CONTATTI TRA CURVE, TRA SUPERFICIE, TRA CURVE E SUPERFICIE

230. — CONTATTO TRA DUE CURVE PIANE.

Consideriamo nel piano (proiettivo, affine o euclideo: nn. 10, 11, 29, 31, 58, 64) due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ passanti per uno stesso punto O che sia semplice per entrambe (n. 98). Si effettui una trasformazione di coordinate per cui la nuova origine delle coordinate (non omogenee) x, y sia il punto O e l'asse y non sia in O tangente ad alcuna delle due curve (n. 98). Siano

$$y = f(x), \qquad y = \varphi(x) \qquad [f(0) = \varphi(0) = 0] \tag{1}$$

le equazioni di $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$; supporremo che le funzioni (ad un sol valore) $f(x)$, $\varphi(x)$ possiedano in O le derivate di tutti gli ordini che interessa considerare [1].

Sviluppando le funzioni $f(x)$, $\varphi(x)$ in serie di potenze, nell'intorno di O, si ha

$$\begin{aligned} y &= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots \\ y &= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots \end{aligned} \tag{2}$$

le a, b essendo costanti reali, i secondi membri possono essere delle effettive serie di potenze oppure degli sviluppi accorciati (di MACLAURIN) [2] con resto.

Ciò posto, possiamo introdurre la nozione fondamentale di contatto.

Si dirà che le due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *hanno nel punto comune* O *(semplice per entrambe) un contatto di ordine* n, *o* n + 1*-punto, quando in* O *coincidono, oltre ai valori di* f(x), φ(x), *anche quelli delle loro successive derivate fino a quelle di ordine* n, *mentre non coincidono quelli delle derivate d'ordine* n + 1.

Le condizioni per il contatto d'ordine n in O per le due curve (1), sono dunque

$$f(0) = \varphi(0), \quad f'(0) = \varphi'(0), \quad f''(0) = \varphi''(0), \ldots, f^{(n)}(0) = \varphi^{(n)}(0),$$
$$f^{(n+1)}(0) \neq \varphi^{(n+1)}(0).$$

Per le (2), le condizioni precedenti si scrivono

$$a_i = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \quad a_{n+1} \neq b_{n+1}. \tag{3}$$

Le condizioni precedenti sono simmetriche rispetto alle due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$; sicchè, se una curva ha con un'altra un contatto d'ordine n in un punto, anche la seconda ha con la prima un contatto d'ordine n in quel punto (proprietà *simmetrica* del contatto). Segue pure che, se due curve hanno in un punto un contatto d'ordine n con una terza curva, esse hanno tra loro in quel punto un contatto di ordine n almeno (proprietà *transitiva* del contatto).

La nozione di contatto di ordine n (almeno) di due curve è dunque riflessiva, simmetrica e transitiva e pertanto è una relazione di equivalenza.

Si osservi che affinchè le curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ abbiano un contatto in O (del 1° ordine almeno) è necessario e sufficiente che abbiano in O la stessa tangente. Si dice allora che le due curve sono *tangenti* in O oppure che si *toccano* in O. Quando le due curve hanno in O un contatto del 2° ordine si dice anche che si *osculano* in O. Il punto O in cui due curve hanno un contatto d'ordine n $(n \geq 1)$ si dice poi *punto di contatto* delle due curve.

233. — ALCUNE PROPRIETÀ DEL CONTATTO.

Si ha:

Due curve (del piano euclideo) aventi in un punto O *(semplice per entrambe) un contatto d'ordine* n, *si attraversano in* O *se* n *è pari, non si attraversano se* n *è dispari.*

Si ha pure:

Se due curve (del piano proiettivo) hanno in un punto O *(semplice per entrambe) un contatto d'ordine* n, *delle intersezioni delle due curve,* n + 1 *cadono in O (e inversamente).*

(1) Un numero x_0 si chiama *zero s-uplo* di una funzione $f(x)$, continua in x_0, quando per $x \to x_0$ la $f(x)$ è infinitesima d'ordine s rispetto a $x - x_0$ (ed è nulla in x_0 per la supposta continuità). Si dice pure in questo caso che x_0 è *radice s-upla* per l'equazione $f(x) = 0$.

Supposta la $f(x)$ derivabile in un intorno di x_0 (compreso x_0), fino allo ordine s, si dimostra che: condizione necessaria e sufficiente affinchè x_0 sia radice s-upla per un'equazione $f(x) = 0$, è che x_0 sia anche radice delle equazioni

$$f'(x) = 0, f''(x) = 0, \dots, f^{(s-1)}(x) = 0,$$

ma non della $f^{(s)}(x) = 0$.

Una radice s-upla di un'equazione si può pensare poi come limite di s radici semplici distinte dell'equazione che sono venute a coincidere.

234. — Condizioni per il contatto.

Condizione necessaria e sufficiente perchè (nel piano proiettivo) la curva di equazioni parametriche $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ *abbia con la curva di equazione* $f(x, y) = 0$ *un contatto di ordine* n *nel punto* P *(semplice per entrambe) relativo al valore* u_0 *del parametro, è che la funzione di* u *ottenuta sostituendo nella* $f(x, y)$ *al posto di* x, y *rispettivamente le funzioni* $\varphi(u)$, $\psi(u)$ *e le sue prime* n *derivate si annullino per* $u = u_0$ *(mentre la derivata successiva è* $\neq 0$ *per* $u = u_0$*).*

Infatti i punti comuni alla curva $f(x, y) = 0$ e alla curva $x = \varphi(u)$, $y = \psi(u)$ sono dati da quei valori di u che verificano l'equazione

$$F(u) = f[\varphi(u), \psi(u)] = 0 . \tag{13}$$

Ora condizione necessaria e sufficiente affinchè le due curve abbiano in P un contatto di ordine n è che (n. 233) u_0 sia radice $(n+1)$-upla per la (13). E perchè ciò avvenga è appunto necessario e sufficiente che u_0 annulli la $F(u)$ e le sue prime n derivate (ma non la derivata successiva).

Dal teorema precedente, segue in particolare:

Condizione necessaria e sufficiente perchè (nel piano proiettivo) la curva $\mathcal{C}$ *di equazione* $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{x})$ *abbia con la curva di equazione* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$ *un contatto di ordine* n *nel punto* P *(semplice per entrambe) di coordinata* x_0*, è che la funzione di* x *ottenuta sostituendo nella* $\mathrm{f}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$ *al posto di* y *la funzione* $\varphi(\mathrm{x})$ *e le sue prime* n *derivate si annullino per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$ *(mentre la derivata successiva è* $\neq 0$ *per* $\mathrm{x} = \mathrm{x}_0$*).*

Infatti la $\mathcal{C}$ ha le equazioni parametriche $x = u$, $y = \varphi(u)$ e quindi si ricade nel caso precedente [1].

Consideriamo nello spazio ordinario (proiettivo, affine o euclideo: nn. 10, 11, 29, 31, 119, 132) due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ passanti per uno stesso punto

O che sia semplice per entrambe [1]. Si effettui una trasformazione di coordinate per cui la nuova origine delle coordinate (non omogenee) x, y, z sia il punto O, nessuna delle tangenti in O alle due curve appartenendo al piano $y\,z$. Siano

$$(16) \qquad \begin{aligned} y &= f_1(x) \\ z &= \varphi_1(x) \end{aligned}$$

le equazioni della curva $\mathcal{C}_1$ $[f_1(0) = \varphi_1(0) = 0]$ e

$$(17) \qquad \begin{aligned} y &= f_2(x) \\ z &= \varphi_2(x) \end{aligned}$$

quelle della curva $\mathcal{C}_2$ $[f_2(0) = \varphi_2(0) = 0]$; si supporrà che le funzioni (ad un sol valore) $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi_2(x)$ possiedano in O le derivate di tutti gli ordini che interessa considerare.

---

[1] Un punto P di una curva sghemba $\mathcal{C}$ si dice *semplice* quando, condotto per P un piano generico α, cade in P una sola delle intersezioni di α con $\mathcal{C}$ (n. 247).

Sviluppando le funzioni $f_1(x)$, $\varphi_1(x)$ in serie di potenze, nell'intorno di O, si ha

$$
(18)\qquad
\begin{aligned}
y &= a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots \\
z &= b_1 x + b_2 x^2 + \ldots + b_n x^n + b_{n+1} x^{n+1} + \ldots
\end{aligned}
$$

dove le a, b sono costanti (reali); e analogamente sviluppando le funzioni $f_2(x)$, $\varphi_2(x)$ in serie di potenze, nell'intorno di O, si ha

$$
(19)\qquad
\begin{aligned}
y &= c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + c_{n+1} x^{n+1} + \ldots \\
z &= d_1 x + d_2 x^2 + \ldots + d_n x^n + d_{n+1} x^{n+1} + \ldots
\end{aligned}
$$

dove le c, d sono costanti (reali).

Ciò posto, si può anche qui introdurre la nozione di contatto.

Si dirà che le due curve $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ *di equazioni* (16), (17) *hanno nel punto comune* O (0, 0, 0) (*semplice per entrambe*) *un contatto di ordine* n, *o* n + 1-*punto, quando si ha*

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
&f_1(0) = f_2(0)\,,\ f_1'(0) = f_2'(0)\,,\ f_1''(0) = f_2''(0)\,, \ldots, f_1^{(n)}(0) = f_2^{(n)}(0)\,, \\
&\varphi_1(0) = \varphi_2(0)\,,\ \varphi_1'(0) = \varphi_2'(0)\,,\ \varphi_1''(0) = \varphi_2''(0)\,, \ldots, \varphi_1^{(n)}(0) = \varphi_2^{(n)}(0)\,,
\end{aligned}
$$

e vale una almeno delle due disuguaglianze

$$
(21)\qquad f_1^{(n+1)}(0) \neq f_2^{(n+1)}(0)\,, \qquad \varphi_1^{(n+1)}(0) \neq \varphi_2^{(n+1)}(0)\,.
$$

Per le (18), (19), le condizioni (20), (21) si scrivono

$$
(22) \qquad \begin{aligned} a_i &= c_i , \\ b_i &= d_i \end{aligned} \qquad (i = 1 , 2 , \ldots , n)
$$

e vale una almeno delle due disuguaglianze

$$
(23) \qquad a_{n+1} \neq c_{n+1} , \qquad b_{n+1} \neq d_{n+1} .
$$

Segue che per le curve dello spazio, come per quelle piane (n. 230), la nozione di contatto gode della proprietà simmetrica e transitiva.

La nozione di contatto di ordine n (almeno) di due curve dello spazio è dunque riflessiva, simmetrica e transitiva e pertanto è una relazione di equivalenza.

237. — Contatto tra due superficie.

Consideriamo nello spazio ordinario (proiettivo, affine, euclideo), due superficie Σ_1, Σ_2 passanti per uno stesso punto O che sia semplice per entrambe (n. 163). Si effettui una trasformazione di coordinate per cui la nuova origine delle coordinate (non omogenee) x, y, z sia il punto O e l'asse z non sia in O tàngente ad alcuna delle due superficie (n. 163). Siano

$$z = f(x, y), \quad z = \varphi(x, y) \qquad [f(0, 0) = \varphi(0, 0) = 0] \tag{24}$$

le equazioni di Σ_1, Σ_2; supporremo che le funzioni (ad un sol valore) $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ possiedano in O le derivate di tutti gli ordini che interessa considerare.

Sviluppando le funzioni $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ in serie, nell'intorno di O, si ha

$$\begin{aligned} z &= a_{10} x + a_{01} y + a_{20} x^2 + 2a_{11} xy + a_{02} y^2 + \dots + a_{ik} x^i y^k + \dots \\ z &= b_{10} x + b_{01} y + b_{20} x^2 + 2b_{11} xy + b_{02} y^2 + \dots + b_{ik} x^i y^k + \dots \end{aligned} \tag{25}$$

dove le a, b sono costanti reali.

Ciò posto, si può, come per le curve, introdurre la nozione di contatto.

Si dirà che le due superficie Σ_1, Σ_2 *hanno nel punto comune* O *(semplice per entrambe) un contatto di ordine* n *quando in* O *coincidono, oltre ai valori di* f (x, y), φ (x, y), *anche quelli delle loro successive derivate omonime fino a quelle di ordine* n, *mentre non coincidono tutti quelli delle derivate omonime d'ordine* n + 1.

Le condizioni per il contatto d'ordine n in O per le due superficie (24), sono dunque $f(0,0) = \varphi(0,0)$, $f'_x(0,0) = \varphi'_x(0,0)$, $f'_y(0,0) = \varphi'_y(0,0)$, $f''_{xx}(0,0) = \varphi''_{xx}(0,0)$, $f''_{xy}(0,0) = \varphi''_{xy}(0,0)$, $f''_{yy}(0,0) = \varphi''_{yy}(0,0)$, ... e così di seguito fino alle derivate omonime d'ordine n; fra le derivate omonime d'ordine $n+1$ due almeno acquistano in O valori diversi.

Per le (30), le condizioni si scrivono $a_{10} = b_{10}$, $a_{01} = b_{01}$, $a_{20} = b_{20}$, $a_{11} = b_{11}$, $a_{02} = b_{02}$, ... e così di seguito fino ai coefficienti dei termini simili di grado n; dei coefficienti dei termini simili di grado $n+1$ due almeno sono diversi.

Anche per le superficie la nozione di contatto gode della proprietà simmetrica e transitiva (nn. 230, 236). La nozione di contatto di ordine n (almeno) di due superficie è dunque riflessiva, simmetrica e transitiva e pertanto è una relazione di equivalenza.

Si osservi che affinchè le superficie Σ_1, Σ_2 abbiano un contatto in O (del 1^0 ordine almeno) è necessario e sufficiente che abbiano in O lo stesso piano tangente (n. 163). Si dice allora che le due superficie sono *tangenti* in O oppure che si *toccano* in O. Quando le due superficie hanno in O un contatto del 2^0 ordine si dice anche che si *osculano* in O. Il punto O in cui due superficie hanno un contatto di ordine n $(n \geq 1)$ si dice poi *punto di contatto* delle due superficie.

Si dimostra che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie Σ_1 *di equazioni parametriche* $x = f(u, v)$, $y = \varphi(u, v)$, $z = \psi(u, v)$ *abbia con la superficie* Σ_2 *di equazione* $F(x, y, z) = 0$ *un contatto di ordine* n *nel punto* P *(semplice per entrambe) relativo ai valori* u_0, v_0 *dei parametri, è che la funzione di* u, v, *ottenuta sostituendo nella* $F(x, y, z)$ *al posto di* x, y, z *rispettivamente le funzioni* $f(u, v)$, $\varphi(u, v)$, $\psi(u, v)$ *e le sue derivate fino a quelle di ordine* n *si annullino per* $u = u_0$, $v = v_0$ *(mentre fra le derivate d'ordine* $n + 1$ *ve n'è almeno una che per* $u = u_0$, $v = v_0$ *è* $\neq 0$).

Segue in particolare:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie Σ_1 *di equazione* $z = \psi(x, y)$ *abbia con la superficie* Σ_2 *di equazione* $F(x, y, z) = 0$ *un contatto di ordine* n *nel punto* P *(semplice per entrambe) di coordinate* x_0 *e* y_0, *è che la funzione di* x, y, *ottenuta sostituendo nella* $F(x, y, z)$ *al posto di* z *la funzione* $\psi(x, y)$, *e le sue derivate fino a quelle di ordine* n, *si annullino per* $x = x_0$, $y = y_0$ *(mentre fra le derivate di ordine* $n + 1$ *ve n'è almeno una che per* $x = x_0$, $y = y_0$ *è* $\neq 0$).

Infatti la Σ_1 ha le equazioni parametriche $x = u$, $y = v$, $z = \psi(u, v)$ e quindi si ricade nel caso precedente [1].

238. — Contatti tra curve e superficie.

Consideriamo nello spazio ordinario (proiettivo, affine, euclideo) una superficie Σ e una curva $\mathcal{C}$ passanti per uno stesso punto O che sia semplice per entrambe. Si può introdurre la nozione di contatto tra curva e superficie nel modo seguente:

Si dirà che la superficie Σ *e la curva* $\mathcal{C}$ *hanno nel punto comune* O *(semplice per entrambe) un contatto di ordine* n *quando esistono curve di* Σ *aventi in* O *con* $\mathcal{C}$ *un contatto di ordine* n (n. 236).

Dopo quanto si è detto nel n. 236, appare manifesto che anche questa nozione di contatto ha carattere proiettivo.

Si dimostra che:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie Σ *di equazione* $F(x, y, z) = 0$ *abbia con la curva* $\mathcal{C}$ *di equazioni parametriche* $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$ *un contatto di ordine* n *nel punto* P *(semplice per entrambe) relativo al valore* u_0 *del parametro, è che la funzione di* u, *ottenuta sostituendo nella* $F(x, y, z)$ *al posto di* x, y, z *rispettivamente le funzioni* $f(u)$, $\varphi(u)$, $\psi(u)$, *e le sue derivate fino a quella di ordine* n *si annullino per* $u = u_0$ *(mentre la derivata successiva per* $u = u_0$ *è* $\neq 0$).

Segue in particolare:

Condizione necessaria e sufficiente perchè la superficie Σ *di equazione* $F(x, y, z) = 0$ *abbia con la curva* $\mathcal{C}$ *di equazioni* $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ *un contatto di ordine* n *nel punto* P *(semplice per entrambe) di coordinata* x_0, *è che la funzione di* x, *ottenuta sostituendo nella* $F(x, y, z)$ *al posto di* y, z *rispettivamente le funzioni* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, *e le sue derivate fino a quella di ordine* n *si annullino per* $x = x_0$ *(mentre la derivata successiva per* $x = x_0$ *è* $\neq 0$).

Infatti la $\mathcal{C}$ ha le equazioni parametriche $x = u$, $y = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$ e quindi si ricade nel caso precedente.

Si osservi che affinchè la curva $\mathcal{C}$ e la superficie Σ abbiano un contatto in P (del 1° ordine almeno) è necessario e sufficiente che la retta tangente in P a $\mathcal{C}$ appartenga al piano tangente in P a Σ (cioè che tale retta sia anche tangente in P a Σ) (n. 163). Si dice allora che la curva $\mathcal{C}$ e la superficie Σ sono *tangenti* in P oppure che si *toccano* in P. Quando $\mathcal{C}$ e Σ hanno in P un contatto del 2° ordine si dice anche che si *osculano* in P. Il punto P in cui $\mathcal{C}$ e Σ hanno un contatto di ordine n $(n \geq 1)$ si dice poi *punto di contatto* di $\mathcal{C}$ e Σ.

Si noti che:

Affinchè una curva $\mathcal{C}_1$ *abbia un contatto di ordine* n *in un punto* P *con una curva* $\mathcal{C}_2$ *intersezione di due superficie* Σ, Σ_0 (1), *è necessario e sufficiente che* $\mathcal{C}$ *abbia in* P *un contatto di ordine* n *con ciascuna delle superficie* Σ, Σ_0.

Segue che se la curva $\mathcal{C}_1$ ha le equazioni parametriche $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$ e la curva $\mathcal{C}_2$ ha le equazioni (n. 155)

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\Phi(x, y, z) = 0$$

si è in grado, per quanto si è visto sopra, di scrivere le condizioni per il contatto d'ordine n delle due curve in un punto P relativo al valore u_0 del parametro: sono quelle che si ottengono imponendo che la curva $\mathcal{C}_1$ ha un contatto d'ordine n in P con ciascuna delle superficie $F(x, y, z) = 0$ e $\Phi(x, y, z) = 0$.

Analogamente al n. 233, si dimostra che:

Nello spazio euclideo, una curva avente un contatto di ordine n *con una superficie in un punto* P *(semplice per entrambe) attraversa in* P *la superficie se* n *è pari, non la attraversa se* n *è dispari.*

Analogamente al n. 233, si ha:

Se una curva e una superficie (dello spazio proiettivo) hanno in un punto O *(semplice per entrambe) un contatto d'ordine* n, *delle intersezioni della curva con la superficie,* n + 1 *cadono in* O *(e inversamente).*

239. — PUNTI SINGOLARI.

La nozione di contatto di due curve in un loro punto semplice (n. 230) dà modo di precisare l'andamento di una curva nelle vicinanze di un suo punto mediante il confronto di essa con curve più semplici.

Del resto questo confronto fra curva e retta in un punto è quello che dà luogo alla nozione di tangente. Infatti:

La tangente ad una curva $\mathcal{C}$ *in un punto semplice* P *è la retta che ha in* P *con* $\mathcal{C}$ *un contatto di* 1^0 *ordine* (*almeno*).

Se la tangente alla curva $\mathcal{C}$ nel punto semplice P ha esattamente contatto del primo ordine con $\mathcal{C}$ in P, questo punto dicesi *ordinario* (o *regolare*) per $\mathcal{C}$.

Un punto di una curva non ordinario dicesi *singolare*.

I punti multipli (nn. 98, 111) sono quindi punti singolari.

Per una curva algebrica $\mathcal{C}$, l'esistenza di punti multipli costituisce una particolarità in quanto richiede il verificarsi di certe condizioni (n. 98). Si può quindi dire che: *la curva generica di ordine* n, *per ogni valore di* n, *non ha punti multipli.*

Per una curva trascendente di equazione $f(x, y) = 0$ si possono avere anche altri *punti singolari*, quelli per cui manca qualcuna delle ipotesi di continuità e di derivabilità fatte sulla $f(x, y)$.

240. — Punti di flesso.

Nel piano proiettivo, un punto semplice P di una curva piana $\mathcal{C}$ dicesi *flesso* o *punto d'inflessione* quando la tangente in P a $\mathcal{C}$ ha in P con $\mathcal{C}$ un contatto del 2^0 ordine (almeno).

La tangente a $\mathcal{C}$ in un punto di flesso si dice *tangente d'inflessione*. Se la tangente a $\mathcal{C}$ in P ha esattamente contatto del 2^0 ordine, il flesso dicesi *ordinario*.

Nel piano euclideo, dal n. 233 segue che in un flesso ordinario la tangente attraversa la curva (si veda n. 109).

Per le definizioni poste (n. 239), un flesso è un punto semplice ma singolare.

Nel piano proiettivo, si ha:

I flessi della curva $\mathcal{C}$ *di equazioni parametriche* $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$ *sono i punti relativi a quei valori del parametro che sono radici dell'equazione*

$$f'(u)\,\varphi''(u) - f''(u)\,\varphi'(u) = 0 \tag{1}$$

e per i quali valga almeno una delle disuguaglianze $f'(u) \neq 0$, $\varphi'(u) \neq 0$.

Se l'equazione di $\mathcal{C}$ è $y = \varphi(x)$ (sicchè $x = u$), si ha $f' = 1$, $f'' = 0$, e quindi i flessi di $\mathcal{C}$ hanno per coordinate x i valori che verificano l'equazione

$$\varphi''(x) = 0 .$$

Segue subito:

Se tutti i punti di una curva sono flessi, la curva è un segmento di retta.

Se in coordinate omogenee, la curva è rappresentata dalle equazioni parametriche $x_0 = f_0(u)$, $x_1 = f_1(u)$, $x_2 = f_2(u)$, si chiama *punto derivato* r-*simo*, relativo al punto P corrispondente al valore $\overline{u}$ del parametro, il punto di coordinate $\dfrac{d^r f_i}{d u^r}$ calcolate per $u = \overline{u}$, supposte queste derivate esistenti, finite e non tutte nulle $(i = 0, 1, 2)$ (1).

Ciò posto, un punto semplice è di flesso se appartiene alla retta determinata dai punti derivati primo e secondo. Ossia se

$$\begin{vmatrix} f_0(u) & f_1(u) & f_2(u) \\ f_0'(u) & f_1'(u) & f_2'(u) \\ f_0''(u) & f_1''(u) & f_2''(u) \end{vmatrix} = 0 .$$

Posto $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_0 = 1$, $f_1 = f$, $f_2 = \varphi$, $f_0 = 1$, questa coincide infatti con la (1) e vale almeno una delle disuguaglianze $f' \neq 0$, $\varphi' \neq 0$ essendo il punto semplice.

241. — Cerchio osculatore ~~e parabola di curvatura~~

Nel piano euclideo, si dice *cerchio osculatore* a una curva $\mathfrak{C}$ in un punto (proprio) semplice ordinario P di essa, la circonferenza che ha in P con $\mathfrak{C}$ un contatto del 2^0 ordine (almeno).

La curva $\mathfrak{C}$ abbia le equazioni parametriche $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, e al punto $P(x_0, y_0)$ spetti il valore u_0 del parametro.

Una circonferenza ha un'equazione del tipo

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2 . \tag{5}$$

Affinchè la circonferenza (5) osculi in P la $\mathfrak{C}$, posto

$$F(u) = [f(u) - \alpha]^2 + [\varphi(u) - \beta]^2 - R^2 ,$$

dovranno essere soddisfatte (n. 234) le tre condizioni

$$F(u_0) = 0\,, \qquad F'(u_0) = 0\,, \qquad F''(u_0) = 0\,,$$

cioè

$$(6) \qquad \begin{cases} (x_0 - \alpha)^2 + (y_0 - \beta)^2 = R^2\,, \\ (x_0 - \alpha) f' + (y_0 - \beta)\,\varphi' = 0\,, \\ (x_0 - \alpha) f'' + (y_0 - \beta)\,\varphi'' + f'^2 + \varphi'^2 = 0\,, \end{cases}$$

nelle quali le derivate f', φ', f'', φ'' vanno calcolate per $u = u_0$.

Le (6) determinano le coordinate α, β del centro del cerchio osculatore e il suo raggio R. Dalle ultime due si ha infatti

$$(7) \qquad \alpha = x_0 - \frac{f'^2 + \varphi'^2}{f'\,\varphi'' - f''\,\varphi'}\,\varphi', \qquad \beta = y_0 + \frac{f'^2 + \varphi'^2}{f'\,\varphi'' - f''\,\varphi'}\,f',$$

e sostituendo nella prima

$$(8) \qquad R = \frac{(f'^2 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{f'\,\varphi'' - f''\,\varphi'}$$ [1].

Si noti che le (7), (8) perdono significato quando (e solo quando) $f'\,\varphi'' - f''\,\varphi' = 0$, cioè (n. 240) per i punti di flesso.

---

[1] Siccome si assume $R > 0$, nella (8) il segno del radicale deve prendersi coincidente con quello di $f'\,\varphi'' - f''\,\varphi'$.

In un punto di flesso R è infinito, e il cerchio osculatore si spezza nella tangente d'inflessione e nella retta impropria del piano.

Si osservi che siccome il cerchio osculatore e la curva data hanno la medesima tangente in P, *il centro del cerchio osculatore giace sopra la normale in* P *alla curva* (n. 98).

Se l'equazione di $\mathcal{C}$ è $y = \varphi(x)$, per le coordinate α, β del centro e per il raggio R del cerchio osculatore nel punto $P(x_0, y_0)$ si ha

$$(9) \qquad \alpha = x_0 - \frac{1 + \varphi'^2}{\varphi''}\,\varphi', \quad \beta = y_0 + \frac{1 + \varphi'^2}{\varphi''}, \quad R = \frac{(1 + \varphi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi''},$$

dove le derivate φ', φ'' vanno calcolate per $x = x_0$.

242. — CURVATURA.

Nel piano euclideo, data una curva $\mathcal{C}$, *si chiama curvatura di* $\mathcal{C}$ *in un suo punto* P *il numero* $k \geq 0$ *inverso del raggio del cerchio osculatore a* $\mathcal{C}$ *in* P.

Il cerchio osculatore si chiama talvolta *cerchio di curvatura*, il suo centro, *centro di curvatura*, il suo raggio, *raggio di curvatura*.

Se la curva è rappresentata dall'equazione (10), la curvatura nella origine è $2\,|\,a_2\,|$.

In un punto di flesso la curvatura è nulla ($a_2 = 0$).

Alla curvatura di $\mathcal{C}$ in P si perviene anche nel modo seguente. Fissiamo sopra la curva $\mathcal{C}$ il verso positivo (1) e consideriamo su di essa due punti P e P'. Si chiama *curvatura dell'arco* PP' l'angolo delle semirette positive (di origini P, P') appartenenti alle tangenti in P e P' (2); *curvatura media* dell'arco il rapporto di questo angolo alla lunghezza dell'arco.

Orbene si ha:

La curvatura k *di* $\mathcal{C}$ *nel punto* P *è il limite al quale tende la curvatura media quando* P′ *tende a* P.

243. — Punti multipli.

Sia $\mathcal{C}$ una curva del piano proiettivo, la quale in un sistema di coordinate proiettive (non omogenee) x, y abbia l'equazione

$$f(x, y) = 0,$$

dove $f(x, y)$ è una funzione di x, y finita e continua insieme con tutte le sue derivate parziali che occorrerà considerare.

Se in un punto P di $\mathcal{C}$ una almeno delle derivate prime è $\neq 0$, P è punto semplice della curva (n. 98).

Se invece nel punto P si ha contemporaneamente

$$f(x, y) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

P si dice *punto multiplo* della curva (n. 98). I punti multipli di $\mathcal{C}$ hanno quindi per coordinate le eventuali soluzioni x, y del sistema (12).

Il sistema (12), essendo costituito da tre equazioni in due incognite, in generale non ammette soluzioni e quindi, in generale, una curva non ha punti multipli (n. 239).

Una retta generica r passante per P incontra la curva $\mathcal{C}$ in un certo gruppo di punti tra i quali vi è il punto P contato una o più volte. Orbene: quando cade in P una sola delle intersezioni di r con $\mathcal{C}$, P è punto semplice di $\mathcal{C}$.

Se invece $s > 1$ delle intersezioni di r con $\mathcal{C}$ sono riunite in P, si dice che P ha la *multiplicità* s per $\mathcal{C}$ oppure che è *punto multiplo secondo* s di $\mathcal{C}$ (brevemente che è *punto* s^{uplo}) (n. 111) [1].

Si ha:

Affinchè un punto P *abbia multiplicità* s *per la curva di equazione* $f(x, y) = 0$ *è necessario e sufficiente che le sue coordinate annullino la funzione* $f(x, y)$ *e tutte le sue derivate fino a quelle di ordine* $s - 1$, *ma non tutte quelle di ordine* s.

Una retta è tangente alla curva $\mathcal{C}$ *nel punto multiplo* s$^{\text{uplo}}$ P *quando, fra le intersezioni della retta con* $\mathcal{C}$, s + 1 *almeno cadono in* P (n. 111) (1).

Affinchè, nell'intorno di P, $s+1$ intersezioni (almeno) della retta $y - y_0 = k(x - x_0)$ con la curva $\mathcal{C}$ cadano in P dovrà nella (14) essere nullo anche il coefficiente di $(x - x_0)^s$. Dovrà cioè k soddisfare all'equazione di grado s

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + k\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^s f(x_0\,,\; y_0) = 0\,. \tag{15}$$

Si conclude : *esistono* s *rette tangenti (reali o no, distinte o coincidenti) nel punto* s$^{\text{uplo}}$ P $(x_0\,,\; y_0)$ *alla curva* $\mathcal{C}$ (n. 111).

Queste tangenti hanno l'equazione

$$y - y_0 = k\,(x - x_0)\,,$$

dove k è radice dell'equazione (15), cioè dell'equazione

$$(16) \qquad \frac{\partial^s f}{\partial x^s} + \binom{s}{1} \frac{\partial^s f}{\partial x^{s-1}\, \partial y}\, k + \binom{s}{2} \frac{\partial^s f}{\partial x^{s-2}\, \partial y^2}\, k^2 + \ldots + \frac{\partial^s f}{\partial y^s}\, k^s = 0\,,$$

le derivate essendo calcolate per $x = x_0$, $y = y_0$.

Quando la curva è algebrica, effettuando una trasformazione di coordinate per cui la nuova origine delle coordinate sia il punto P, si ha:

Quando l'equazione di una curva algebrica d'ordine n, *ordinata per gruppi omogenei di gradi crescenti, è della forma*

$$u_s\,(x\,,\,y) + u_{s+1}\,(x\,,\,y) + \ldots + u_n\,(x\,,\,y) = 0\,,$$

dove u_s, u_{s+1}, ..., u_n *sono polinomi omogenei in* x, y, *di gradi* s, s + 1, ..., n, *cosicchè il gruppo di grado più basso sia quello di grado* s, *la curva ha nell'origine un punto* $\mathrm{s}^{\mathrm{uplo}}$, *e le sue tangenti (reali o no, distinte o no) hanno complessivamente l'equazione* $\mathrm{u}_s\,(\mathrm{x}\,,\,\mathrm{y}) = 0$ (1).

Supponiamo che un punto sia doppio per la curva $\mathcal{C}$ di equazione $f(x, y) = 0$; le sue coordinate annulleranno quindi $f(x, y)$ e le sue derivate $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, ma non tutte e tre le derivate seconde (n. 243). Si effettui una trasformazione di coordinate per cui la nuova origine O delle coordinate sia il punto doppio.

Sviluppando la $f(x, y)$ in serie nell'intorno di O, si ha

$$f(x, y) = \varphi_2(x, y) + \varphi_3(x, y) + \dots, \tag{17}$$

dove

$\varphi_2 = a_{20} x^2 + 2 a_{11} x y + a_{02} y^2$, $\varphi_3 = a_{30} x^3 + 3 a_{21} x^2 y + 3 a_{12} x y^2 + a_{03} y^3$,

le a essendo costanti.

L'equazione (16) in k le cui radici determinano le tangenti in O a $\mathcal{C}$, nel caso attuale, diviene

$$a_{02} k^2 + 2 k a_{11} + a_{20} = 0. \tag{18}$$

Questa ammette due radici reali distinte, complesse coniugate, reali coincidenti secondo che il discriminante

$$\Delta = a_{11}^2 - a_{02} a_{20}$$

è rispettivamente positivo, negativo o nullo.

Quando $\Delta > 0$ le due tangenti in O a $\mathcal{C}$ sono reali e distinte e O chiamasi nodo; quando $\Delta < 0$ le due tangenti in O a $\mathcal{C}$ sono immaginarie coniugate (n. 243) e O chiamasi punto doppio isolato; quando infine $\Delta = 0$ le due tangenti in O a $\mathcal{C}$ coincidono, O chiamasi cuspide e la tangente in O si chiama tangente cuspidale (n. 111).

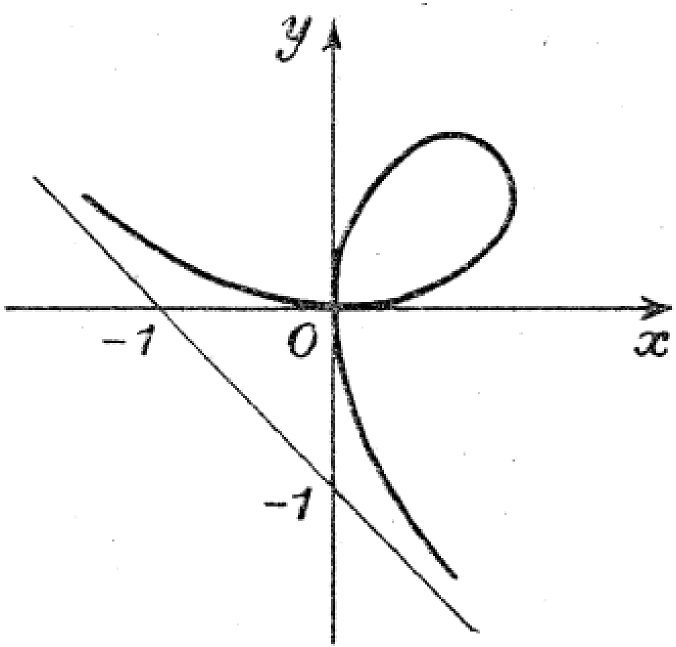

Fig. 72.

Ad esempio, per la curva (*Folium di Cartesio*) (fig. 72)

$$x^3 + y^3 - 3\,x\,y = 0\,,$$

l'origine O è un nodo e le tangenti in O sono gli assi coordinati. Nella fig. 72 è anche disegnato l'asintoto (reale) della curva (n. 245).

Ad esempio, la concoide di Nicomede (n. 116)

$$\left(x^2 + y^2\right)(x - k)^2 - d^2\,x^2 = 0$$

(d, k costanti) per $d < k$ ha nell'origine un punto doppio isolato.

245. — ASINTOTI.

Nel piano euclideo, una curva $\mathcal{C}$ abbia le equazioni parametriche

$$x = f(u), \qquad y = \varphi(u).$$

La curva $\mathcal{C}$ per $u \to u_0 \pm$ ha un punto all'infinito (o improprio) quando uno almeno dei quattro limiti

$$\lim_{u \to u_0 -} f(u), \qquad \lim_{u \to u_0 +} f(u), \qquad \lim_{u \to u_0 -} \varphi(u), \qquad \lim_{u \to u_0 +} \varphi(u)$$

è infinito e determinato di segno, ossia quando su $\mathcal{C}$ uno almeno degli intervalli in cui varia l'ascissa e l'ordinata è infinito.

La curva $\mathcal{C}$ abbia per $u \to u_0 \pm$ un punto all'infinito. Orbene (nn. 98, 110):

Una retta r *(reale) si dice che è un asintoto della curva* $\mathcal{C}$ *nel punto all'infinito corrispondente al valore* u_0 *del parametro* u, *quando il limite della distanza del punto* P *di* $\mathcal{C}$, *corrispondente al valore* u *del parametro, dalla retta* r, *per* $\mathrm{u} \to \mathrm{u}_0 \pm$ *è uguale a zero.*

Nel piano affine una curva $\mathcal{C}$ abbia (in coordinate omogenee) le equazioni parametriche $x_1 = f_1(u)$, $x_2 = f_2(u)$, $x_3 = f_3(u)$; i punti all'infinito di $\mathcal{C}$ sono allora dati dai valori di u radici dell'equazione $f_3(u) = 0$. Se u_0 è una di queste radici e se il punto corrispondente di $\mathcal{C}$ è semplice, l'asintoto relativo è la tangente in tale punto la cui equazione si trova pertanto nel modo noto (n. 98) (1).

Se la curva $\mathcal{C}$ è algebrica ed è rappresentata dall'equazione $f(x_1, x_2, x_3) = 0$, f essendo un polinomio omogeneo di grado n in x_1, x_2, x_3, ordinando la f secondo le potenze decrescenti di x_3, si ottiene

$$v_0 x_3^n + v_1 x_3^{n-1} + \ldots + v_{n-1} x_3 + v_n = 0 , \tag{20}$$

dove v_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ è un polinomio omogeneo in x_1, x_2 di grado i.

I punti impropri della curva sono dati dalle

$$x_3 = 0 , \quad v_n = 0 .$$

Passando a coordinate non omogenee x, y $\left(x = \dfrac{x_1}{x_3}\ ,\ y = \dfrac{x_2}{x_3}\right)$, ordinando il primo membro dell'equazione della curva per gruppi omogenei di gradi decrescenti, la (20) si scrive

$$v_n(x, y) + v_{n-1}(x, y) + \ldots + v_1(x, y) + v_0 = 0 . \tag{21}$$

E si ha:

Quando l'equazione di una curva algebrica $\mathcal{C}$ è scritta nella forma (21), *l'equazione* $\mathrm{v}_n(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = 0$, *ottenuta uguagliando a zero il gruppo omogeneo di grado più elevato, è quella del gruppo di rette uscenti dall'origine e passanti per i punti impropri di $\mathcal{C}$, cioè del gruppo di rette che escono dall'origine e sono parallele agli asintoti di $\mathcal{C}$.*

246. — Curva inviluppo di un sistema.

Nel piano proiettivo, si consideri un sistema (o famiglia) ∞^1 di curve di equazione (in coordinate non omogenee x, y) (n. 94)

$$F(x, y; u) = 0, \tag{22}$$

contenente, oltre le coordinate x, y, anche un parametro u variabile in un certo intervallo. Per ogni valore di u appartenente all'intervallo considerato, la (22) dà una curva $\mathcal{C}_u$ del sistema.

Si supporrà che per tutti i valori di u appartenenti all'intervallo di variabilità, e per tutti i punti (x, y) di una certa regione del piano, la funzione $F(x, y; u)$ sia continua con le sue derivate parziali rispetto a x, y, u.

Una curva Γ si dice che è la *curva inviluppo* delle curve $\mathcal{C}_u$ del sistema (22), quando ogni curva del sistema è tangente in un suo punto (almeno) a Γ (n. 230), e quando, inversamente, la curva Γ è in ognuno dei suoi punti tangenti ad una curva del sistema. Si dice pure che le curve del sistema (22) sono *inviluppate* dalla curva Γ.

Ricerchiamo quando il sistema (22) ammette una curva inviluppo, e, in caso affermativo, quale procedimento si può seguire per determinarne l'equazione.

Si ha:

Se esiste la curva inviluppo Γ della famiglia (22), *le coordinate* x, y *di un suo punto generico, assieme ad un conveniente valore di* u, *soddisfano il sistema*

$$F(x, y; u) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y; u)}{\partial u} = 0. \tag{23}$$

La curva di equazioni parametriche generalizzate (23), *ossia la curva* R (x, y) = 0, *essendo* R (x, y) = 0 *il risultato dell'eliminazione del parametro* u *tra le* (23), *può comprendere, oltre alla curva inviluppo delle curve del sistema* (22), *la curva luogo dei punti multipli delle curve stesse e le curve stazionarie.*

Il luogo dei punti singolari, se esiste, può in casi speciali far parte della curva inviluppo [1].

Aggiungiamo infine che, nel piano euclideo, la curva inviluppo del sistema delle rette normali a una data curva $\mathfrak{C}$, quando esiste, è un'altra curva $\mathfrak{F}$ che si dice l'*evoluta* (o la *sviluppata*) di $\mathfrak{C}$. Inversamente $\mathfrak{C}$ si dice una *evolvente* (o una *sviluppante*) di $\mathfrak{F}$.

Siccome il centro del cerchio osculatore (centro di curvatura) a $\mathfrak{C}$ in un punto Q è il punto caratteristico sulla normale a $\mathfrak{C}$ in Q (1), da quanto si è sopra dimostrato, segue che:

L'evoluta di una curva è l'insieme dei centri di curvatura della curva stessa (2).

247. — PUNTI SINGOLARI.

Nello spazio proiettivo ordinario, consideriamo una curva sghemba $\mathcal{C}$ e sia P un punto di essa. Un piano *generico* α passante per P incontra la $\mathcal{C}$ in un certo gruppo di punti tra i quali vi è il punto P contato una o più volte.

Quando cade in P una sola delle intersezioni di α con $\mathcal{C}$, si dice che P è *punto semplice* di $\mathcal{C}$ (n. 236); se invece s ($s > 1$) delle intersezioni di α con $\mathcal{C}$ sono riunite in P, si dice che P ha la *multiplicità* s *per* $\mathcal{C}$ oppure che è *punto multiplo secondo* s di $\mathcal{C}$ (brevemente che è *punto* s^{uplo}). In particolare se $s = 2$ il punto dicesi *doppio*, se $s = 3$ *triplo*, ecc.

Se P è punto semplice di $\mathcal{C}$, la tangente in P a $\mathcal{C}$ è la retta avente in P con $\mathcal{C}$ un contatto del 1^0 ordine (almeno) (n. 236). Per un punto semplice P passano infiniti piani particolari aventi riunite in P due delle loro intersezioni con $\mathcal{C}$: si chiamano *piani tangenti* a $\mathcal{C}$ in P. E questi piani formano un fascio il cui asse è appunto la retta tangente in P a $\mathcal{C}$.

Quando la tangente in P a $\mathcal{C}$ ha in P con $\mathcal{C}$ esattamente un contatto del 1^0 ordine, il punto P dicesi semplice *ordinario* (o *regolare*). Un punto di una curva sghemba che non sia ordinario dicesi *singolare*. I punti multipli sono dunque punti singolari.

248. — PIANO OSCULATORE.

Nello spazio proiettivo ordinario, si dice *piano osculatore* a una curva sghemba $\mathcal{C}$ in un punto semplice ordinario P di essa, il piano che ha in P con $\mathcal{C}$ un contatto del 2^0 ordine (almeno) (n. 238).

Si supponga che la cura $\mathcal{C}$ abbia le quazioni (1) e che al punto P (x_0, y_0, z_0) spetti il valore u_0 del parametro.

Affinchè un piano

$$ax + by + cz + d = 0 \tag{3}$$

osculi in P la $\mathcal{C}$, posto

$$F(u) = a f(u) + b \varphi(u) + c \psi(u) + d,$$

dovranno essere soddisfatte (n. 238) le tre condizioni

$$F(u_0) = 0, \quad F'(u_0) = 0, \quad F''(u_0) = 0,$$

cioè

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
a f(u_0) + b \varphi(u_0) + c \psi(u_0) + d &= 0 \\
a f'(u_0) + b \varphi'(u_0) + c \psi'(u_0) &= 0 \\
a f''(u_0) + b \varphi''(u_0) + c \psi''(u_0) &= 0 \, .
\end{aligned}
$$

Sottraendo dalla (3) la prima delle (4), si ottiene

$$a[x - f(u_0)] + b[y - \varphi(u_0)] + c[z - \psi(u_0)] = 0 \, .$$

Da questa e dalle ultime due delle (4), essendo a, b, c non tutti nulli, segue

$$
(5) \qquad \begin{vmatrix}
x - f(u_0) & y - \varphi(u_0) & z - \psi(u_0) \\
f'(u_0) & \varphi'(u_0) & \psi'(u_0) \\
f''(u_0) & \varphi''(u_0) & \psi''(u_0)
\end{vmatrix} = 0 \, .
$$

E questa è l'equazione cercata del piano osculatore.

Nell'ipotesi considerata che il punto semplice P di $\mathcal{C}$ sia ordinario, il piano osculatore (5) non è indeterminato (n. 249).

In generale il piano osculatore a $\mathcal{C}$ in P ha esattamente contatto del 2^0 ordine in P con $\mathcal{C}$. Può però avvenire che tale piano abbia contatto del 3^0 ordine (almeno) e in tal caso dicesi *piano stazionario.*

Ciò avviene quando si ha, oltre alle (4), la

$$a f'''(u_0) + b\,\varphi'''(u_0) + c\,\psi'''(u_0) = 0\,.$$

Da questa e dalle ultime due delle (4), essendo a, b, c non tutti nulli, segue:

Data una curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche $\mathrm{x} = \mathrm{f}(\mathrm{u})$, $\mathrm{y} = \varphi(\mathrm{u})$, $\mathrm{z} = \psi(\mathrm{u})$, *affinchè nel punto* P *relativo al valore* u_0 *del parametro, il piano osculatore sia stazionario è necessario e sufficiente che sia*

$$\begin{vmatrix} f'(u_0) & \varphi'(u_0) & \psi'(u_0) \\ f''(u_0) & \varphi''(u_0) & \psi''(u_0) \\ f'''(u_0) & \varphi'''(u_0) & \psi'''(u_0) \end{vmatrix} = 0\,, \tag{6}$$

supposti non tutti nulli i minori del 2^0 ordine estratti dalla matrice formata dalle prime due orizzontali (n. 249).

Se una curva è piana si può ancora parlare di piano osculatore, soltanto che il piano ad essa osculatore in un suo punto generico è lo stesso piano della curva.

E si dimostra che : *una curva di cui tutti i piani osculatori sono stazionari è una curva piana.*

Dal n. 238 segue :

Nello spazio euclideo, una curva $\mathcal{C}$ attraversa in un suo punto semplice ordinario P *il suo piano osculatore in* P *(non stazionario), mentre non attraversa in* P *alcuno dei suoi piani tangenti in* P *(diversi dal piano osculatore in* P*). Se il piano osculatore è stazionario (ed ha esattamente in* P *con $\mathcal{C}$ contatto del 3° ordine), la $\mathcal{C}$ non attraversa in* P *tale piano.*

249. — Punti di flesso.

Nello spazio ordinario proiettivo, un punto semplice P di una curva sghemba $\mathcal{C}$ dicesi *flesso* (o *punto d'inflessione*) quando la tangente in P a $\mathcal{C}$ ha in P con $\mathcal{C}$ un contatto del 2^0 ordine (almeno).

La tangente a $\mathcal{C}$ in un punto di flesso si dice *tangente d'inflessione*. Se la tangente a $\mathcal{C}$ in P ha esattamente contatto del 2^0 ordine, il flesso dicesi *ordinario*.

In un punto di flesso P di una curva $\mathcal{C}$, tutti i piani passanti per la tangente d'inflessione hanno contatto del 2^0 ordine (almeno) con $\mathcal{C}$ (n. 238), sicchè il piano osculatore (n. 248) è indeterminato (e inversamente).

Segue :

I flessi della curva $\mathcal{C}$ *di equazioni parametriche* $x = f(u)$, $y = \varphi(u)$, $z = \psi(u)$ *sono i punti relativi a quei valori* u_0 *del parametro per cui*

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} f'(u_0) & \varphi'(u_0) & \psi'(u_0) \\ f''(u_0) & \varphi''(u_0) & \psi''(u_0) \end{vmatrix} = 0$$

rango<2

e per i quali valga almeno una delle disuguaglianze $f'(u_0) \neq 0$, $\varphi'(u_0) \neq 0$, $\psi'(u_0) \neq 0$.

Infatti affinchè in un punto P semplice di $\mathcal{C}$, relativo al valore u_0 del parametro, il piano osculatore (5) sia indeterminato è necessario e sufficiente che u_0 verifichi le condizioni (8). Si noti che, essendo il punto P semplice per $\mathcal{C}$, vale almeno una delle disuguaglianze $f'(u_0) \neq 0$, $\varphi'(u_0) \neq 0$, $\psi'(u_0) \neq 0$ (n. 247) [1].

Si ha pure (come per una curva piana: n. 240) che un punto semplice P di una curva sghemba $\mathcal{C}$ è di flesso se appartiene alla retta determinata dai due punti derivati primo e secondo e allora il piano osculatore è appunto indeterminato (n. 248). Pertanto se, in coordinate omogenee, la curva $\mathcal{C}$ ha le equazioni parametriche $x_i = f_i(u)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$, si ha:

Affinchè un punto P *di parametro* u_0 *sia un flesso di* $\mathcal{C}$ *è necessario e sufficiente che sia* (n. 33)

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} f_1(u_0) & f_2(u_0) & f_3(u_0) & f_4(u_0) \\ f_1'(u_0) & f_2'(u_0) & f_3'(u_0) & f_4'(u_0) \\ f_1''(u_0) & f_2''(u_0) & f_3''(u_0) & f_4''(u_0) \end{vmatrix} = 0,$$

supposti non tutti nulli i minori del 2° *ordine estratti dalla matrice formata dalle prime due orizzontali* (1).

Se la curva $\mathcal{C}$ ha le equazioni $y = \varphi(x)$, $z = \psi(x)$ (sicchè $x = u$), si ha $f' = 1$, $f'' = 0$, e quindi i flessi di $\mathcal{C}$ hanno per coordinata x i valori che soddisfano alle equazioni

$$\varphi''(x) = 0, \quad \psi''(x) = 0.$$

Segue subito, come nel n. 240:

Se tutti i punti di una curva sono flessi, la curva è un segmento di retta.

250. — Triedro principale.

Nello spazio (ordinario) euclideo, si abbia una curva sghemba $\mathcal{C}$ e si consideri un suo punto semplice ordinario (proprio) O. Le rette passanti per O e perpendicolari alla tangente t in O a $\mathcal{C}$, appartengono al piano normale alla curva in O (n. 162) e si chiamano *normali* alla curva in O.

Dicesi *normale principale* alla curva $\mathcal{C}$ in O la normale che giace nel piano osculatore a $\mathcal{C}$ in O (cioè la retta intersezione del piano normale col piano osculatore), mentre dicesi *binormale* a $\mathcal{C}$ in O la (normale a $\mathcal{C}$) perpendicolare al piano osculatore. Si chiama poi *piano rettificante* a $\mathcal{C}$ in O il piano determinato dalla tangente e dalla binormale.

In un punto semplice ordinario (proprio) O della curva $\mathcal{C}$, la tangente, la normale principale e la binormale sono gli spigoli di un triedro trirettangolo, del quale le facce rispettivamente opposte sono il piano normale, il piano rettificante e il piano osculatore. Questo triedro si chiama *triedro principale* della curva $\mathcal{C}$ nel punto O.

252. — CERCHIO OSCULATORE.

Si dice *cerchio osculatore* ad una curva sghemba $\mathcal{C}$ in un punto (proprio) semplice ordinario P di essa, la circonferenza Γ che ha in P con $\mathcal{C}$ un contatto del 2^0 ordine (almeno).

Il piano di Γ ha un contatto del 2^0 ordine in P con $\mathcal{C}$ (n. 238) ed è quindi il piano osculatore α in P a $\mathcal{C}$ (n. 248). Una sfera passante per Γ ha anch'essa un contatto del 2^0 ordine in P con $\mathcal{C}$ (n. 238); e inversamente una sfera Σ avente un contatto del 2^0 ordine in P con $\mathcal{C}$ contiene Γ. Infatti Σ contiene la circonferenza Γ_0 in cui è segata da α e le due circonferenze Γ, Γ_0 coincidono in quanto hanno in P un contatto del 2^0 ordine. Le sfere osculatrici in P a $\mathcal{C}$ formano dunque un fascio di cui Γ è il cerchio base (n. 229).

Il cerchio osculatore Γ si può quindi considerare come l'intersezione di una sfera osculatrice Σ (in P a $\mathcal{C}$) col piano osculatore α (in P a $\mathcal{C}$).

253. — FLESSIONE.

Nello spazio euclideo, si chiama *flessione* o *prima curvatura* di *una curva* $\mathcal{C}$ *in un suo punto semplice ordinario* (*proprio*) P *l'inverso del raggio del cerchio osculatore a* $\mathcal{C}$ *in* P (n. 252).

La definizione di flessione ora data si fonda sulla nozione di contatto. Alla flessione di $\mathcal{C}$ si perviene anche nel modo seguente che implica però la nozione di lunghezza di un arco di curva.

Fissiamo sopra la curva $\mathcal{C}$ il verso positivo [2] e consideriamo su di essa due punti (semplici) P e P'. Come per le curve piane (n. 242), si chiama *curvatura dell'arco* PP' l'angolo delle semirette positive (di origine P, P') appartenenti alle tangenti in P e P' [3]; *curvatura media dell'arco* PP' il rapporto di questo angolo alla lunghezza dell'arco.

Orbene si ha:

La flessione di $\mathcal{C}$ *nel punto* P *è il limite al quale tende la curvatura media quando* P′ *tende a* P.

Si osservi che la *flessione è nulla nei soli punti di flesso*

54. — ELICA CIRCOLARE.

Consideriamo l'elica circolare (n. 172). Le equazioni parametriche lell'elica sono

$$x = r \cos u\,, \quad y = r \operatorname{sen} u\,, \quad z = h\,u\,, \tag{17}$$

love r, h sono costanti reali (²).

Il numero $|r|$ è il raggio dell'elica (cioè il raggio del cilindro circolare 'etto su cui l'elica giace) mentre $2|h|\pi$ è il passo dell'elica (cioè la distanza li due intersezioni consecutive dell'elica con una generatrice del cilinlro) e $|h|$ si chiama anche *passo ridotto* dell'elica.

Per la flessione dell'elica (17) si ha per la (16)

$$\frac{1}{R} = \frac{|r|}{r^2 + h^2}. \tag{18}$$

Dunque:

Nell'elica circolare (17) *la flessione è costante al variare del punto sulla curva e vale* $\dfrac{|r|}{r^2 + h^2}$.

256. - TORSIONE.

Sulla data curva sghemba prendiamo due punti P e P', e sia θ l'angolo dei rispettivi piani osculatori, ossia l'angolo delle rispettive binormali (2); sia poi Δs la lunghezza dell'arco PP' di curva. Si chiama *torsione* di quest'arco il numero θ; *torsione media* dell'arco il rapporto $\left|\frac{\theta}{\Delta s}\right|$.

Orbene si ha:

Il valore assoluto della torsione di $\mathcal{C}$ *nel punto* P *è il limite al quale tende la torsione media quanto* P' *tende a* P.

257. — Ancora sul triedro principale.

Assumiamo come parametro u, l'arco s della curva $\mathcal{C}$ contato a partire da un punto fisso (il verso positivo su $\mathcal{C}$ essendo quello secondo cui crescono

gli archi). Le equazioni parametriche della curva saranno $x = f(s)$, $y = \varphi(s)$, $z = \psi(s)$.

Riassumendo, i valori dei coseni direttori degli spigoli del triedro principale sono

$$(35) \qquad \begin{array}{lll} \alpha = f', & \xi = R f'', & \lambda = R(\varphi' \psi'' - \varphi'' \psi'), \\ \beta = \varphi', & \eta = R \varphi'', & \mu = R(\psi' f'' - \psi'' f'), \\ \gamma = \psi', & \chi = R \psi'', & \nu = R(f' \varphi'' - f'' \varphi'). \end{array}$$

258. — Formule di Frenet.

Sono fondamentali nella teoria delle curve sghembe le formule che esprimono le derivate dei nove coseni direttori α, β, γ; ξ, η, χ; λ, μ, ν della tangente, della normale principale, della binormale (n. 257) rispetto all'arco s, per mezzo dei coseni stessi e delle due curvature $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$ (*formule di Frenet*) [2].

(36) $$\alpha' = \frac{\xi}{R}, \quad \beta' = \frac{\eta}{R}, \quad \gamma' = \frac{\chi}{R}.$$

(39) $$\lambda' = \frac{\xi}{T}, \quad \mu' = \frac{\eta}{T}, \quad \nu' = \frac{\chi}{T}.$$

(40) $$\xi' = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\lambda}{T}, \quad \eta' = -\frac{\beta}{R} - \frac{\mu}{T}, \quad \chi' = -\frac{\gamma}{R} - \frac{\nu}{T}.$$

Le (36), (39), (40) sono le *formule di Frenet.*

L'importanza delle formule di Frenet proviene dal fatto che, date le funzioni $R(s)$, $T(s)$, da tali formule si possono ricavare le derivate terze (e quindi le successive) delle coordinate rispetto all'arco, note le condizioni iniziali (un punto, la tangente ivi, il piano osculatore).

259. — Equazioni intrinseche.

Si dimostra il teorema (n. 144):

Nello spazio (ordinario) euclideo, una curva $\mathcal{C}$ è determinata, a meno di movimenti, dalle sue curvature $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$ *in funzione dell'arco* s.

Con altre parole:

Nello spazio (ordinario) euclideo, due curve $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ *aventi flessioni e torsioni uguali nei punti relativi ad archi uguali, si corrispondono in un movimento.*

Le curvature $\frac{1}{R}$, $\frac{1}{T}$ in funzione dell'arco s

$$\frac{1}{R} = F(s), \quad \frac{1}{T} = \Phi(s) \tag{43}$$

$[F(s) > 0]$ determinano dunque, a meno di movimenti, la curva.

Le (43) si dicono perciò *equazioni intrinseche* della curva [1].

SUPERFICIE

260. — Punti singolari.

Il piano tangente ad una superficie Σ in un suo punto semplice P (n. 163) si può anche definire come il piano avente in P con Σ un contatto del 1^0 ordine (almeno) (n. 237). E così le rette tangenti in P a Σ (n. 163) sono le rette aventi in P con Σ un contatto del 1^0 ordine (almeno).

Quando il piano tangente alla superficie Σ nel punto semplice P ha esattamente contatto del primo ordine con Σ in P, questo punto dicesi *ordinario* (o *regolare*) per Σ (1).

Un punto di una superficie non ordinario dicesi *singolare*.

I punti multipli (n. 163) sono quindi punti singolari.

Per una superficie trascendente di equazione $f(x, y, z) = 0$ (n. 158), si possono avere anche altri *punti singolari*, per cui manca qualcuna delle ipotesi di continuità e di derivabilità fatte sulla $f(x, y, z)$. Ma dallo studio di punti siffatti si prescinderà sempre nel seguito.

261. — LE TANGENTI ASINTOTICHE.

Nello spazio proiettivo ordinario, consideriamo una superficie Σ e un suo punto semplice ordinario P. Vediamo se fra le ∞^1 rette tangenti in P a Σ (costituenti un fascio di centro P e appartenente al piano tangente in P a Σ) ne esista qualcuna che abbia con Σ in P un contatto del 2^0 ordine (anzichè del 1^0 ordine).

Si ha:

In un punto semplice ordinario P di una superficie Σ esistono due tangenti aventi in P con Σ contatto del 2^0 ordine (*almeno*).

Orbene, si chiamano *tangenti asintotiche* ad una superficie Σ in un suo punto semplice ordinario P, le due tangenti aventi in P con Σ un contatto del 2^0 ordine (almeno) (1).

Se due superficie hanno un contatto del 1^0 ordine in un punto P (semplice per entrambe), la curva intersezione delle due superficie ha in P un punto doppio.

Dal precedente risultato, segue in particolare:

La curva intersezione di una superficie Σ col piano tangente in un suo punto semplice ordinario P, *ha in* P *punto doppio.*

Infatti il piano tangente a Σ in P ha in P con Σ un contatto del 1^0 ordine e quindi, per il risultato precedente, la curva intersezione ha in P punto doppio.

Orbene:

Le tangenti asintotiche in un punto semplice ordinario P *di una superficie Σ sono le tangenti in* P *alla curva intersezione di Σ col piano tangente in P.*

Infatti la curva intersezione $\mathcal{C}$ di Σ col piano tangente in P ha punto doppio in P e pertanto le tangenti ad essa in P hanno incontro tripunto con $\mathcal{C}$ in P. Tali rette hanno quindi incontro tripunto in P con Σ, cioè hanno un contatto del 2^0 ordine in P con Σ (n. 238), e sono pertanto le tangenti asintotiche.

262. — PUNTI IPERBOLICI, PARABOLICI, ELLITTICI. TANGENTI CONIUGATE.

Un punto semplice ordinario P di una superficie Σ si dirà *iperbolico*, *parabolico* o *ellittico* secondo che le tangenti asintotiche in P sono reali distinte, reali coincidenti o immaginarie coniugate (2), (3).

Nello spazio proiettivo, le uniche superficie i cui punti (*non singolari*) *sono tutti parabolici sono i coni* (n. 166) *e le superficie insieme delle tangenti ad una curva sghemba.*

Nello spazio affine (o euclideo) si hanno cioè coni e cilindri, cioè a vertice proprio o improprio (nn. 166, 165).

Le superficie a punti parabolici sono dunque rigate (n. 170) e si chiamano superficie *sviluppabili* per una ragione che apparirà nel n. 276.

Sopra una superficie esistono, in generale, regioni di punti iperbolici e regioni di punti ellittici separate le une dalle altre da curve paraboliche (1).

---

(1) Per le quadriche i punti sono invece tutti iperbolici, o tutti parabolici, o tutti ellittici (n. 208). Per le quadriche a punti iperbolici o ellittici manca quindi la curva parabolica.

264. - Punti multipli.

Le proprietà relative ai punti multipli di una superficie (n. 163) sono, per lo più, una facile estensione di quelle analoghe sui punti multipli delle curve piane (n. 243). Le esporremo perciò brevemente.

Sia Σ una superficie di equazione

$$f(x, y, z) = 0 .$$

Se in un punto P di Σ una almeno delle derivate prime di f è $\neq 0$, P è punto semplice di Σ (n. 163). Se invece in P si ha contemporaneamente

$$f(x, y, z) = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 0 . \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0 , \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0 , \tag{18}$$

P si dice punto multiplo di Σ (n. 163). Gli eventuali punti multipli di Σ hanno quindi per coordinate le (eventuali) soluzioni x, y, z del sistema (18).

Una retta generica r passante per P incontra Σ in un certo gruppo di punti tra i quali vi è il punto P contato una o più volte. Se in P cade una sola delle intersezioni di r con Σ, P è punto semplice di Σ; se invece $s > 1$ delle intersezioni di r con Σ sono riunite in P, si dice che P ha la *multiplicità* s per Σ oppure che è *punto multiplo secondo* s di Σ (brevemente che è punto s^{uplo}) (2).

Analogamente al n. 243, si dimostra che:

Affinchè un punto P *abbia multiplicità* s *per la superficie* $f(x, y, z) = 0$ *è necessario e sufficiente che le sue coordinate annullino la funzione* $f(x, y, z)$ *e tutte le sue derivate fino a quelle di ordine* $s - 1$, *ma non tutte quelle di ordine* s.

Un punto di multiplicità 2 si dice anche *doppio*, di multiplicità 3 si dice anche *triplo*, ...

Si dirà che :

Una retta è tangente alla superficie Σ *nel punto multiplo* s^{uplo} P *quando, fra le intersezioni della retta con* Σ, $s + 1$ *almeno cadono in* P.

Analogamente al n. 243, si dimostra che :

Le tangenti alla superficie $f(x, y, z) = 0$ *nel punto multiplo* s^{uplo} $P(x_0, y_0, z_0)$ *formano un cono algebrico d'ordine* s *di equazione*

$$\left[(x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y} + (z - z_0)\frac{\partial}{\partial z}\right]^s f(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

dove la potenza è simbolica.

Il cono suddetto dicesi *cono tangente in P* a Σ (1).

Se la superficie è algebrica, effettuando una trasformazione di coordinate per cui la nuova origine delle coordinate sia il punto P, dai precedenti risultati segue :

Quando l'equazione di una superficie algebrica Σ *d'ordine* n, *ordinata per gruppi omogenei di gradi crescenti, è della forma*

$$u_s(x, y, z) + u_{s+1}(x, y, z) + \ldots + u_n(x, y, z) = 0,$$

dove $u_s, u_{s+1}, \ldots, u_n$ *sono polinomi omogenei in* x, y, z *di gradi* $s, s+1, \ldots, n$, *cosicchè il gruppo di grado più basso sia quello di grado* s, Σ *ha nell'origine* O *un punto* s^{uplo}, *il cono tangente in* O *a* Σ *ha l'equazione* $u_s = 0$ *e le rette che incontrano* Σ *in* O *almeno* $s+2$ *volte sono rappresentate dal sistema di equazioni* $u_s = 0$, $u_{s+1} = 0$.

263. - Curve asintotiche.

Si chiama *curva asintotica* di una superficie Σ una curva $\mathcal{C}$ di Σ tale che in ogni suo punto (semplice sia per Σ che per $\mathcal{C}$) la tangente a $\mathcal{C}$ sia una delle due tangenti asintotiche di Σ uscenti da quel punto[1].

In una regione di Σ i cui punti siano iperbolici, le curve asintotiche formano un *reticolato* (reale) e si possono distribuire in due sistemi tali che per ogni punto della regione passa una sola curva di ciascun sistema. In una regione a punti ellittici le curve asintotiche sono immaginarie.

Le curve asintotiche godono della seguente proprietà caratteristica:

In ogni punto di una curva asintotica $\mathcal{C}$ di una superficie Σ (semplice sia per Σ che per $\mathcal{C}$), il piano osculatore a $\mathcal{C}$ coincide col piano tangente a Σ (e inversamente).

268. — TANGENTI PRINCIPALI. OMBELICHI.

Si consideri l'involuzione delle tangenti coniugate della superficie Σ in un suo punto semplice ordinario (non parabolico) P (n. 262) e si supponga, per il momento, che essa non sia l'involuzione circolare (n. 78).

Pertanto in tale involuzione esisterà (n. 198) una coppia di rette (reali) corrispondenti e ortogonali. Orbene, tali tangenti si chiamano *tangenti principali o tangenti di curvatura* di Σ in P. In altri termini, le tangenti principali sono le due tangenti coniugate (n. 262) e ortogonali uscenti da P. Manifestamente:

Le tangenti principali sono le bisettrici degli angoli formati dalle tangenti asintotiche (n. 198).

270. - Flessione delle curve di una superficie. Teorema di Meusnier.

Per arrivare al concetto di *curvatura* di una superficie Σ in un suo punto semplice ordinario P è spontaneo considerare le infinite curve di Σ passanti per P e studiare la legge secondo cui varia la flessione in P di queste curve [2].

La flessione della curva $\mathcal{C}$ in P *uguaglia la curvatura in* P *della curva ottenuta segando Σ con il piano osculatore in P a $\mathcal{C}$* [1].

Lo studio della flessione delle curve tracciate sopra una superficie si riduce quindi a quello della curvatura delle curve sezioni piane di essa.

Si chiamano *sezioni normali* della superficie Σ in P le curve intersezioni di Σ con piani passanti per la normale in P a Σ (*piani normali*); si chiamano invece *sezioni oblique* in P le curve intersezioni di Σ con piani per P non passanti per la normale.

Conviene ora attribuire un segno ai raggi di curvatura delle sezioni normali. Siccome i centri di curvatura C_0 delle sezioni normali appartengono alla normale n in P a Σ e possono trovarsi dall'una o dall'altra parte di P, noi assumeremo il raggio di curvatura $P\,C_0 = R_0$ positivo o negativo secondo che il segmento $P\,C_0$ (della normale n) è positivo o negativo.

Orbene, dal teorema che segue, apparirà che lo studio della curvatura delle curve sezioni piane di Σ si riconduce a quello delle sezioni normali.

Sussiste infatti il teorema di MEUSNIER [1]:

Il centro di curvatura in P *di una sezione obliqua* $\mathcal{C}$ *della superficie* Σ *è la proiezione ortogonale sul piano di* $\mathcal{C}$ *del centro di curvatura (in* P*) della sezione normale (in* P*) avente in* P *la stessa tangente.*

Escluderemo, fino ad avviso contrario, che il punto P sia punto parabolico.

Fra gli infiniti piani passanti per la normale n in P a Σ, consideriamo quelli passanti per le tangenti principali (in P) (n. 268). Questi due piani α_1, α_2 si chiamano *piani principali* di Σ in P.

Le sezioni con Σ dei piani α_1, α_2 si chiamano *sezioni principali* di Σ in P; i raggi di curvatura R_1, R_2 in P delle sezioni principali determinate rispettivamente da α_1, α_2 si chiamano *raggi principali di curvatura* di Σ in P.

Ciò posto, indicando con θ l'angolo di un piano α passante per la normale n e del piano principale α_2, sussiste la *formula di Eulero*

$$\frac{1}{R} = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{R_1} + \frac{\cos^2\theta}{R_2}, \tag{46}$$

R essendo il raggio di curvatura (in P) relativo alla sezione normale $\mathcal{C}$ determinata da α.

Dal teorema di MEUSNIER e dalla formula di EULERO appare che il modo d'*incurvamento* di una superficie Σ in un punto P dipende dai valori dei due raggi principali R_1, R_2 in P; e inversamente, dati questi due valori, ossia quelli delle due curvature $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ delle sezioni principali, si conosce come la superficie è *incurvata*.

Manifestamente, invece di assegnare $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, si possono assegnare due loro combinazioni indipendenti dalle quali i valori di $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$ vengano individuati. Le più spontanee e importanti di tali combinazioni sono il prodotto e la somma (o semisomma) delle due curvature $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$.

Porremo

$$K = \frac{1}{R_1 R_2}, \; H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

La prima K si chiama *curvatura totale* della superficie in P ed ha grande importanza nella geometria differenziale intrinseca delle superficie (n. 276); la seconda H si chiama *curvatura media* della superficie in P e si presenta particolarmente nelle applicazioni della fisica matematica [1].

La curvatura totale per la sua preponderante importanza si chiama talvolta semplicemente *curvatura* della superficie in P; la sua considerazione è dovuta a GAUSS [2].

La formula di Eulero fa dipendere il raggio di curvatura di una sezione normale qualunque, dai due raggi principali di curvatura R_1, R_2 e dall'angolo che il piano della sezione fa col piano di una sezione principale. Ma ora possiamo aggiungere la proprietà fondamentale:

Le sezioni principali della superficie Σ *in* P *sono le sezioni normali di massima e di minima curvatura* (*in* P).

La proprietà precedente caratterizza le sezioni principali e può pertanto servire anche a definirle [1].

Abbiamo escluso fin qui che il punto P di Σ sia parabolico (n. 262). In questo caso, sia t_a la tangente asintotica in P e sia t_p la tangente ad essa perpendicolare in P; le t_a, t_p sono le tangenti principali di Σ in P (n. 268).

Le sezioni normali relative ai piani passanti per le t_a, t_p, si diranno ancora *principali* (e *principali* si diranno anche i piani di queste sezioni).

Si ha:

In un punto parabolico la curvatura di una sezione principale è nulla e inversamente.

276. — Linee di curvatura.

Una curva tracciata sopra una superficie Σ si dice *linea di curvatura* quando nel suo punto generico la tangente alla curva coincide con una delle due tangenti principali (n. 268) di Σ uscenti da quel punto.

Nel piano, che è l'unica superficie i cui punti sono tutti flessi (n. 261) e nei quali pertanto le tangenti asintotiche (e quindi le principali) sono indeterminate, le linee di curvatura sono indeterminate. E così sulla sfera, che è l'unica superficie i cui punti sono tutti ombelichi (n. 268) e nei quali pertanto le tangenti principali sono indeterminate, le linee di curvatura sono pure indeterminate.

Per un punto generico di una superficie Σ, diversa dal piano e dalla sfera, passano dunque due linee di curvatura perpendicolari tra loro. Le ∞^1 linee di curvatura di una superficie Σ sono sempre reali [1] e costituiscono un sistema doppio ortogonale.

Le linee di curvatura di una superficie di rotazione (n. 171) *sono i meridiani e i paralleli.* Infatti in ogni punto della superficie, la tangente al meridiano è tangente principale per la simmetria ortogonale della superficie rispetto al piano del meridiano (n. 219), e la tangente al parallelo è pure principale perchè perpendicolare a una tangente principale. Si osservi che è poi verificata manifestamente la precedente proprietà caratteristica delle linee di curvatura, in quanto il luogo delle normali alla superficie nei punti di un meridiano è un piano e nei punti di un parallelo è un cono [1].

277. — Curve geodetiche di una superficie.

Si chiamano *curve geodetiche* di una superficie Σ le curve che segnano i cammini di lunghezza minima fra due punti della superficie, abbastanza vicini (2).

Per ogni punto P *della superficie* Σ *e per ogni tangente* t *in* P *a* Σ, *esiste una curva geodetica di* Σ *passante per* P *e tangente ivi a* t.

Le curve geodetiche di Σ sono dunque ∞^2.

Dimostriamo ora che le curve geodetiche godono della seguente proprietà caratteristica:

Le geodetiche sono le curve di una superficie per le quali, nel loro punto generico, il piano osculatore è ortogonale al piano tangente ivi a Σ (2).