$(A, +, \cdot)$ anello unitario:

$\exists$ elemento neutro per $\cdot$

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$

$(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

$(M_n, +, \cdot)$ anello unitario

Quali matrici sono invertibili?

$$A = (a^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n} \in M_n(\mathbb{K})$$

$\{1, 2, \ldots, n\}$

$$\det A = |A| := \sum_{p \in \mathcal{S}_n} \operatorname{sign}(p)\, a^1_{p(1)} \cdots a^n_{p(n)}$$

gruppo delle permutazioni su n elementi

$$\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \end{pmatrix}$$

$$|A| = + a^1_1 a^2_2 - a^1_2 a^2_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc} a^1_1 & a^1_2 & a^1_3 \\ a^2_1 & a^2_2 & a^2_3 \\ a^3_1 & a^3_2 & a^3_3 \end{array}\right) \begin{array}{cc} a^1_1 & a^1_2 \\ a^2_1 & a^2_2 \\ a^3_1 & a^3_2 \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$|A| = + a^1_1 a^2_2 a^3_3 + a^1_2 a^2_3 a^3_1 + a^1_3 a^2_1 a^3_2$$
$$- a^1_3 a^2_2 a^3_1 - a^1_1 a^2_3 a^3_2 - a^1_2 a^2_1 a^3_3$$

Trasformazione di riga T_1 scambioz

righe

Trasf. T_2 ad una riga sommo una comb. lin. di ALTRE righe

PROP - Se B è ottenuta da A con una trasf T_1, allora $|B| = -|A|$

PROP - Se B è ottenuta da A con una trasf T_2 allora $|B| = |A|$

PROP – Se A è triangolare, allora $|A| = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$

PROP – Data una qualunque A, ci sono successioni di trasformazioni di riga T_1 e T_2 che la trasformano in una matrice triangolare

Il seguente teorema

TEOR $\det {}^tA = \det A$

garantisce che tutto quello che ho detto sulle righe vale anche per le colonne

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| \underset{I \leftrightarrow II}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} \underset{III \leftarrow III - 3I}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -10 \end{vmatrix} =$$

$$\underset{III \leftarrow III - II}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -10 \end{vmatrix} = -1(-2)(-10) =$$

$$= -20$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$2 + 3\alpha = 0$$

$$\alpha = -\frac{2}{3}$$

$$= \overline{\overline{III}} \leftarrow III - \frac{2}{3} II \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -\frac{7}{3} \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \left(-\frac{7}{3}\right) = -7$$

Data una matrice A (anche non quadrata) chiamo **sottomatrice** ogni matrice ottenuta interse=cando alcune righe con alcune colonne di A. **Minore** è sinonimo di sottomatrice quadrata.

Data $A \in M_n(K)$, minore M_{ij} complementare dell'elemento a_{ij} è il minore ottenuto cancellando la riga i e la colonna j.

Cofattore o complemento algebrico A_{ij}

dell'elemento a^i_j è il numero

$$A^i_j = (-1)^{i+j} |M^i_j|$$

TEOR di Laplace

Fissato $h \in \mathbb{N}_n$

$$|A| = \sum_{r=1}^{n} a^h_r A^h_r = \sum_{r=1}^{n} a^r_h A^r_h$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a^3_1 A^3_1 + a^3_2 A^3_2 + a^3_3 A^3_3 =$$

$$= 3\,(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + 1\,(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3 \;1\,(-6) + 1\,(-1)\,0 + (-1)\,1\,2 =$$

$$= -18 + 0 - 2 = -20$$

$$\det\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \underset{0}{a^1_1} A^1_1 + a^1_2 A^1_2 + \underset{0}{a^1_3} A^1_3 =$$

$$= a^1_2 A^1_2 =$$

$$= -2 \, (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2 \cdot (-10) = -20$$

$$\text{TEOR} - \exists A^{-1} \Longleftrightarrow |A| \neq 0$$

Calcolo dell'inversa

Data $A = (a^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$, sia

$A^\# = (A^i_j)_{i,j \in \mathbb{N}_n}$. Allora

TEOR — Se $\det A \neq 0$,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \, {}^t(A^\#)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \det A = -20$$

$$A^{\#} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 10 & -2 \\ -2 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = -\frac{1}{20} \begin{pmatrix} -4 & -2 & -6 \\ 10 & 0 & 0 \\ -2 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcolo dell'inversa 2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

T_3 moltiplico una riga per un numero $\neq 0$

$$\downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\downarrow \quad \mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - 3\,\mathrm{I}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 & -2 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \mathrm{III} \leftarrow \mathrm{III} - \mathrm{II}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \mathrm{II} \leftarrow -\frac{1}{2}\,\mathrm{II}$$

$$\mathrm{III} \leftarrow -\frac{1}{10}\,\mathrm{III}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ -1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1/10 & 3/10 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\downarrow \quad \mathrm{I} \leftarrow \mathrm{I} - \mathrm{II} - 3\,\mathrm{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{2}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$= A^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad A^{\#} = \begin{pmatrix} +d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,{}^{t}A^{\#} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$