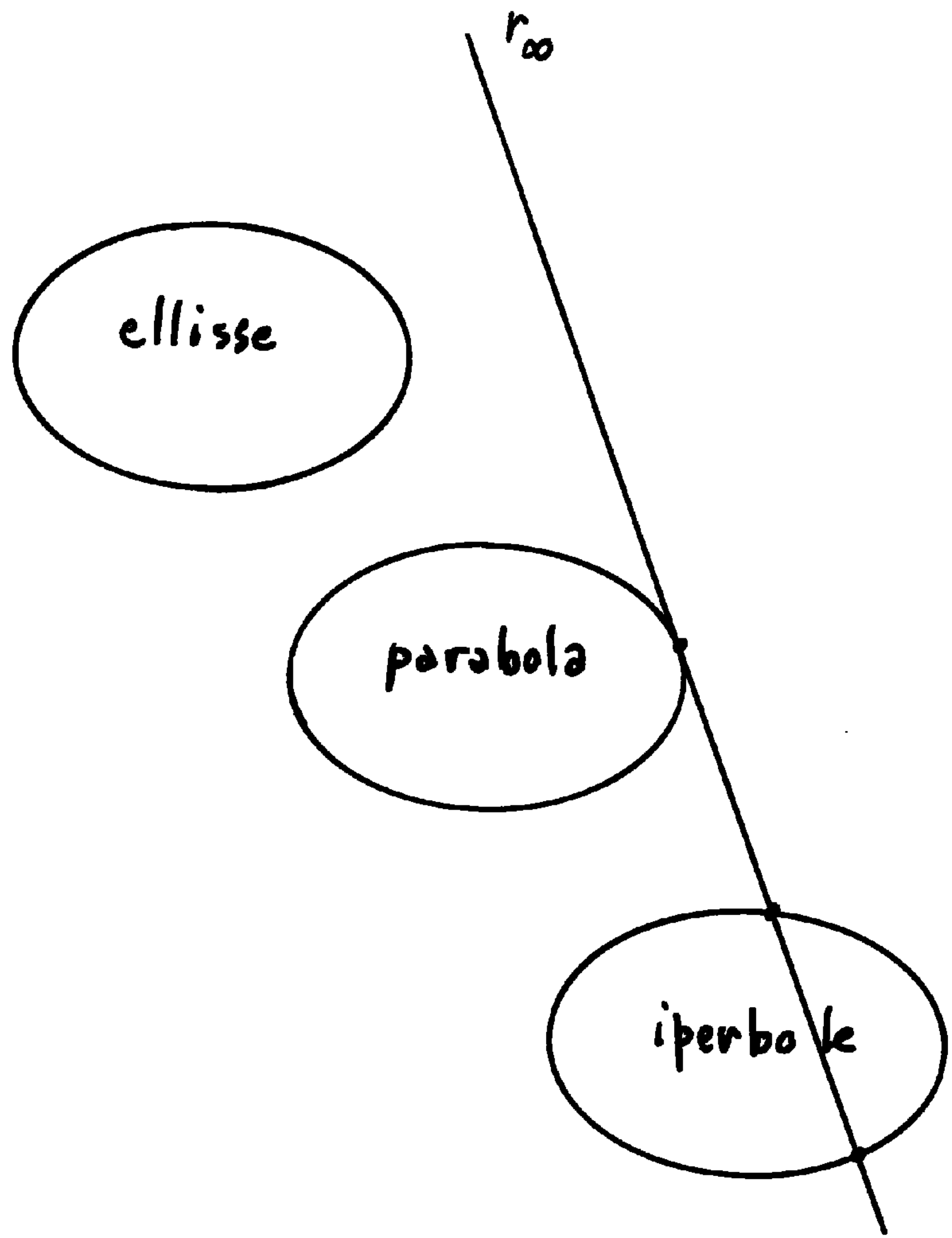
Una *iperquadrica* di uno spazio affine $\mathcal{A}^n$ è una iperquadrica del suo ampliamento proiettivo. La sua *parte impropria* è la iperquadrica dell' iperpiano improprio Π_∞ ottenuta come intersezione. D' ora in poi ogni iperquadrica sarà intesa in $\mathcal{A}^n$.

Due iperquadriche si dicono *affinemente equivalenti* se esiste una affinità (regolare) che trasforma una nell' altra.

Prop. *Due iperquadriche sono affinemente equivalenti se e solo se sono proiettivamente equivalenti sia loro sia le loro parti improprie.*

Un' iperquadrica non specializzata si dice *iperparaboloide* (*parabola* per $n = 2$) se Π_∞ le è tangente, *iperquadrica a centro* altrimenti.

Se $\mathbf{K}$ non è algebricamente chiuso, possiamo distinguere, fra le iperquadriche a centro, gli *iperiperboloidi* (*iperboli* per $n = 2$), con parte impropria a immagine $\neq \emptyset$, e gli *iperellissoidi* (*ellissi* per $n = 2$), con parte impropria a immagine vuota.


r_∞
ellisse
parabola
iperbole

Cor. *Iperellissoidi, iperiperboloidi, iperparaboloidi non sono mai affinemente equivalenti gli uni agli altri.*

Iperpiano diametrale (*diametro* per $n = 2$) di un' iperquadrica è un iperpiano proprio polare di un punto improprio. *Centro* di un' iperquadrica non specializzata è il polo dell' iperpiano improprio.

Prop. *Il centro è l' intersezione degli iperpiani diametrali.*

Coniche non degeneri del piano affine reale

$|A| \neq 0$

(A definita pos. o neg.)	conica immaginaria			ellisse immaginaria (es.: $-x^2 - y^2 = 1$)
(A non definita pos. o neg.)	conica reale non degenere	parabola (es.: $y = x^2$)	iperbole (es.: $x^2 - y^2 = 1$)	ellisse reale (es.: $x^2 + y^2 = 1$)
		$\mathscr{P}^1_\infty$ tangente ($A_{00} = 0$)	$\mathscr{P}^1_\infty$ secante ($A_{00} < 0$)	$\mathscr{P}^1_\infty$ esterna ($A_{00} > 0$)

Quadriche non degeneri dello spazio affine reale ordinario

$|A| \neq 0$

		$\mathscr{P}^2_\infty$ tangente ($A_{00} = 0$)	$\mathscr{P}^2_\infty$ secante ($A_{00} \neq 0$, M_{00} non definita pos. o neg.)	$\mathscr{P}^2_\infty$ esterno ($A_{00} \neq 0$, M_{00} definita pos. o neg.)
($|A| > 0$, A definita pos. o neg.)	quadrica immaginaria			ellissoide immaginario (es.: $-x^2 - y^2 - z^2 = 1$)
($|A| > 0$, A non definita pos. o neg.)	quadrica reale doppiamente rigata	paraboloide iperbolico (es.: $z = x^2 - y^2$)	iperboloide iperbolico (es.: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$)	
($|A| < 0$, A non definita pos. o neg.)	quadrica reale non rigata	paraboloide ellittico (es.: $z = x^2 + y^2$)	iperboloide ellittico (es.: $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$)	ellissoide reale (es.: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$)

Quadriche di rango 3

Una suddivisione (**non** una classificazione completa) dei coni proiettivi reali e immaginari è la seguente:

- Cono (affine): il vertice è proprio, il piano improprio è

  esterno (cono immaginario) o

  secante (cono reale)

- Cilindro: il vertice è improprio; l'immagine contiene

  solo il vertice (cilindro immaginario)

  punti propri (cilindro reale).

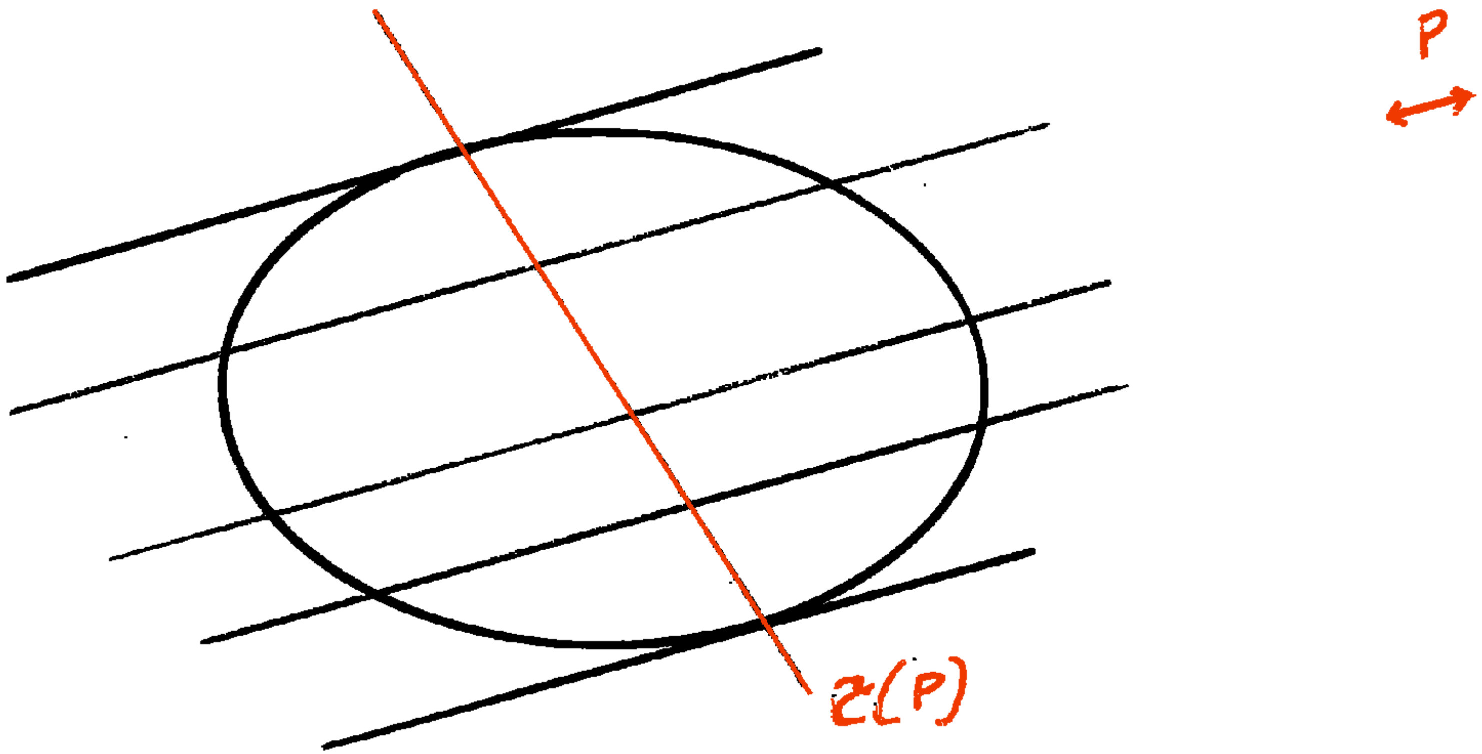
Quadriche di rango 3 dello spazio affine reale ordinario (classificazione **incompleta!**)

Cono (proiettivo) reale segnatura di A: (2,1) o (1,2)	Cilindro reale (es.: $x^2+y^2=1$)	Cono (affine) reale (es.: $x^2+y^2-z^2=0$)
Cono (proiettivo) immaginario segnatura di A: (3,0) o (0,3)	Cilindro immaginario (es.: $x^2+y^2=-1$)	Cono (affine) immaginario (es.: $x^2+y^2+z^2=0$)
	Vertice improprio ($A_{00}=0$)	Vertice proprio ($A_{00}\neq 0$)

Prop. *Gli iperparaboloidi hanno il centro improprio.*

Cor. *Gli iperpiani diametrali di un iperparaboloide sono paralleli ad una stessa retta.*

Prop. *Ogni iperpiano diametrale* Π *di* $[f]$, *polare di un punto improprio* P_∞, *interseca nel punto medio ogni segmento di direzione* P_∞ e *di estremi due punti di* $Im[f]$.


P
z(P)

Data un'iperbole del piano affine, chiamiamo *asintoti* le rette proprie tangenti alla conica nei suoi punti impropri.

Prop. Gli asintoti di un'iperbole sono le rette polari dei suoi punti impropri.

Cor. *Il centro, se proprio, è centro di simmetria per* $Im[f]$.

In uno spazio euclideo, la proprietà di simmetria degli iperpiani diametrali è particolarmente interessante se è simmetria ortogonale. Si definiscono *principali* gli iperpiani diametrali ortogonali alla direzione rappresentata dal loro polo (per $n = 2$: *assi*).

Cor. *Gli iperpiani principali sono iperpiani di simmetria ortogonale per* $Im[f]$.

Prop. Data un'iperquadrica non specializzata $[f]$ di uno spazio euclideo, i poli dei suoi iperpiani principali sono tutti e soli i punti impropri di coordinate omogenee $(0, l_1, \ldots, l_n)$ tali che $(l_1, \ldots, l_n)$ è un autovettore del minore M_{00}, di un suo discriminante, relativo ad un autovalore non nullo.

Data un'iperquadrica non specializzata $[f]$ di uno spazio euclideo, si chiama *asse* ogni retta intersezione di iperpiani principali. Si chiama *vertice* (euclideo) ogni punto proprio intersezione di un asse con $Im[f]$.

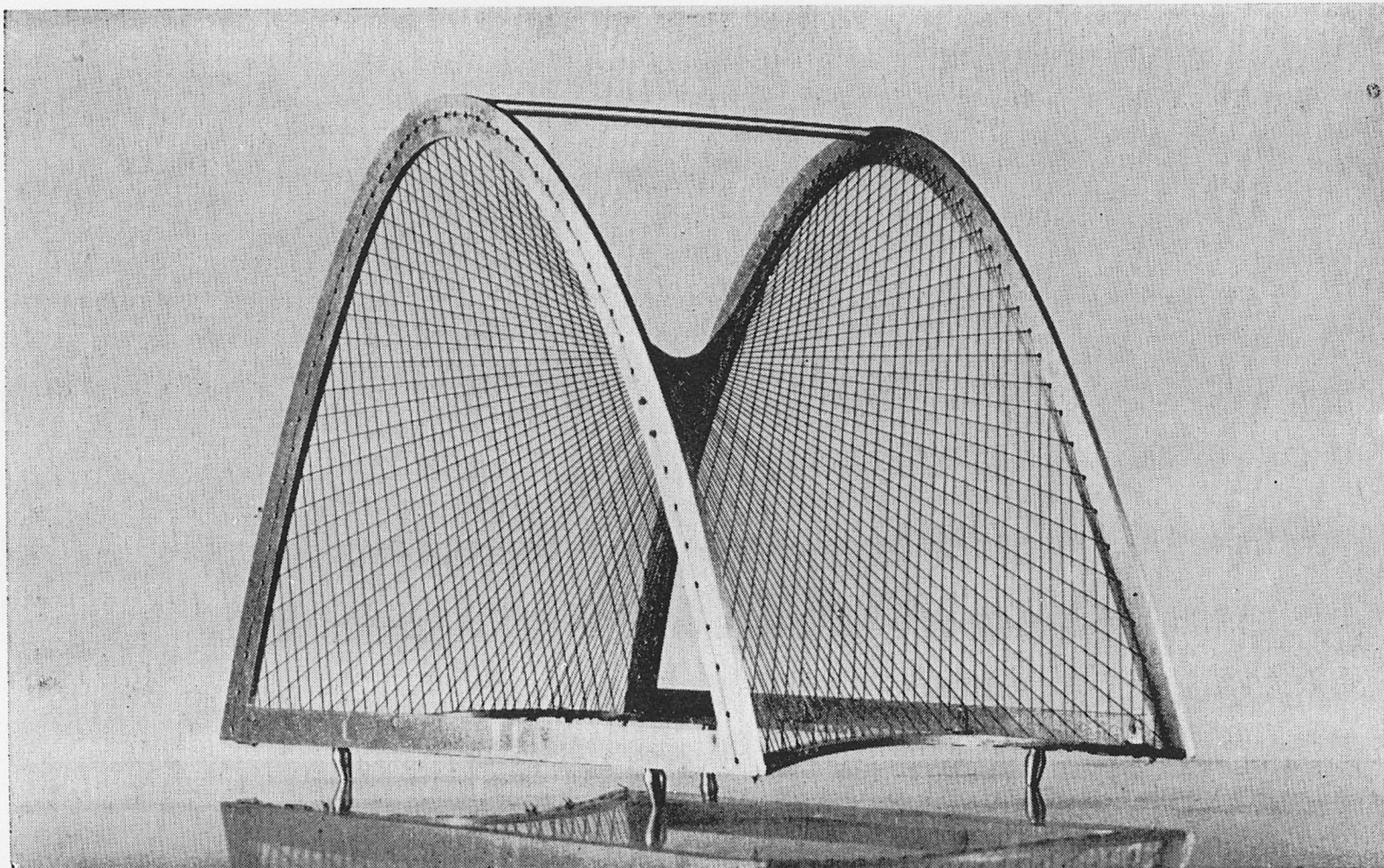
Data un'iperquadrica $[f]$ di uno spazio euclideo n-dimensionale $\mathcal{E}$, essa viene detta *di rotazione attorno al sottospazio* $\mathcal{E}'$ (sottospazio euclideo di dimensione $< n-1$, che viene detto *sottospazio di rotazione*) se

(1) ogni iperpiano contenente $\mathcal{E}'$ è principale, e

(2) $\mathcal{E}'$ è il più piccolo sottospazio per cui avviene (1).

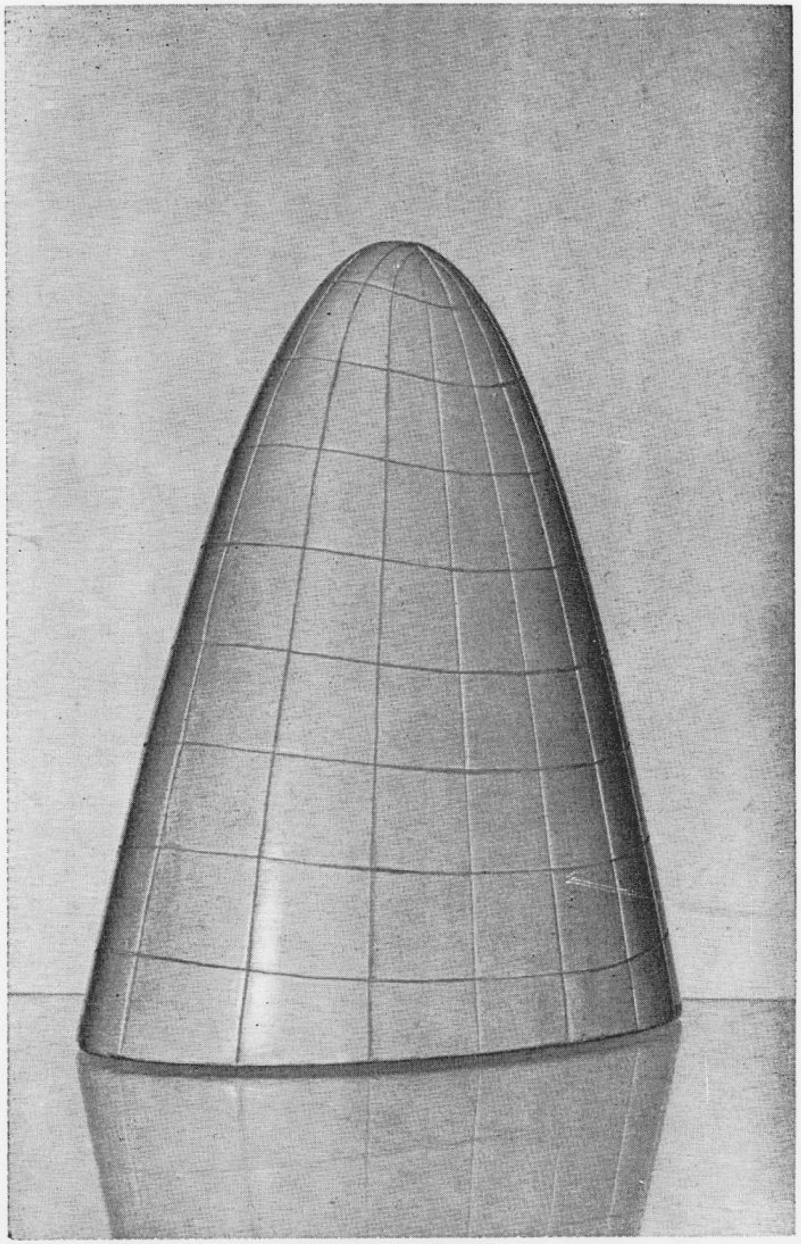
Prop. Se $[f]$ è di rotazione attorno ad $\mathcal{E}'$, allora ogni rotazione di $\mathcal{E}$ che lasci fissi i punti di $\mathcal{E}'$ trasforma punti di $Im[f]$ in punti di $Im[f]$.

Prop. Un'iperquadrica $[f]$ di uno spazio euclideo n-dimensionale è di rotazione attorno ad un sottospazio di dimensione r se e solo se il minore M_{00} di un suo discriminante ammette un autovalore non nullo di molteplicità $n-r$. In tal caso il sottospazio di rotazione è l'intersezione di $n-r$ iperpiani principali, corrispondenti ad autovettori indipendenti relativi a tale autovalore.



Paraboloide iperbolico (o doppiamente *rigato)*

La superficie è realizzata mediante fili rettilinei che concretizzano generatrici [illegible] . Nella fotografia è visibile la porzione compresa fra due piani paralleli ad un piano principale, simmetrici rispetto ad esso e un piano normale all'asse.

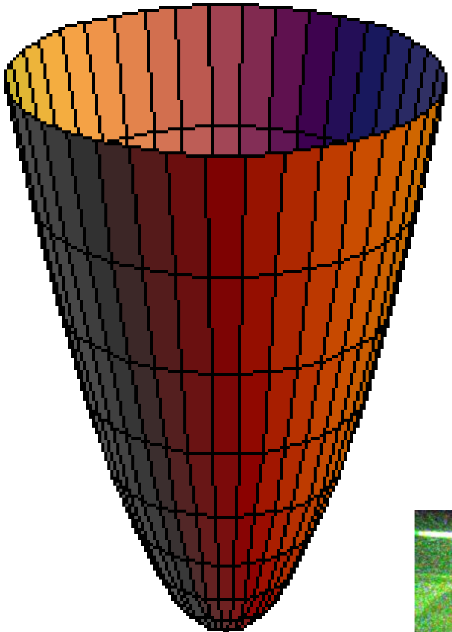


Paraboloide ellittico

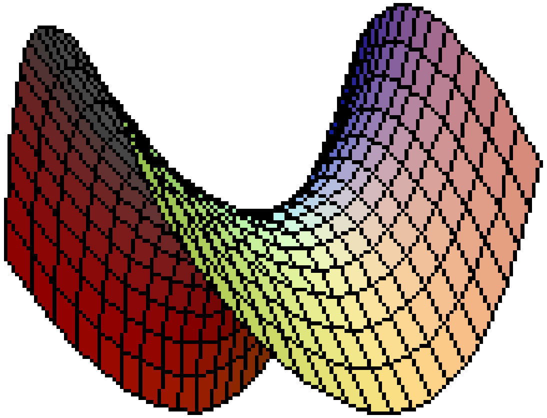
È visibile nella fotografia la porzione di superficie compresa fra il vertice e un piano normale all'asse.

http://mathworld.wolfram.com/Paraboloid.html

Paraboloide ellittico.



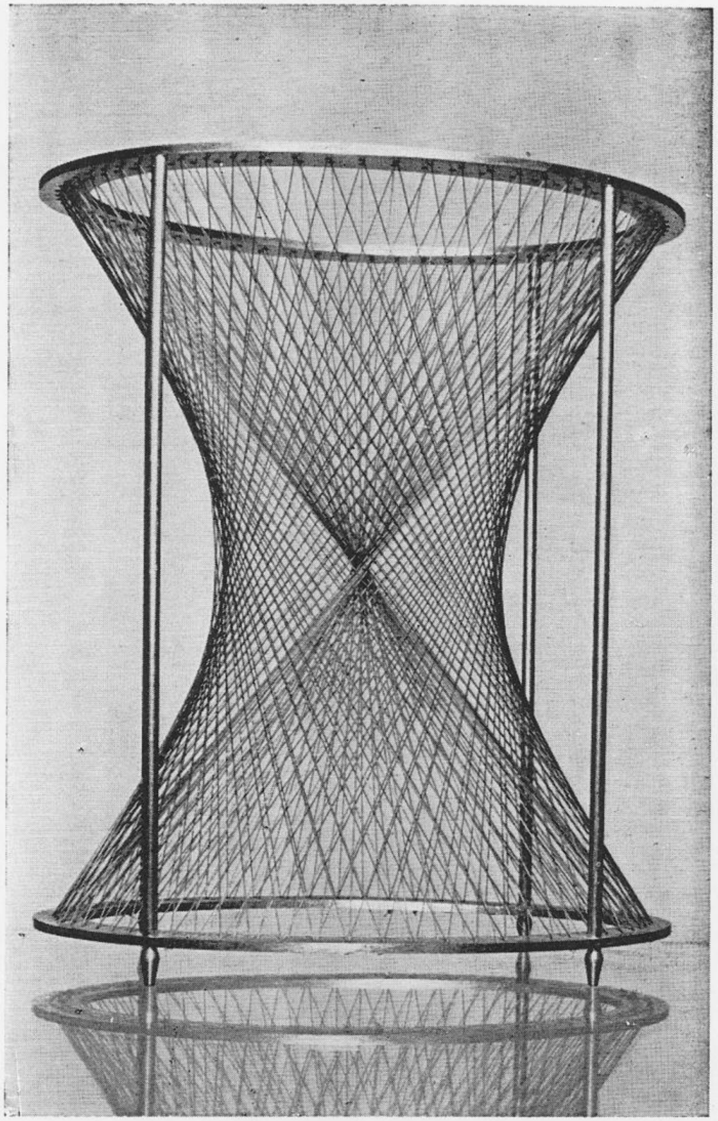
$$Z = \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2}$$



$$Z = \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2}$$

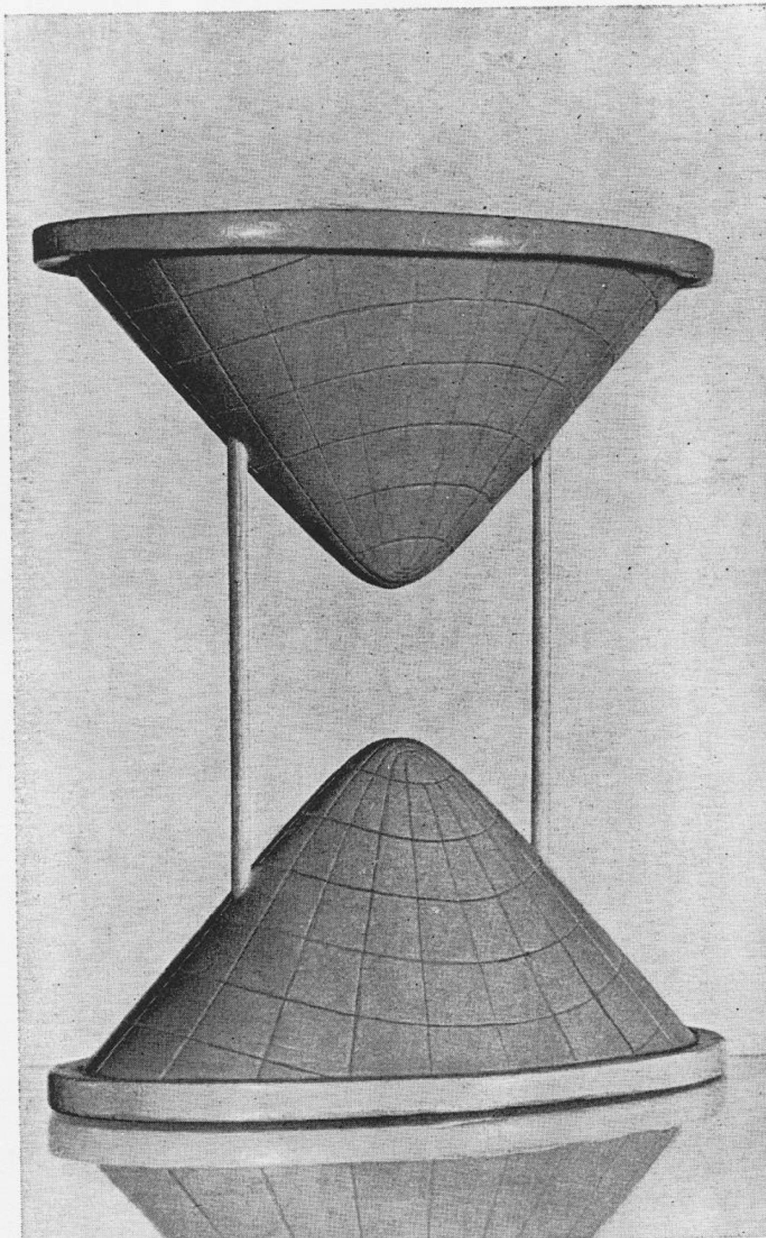
http://mathworld.wolfram.com/HyperbolicParaboloid.html

Paraboloide iperbolico.



Iperboloide a una falda (o doppiamente *rigato)*

La superficie è realizzata mediante fili rettilinei che concretizzano generatrici dei due sistemi [illegible]. Nella fotografia è visibile la porzione limitata da due sezioni fatte con piani normali all'asse non trasverso e simmetrici rispetto al centro dell'iperboloide. All'interno è visibile parte del cono asintotico realizzato anch'esso mediante fili.

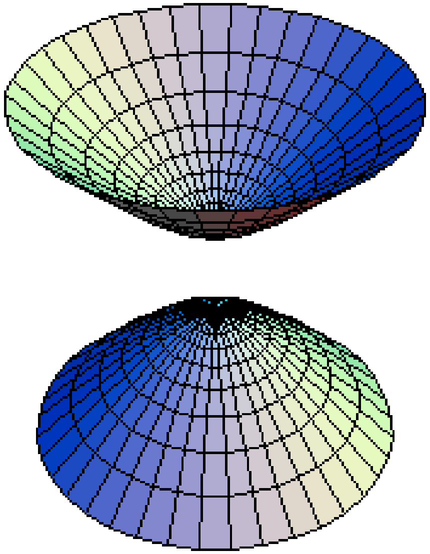


Iperboloide a due falde

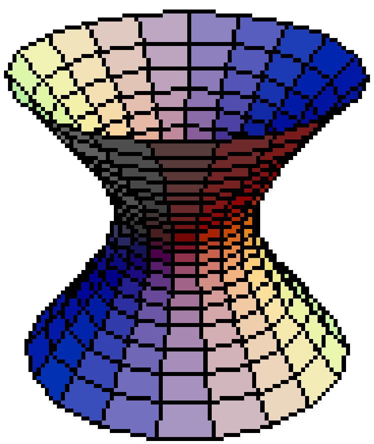
Sono visibili nella fotografia le porzioni delle due falde comprese fra due piani normali all'asse trasverso e simmetrici rispetto al centro dell'iperboloide.

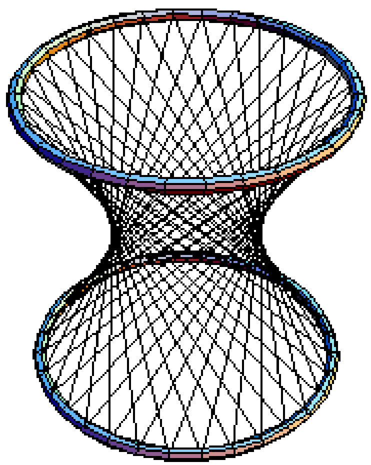
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

Iperboloide ellittico.



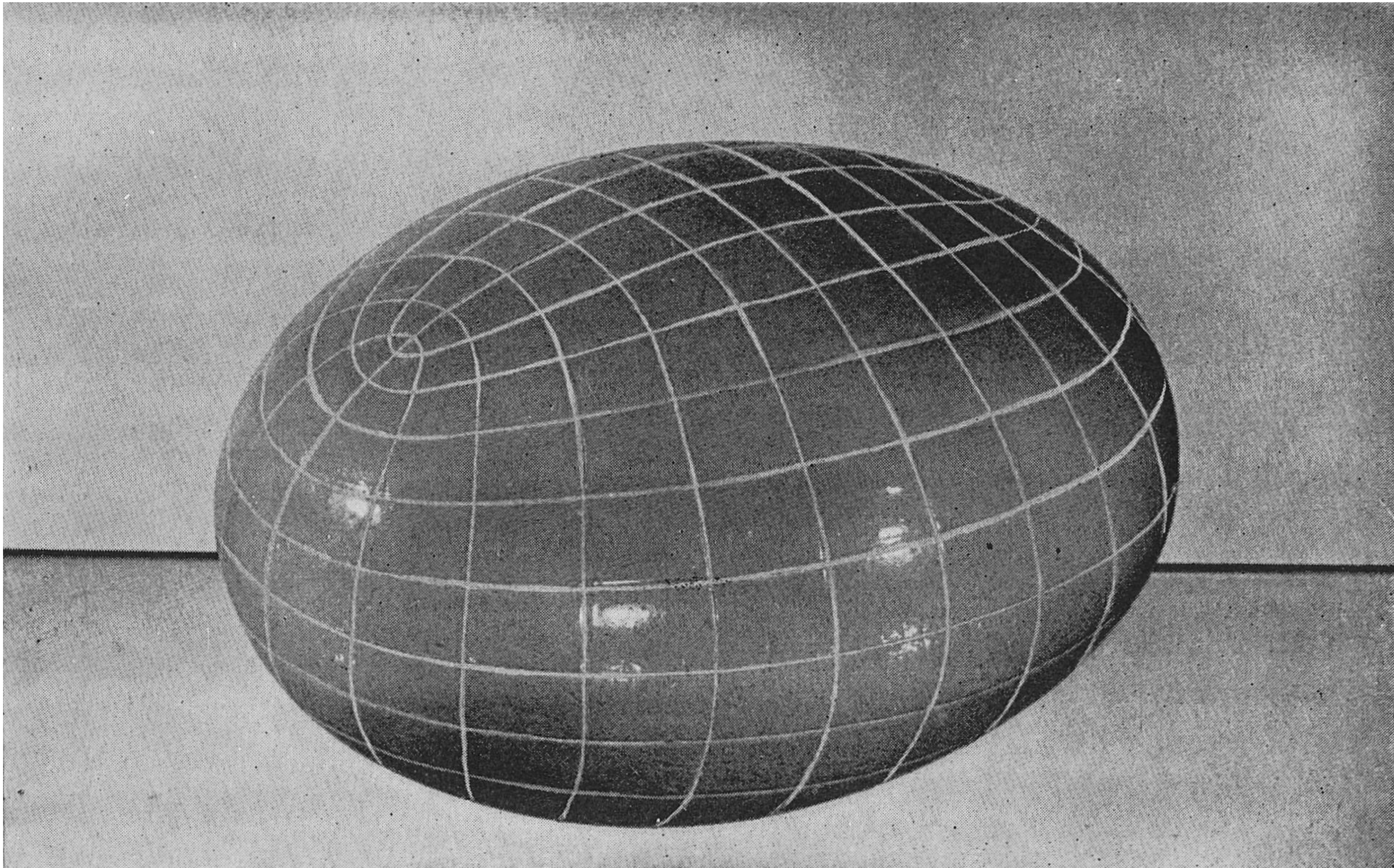
http://mathworld.wolfram.com/Hyperboloid.html



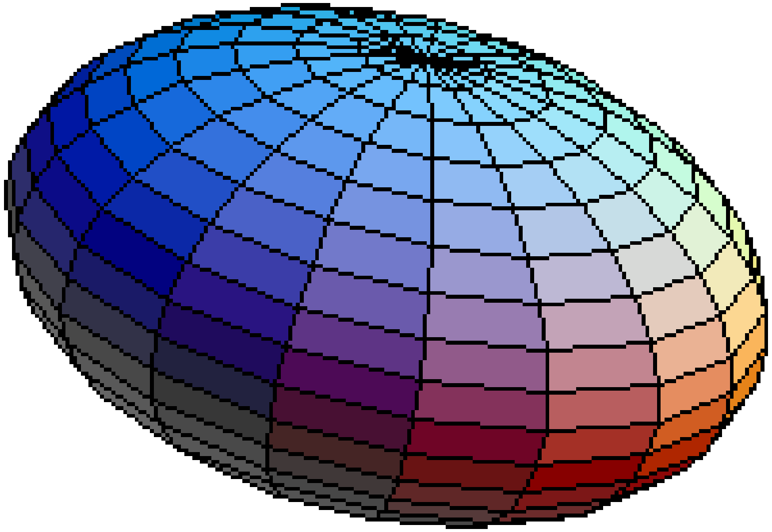


Iperboloide iperbolico.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} - \frac{Z^2}{c^2} = 1$$



Ellissoide reale



http://mathworld.wolfram.com/Ellipsoid.html

Ellissoide reale.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$$

Ellissoide immaginario.

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = -1$$

FASCI DI CONICHE

Siano $[f], [g]$ due coniche distinte di un piano proiettivo $\mathcal{P}^2$.

Prop. *Se almeno una fra* $[f]$ e $[g]$ è *non degenere, le loro immagini hanno al più quattro punti in comune.*

Prop. *Per cinque punti distinti di* $\mathcal{P}^2$, *quattro qualunque dei quali non allineati, passa una ed una sola conica. Se tre di essi sono allineati, tale conica è degenere.*

Si chiama *fascio* di coniche generato da $[f]$ e $[g]$ la retta nello spazio (proiettivo di dimensione 5) delle coniche, passante per i punti $[f]$ e $[g]$, cioè l' insieme

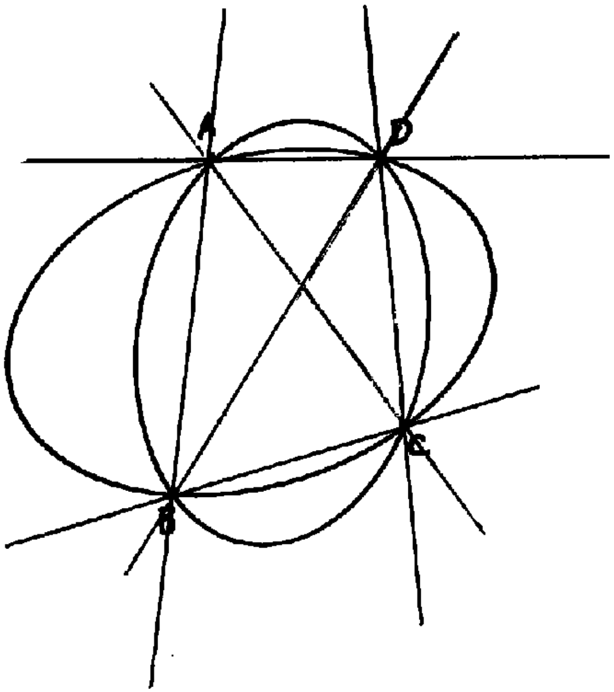
$$\mathcal{F} = \{[\lambda f + \mu g] \,|\, (\lambda, \mu) \neq (0,0)\}.$$

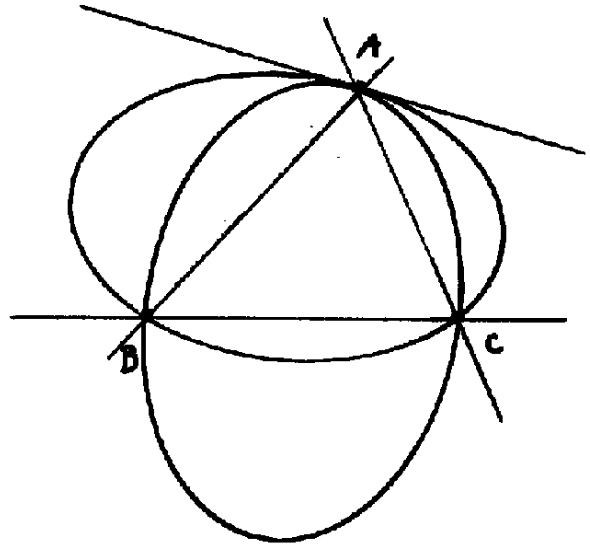
Prop. *Se un punto P appartiene a due coniche di $\mathcal{F}$, P appartiene a tutte le coniche di $\mathcal{F}$.*

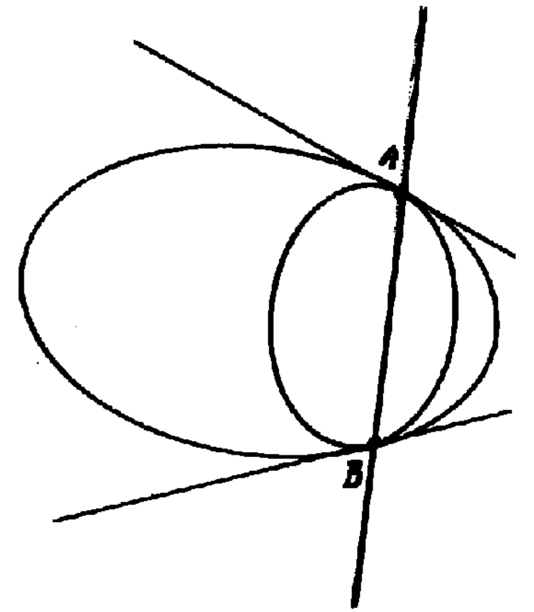
Prop. *Se in un punto P, appartenente a due coniche di $\mathcal{F}$, la retta r è tangente a tali due coniche, r è tangente in P a tutte le coniche di $\mathcal{F}$.*

Un punto appartenente a tutte le coniche di un fascio $\mathcal{F}$ viene detto *punto base* di $\mathcal{F}$. Viene detto *punto base doppio* se in quel punto tutte le tangenti alle coniche del fascio coincidono.

Prop. *Un fascio di coniche non tutte degeneri ha al più quattro punti base. Se ha quattro punti base, allora contiene tre coniche degeneri. Se ha almeno un punto base doppio, contiene due coniche degeneri.*


A
D
C
B


A
B
C


A
B

Estensione complessa di spazi reali

D'ora in poi ogni spazio (vettoriale, affine, euclideo, proiettivo) verrà considerato parte di un analogo spazio definito a valori complessi: la sua estensione complessa.

Un oggetto (punto, retta, ecc.) dell'estensione complessa viene chiamato *immaginario* se non può essere espresso con coefficienti o coordinate tutte reali, *reale* altrimenti.

Per esempio, la retta $ix - 2iy + 5i = 0$ del piano affine è reale, in quanto esprimibile anche come $x - 2y + 5 = 0$, mentre la retta $x - 2iy + 5 = 0$ è immaginaria.

Prop. *Ogni retta immaginaria contiene esattamente un punto reale.*

Prop. *Se* $z = a + ib$ *è radice di un polinomio (o di un sistema di polinomi) a coefficienti reali, allora anche* $\bar{z} = a - ib$ *è radice, della stessa molteplicità.*

Cor. *Ogni polinomio in una indeterminata, a coefficienti reali, di grado dispari ha almeno una radice reale.*

Nell'estensione complessa dell'ampliamento proiettivo del piano euclideo vale:

Prop. *Ogni circonferenza interseca la retta impropria nei punti (immaginari) di coordinate* $(0, 1, i)$ *e* $(0, 1, -i)$.

Tali punti sono detti *punti ciclici* del piano.

Per estensione viene considerata circonferenza (generalizzata) ogni conica contenente i punti ciclici.

Nell'estensione complessa dell'ampliamento proiettivo dello spazio euclideo ordinario (cioè di dimensione 3) vale:

Prop. *Ogni sfera interseca il piano improprio nella circonferenza (immaginaria) di equazioni*

$$\begin{cases} X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

Tale circonferenza viene detta *assoluto* dello spazio.

I punti ciclici sono gli unici punti impropri lasciati fissi da ogni rotazione. L'immagine dell'assoluto è l'insieme dei punti ciclici di tutti i piani.

I fuochi di una conica possono essere definiti in questo contesto:

diciamo *fuoco* di una conica $[f]$ un punto proprio di intersezione delle tangenti condotte a $[f]$ dai punti ciclici.