Spazio affine associato a uno sp. vett. V:

$(V, \mathcal{A}, \tau)$

sp. vett. dei vettori liberi $\vec{\mathcal{A}}$

insieme di punti $\mathcal{A}$

$\tau : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \vec{\mathcal{A}}$

$V \times V \to V$

$(u, v) \mapsto v - u$

$a(u,v)$ si scriverà $\overrightarrow{uv}$
ma è nient'altro che
$v-u$.

Sottospazio affine:
ogni traslato $\mathcal{H}$ di un
sottospazio vettoriale U di
V.

$$\mathcal{H} = \bar{v} + U$$

U viene chiamato
giacitura di $\mathcal{H}$ e $\dim \mathcal{H} =$

cato con $\vec{\mathcal{P}}$. Prendendo due punti qualsiasi di $\mathcal{P}$, il vettore libero corrispondente $\in U$,

$$p_1 = p + u_1 \qquad p_2 = p + u_2$$
$$\in U \qquad\qquad\qquad \in U$$

$$\overrightarrow{p_1 p_2} = p_2 - p_1 = \cancel{p} + u_2 - \cancel{p} - u_1 =$$
$$= u_2 - u_1 \in U$$

Definisco $\dim \mathcal{H} := \dim U$

$\mathcal{B}$ base ordin.

$$\begin{array}{ccc} v & & V \\ \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{B}} \\ (x_1 \ldots x_n) & & \mathbb{K}^n \end{array}$$

$\overline{\mathcal{B}}$ base ord. ortonorm.

$$(V, \langle , \rangle) \xrightarrow{\overline{\mathcal{B}}} (\mathbb{R}^n, \langle , \rangle_{nat})$$

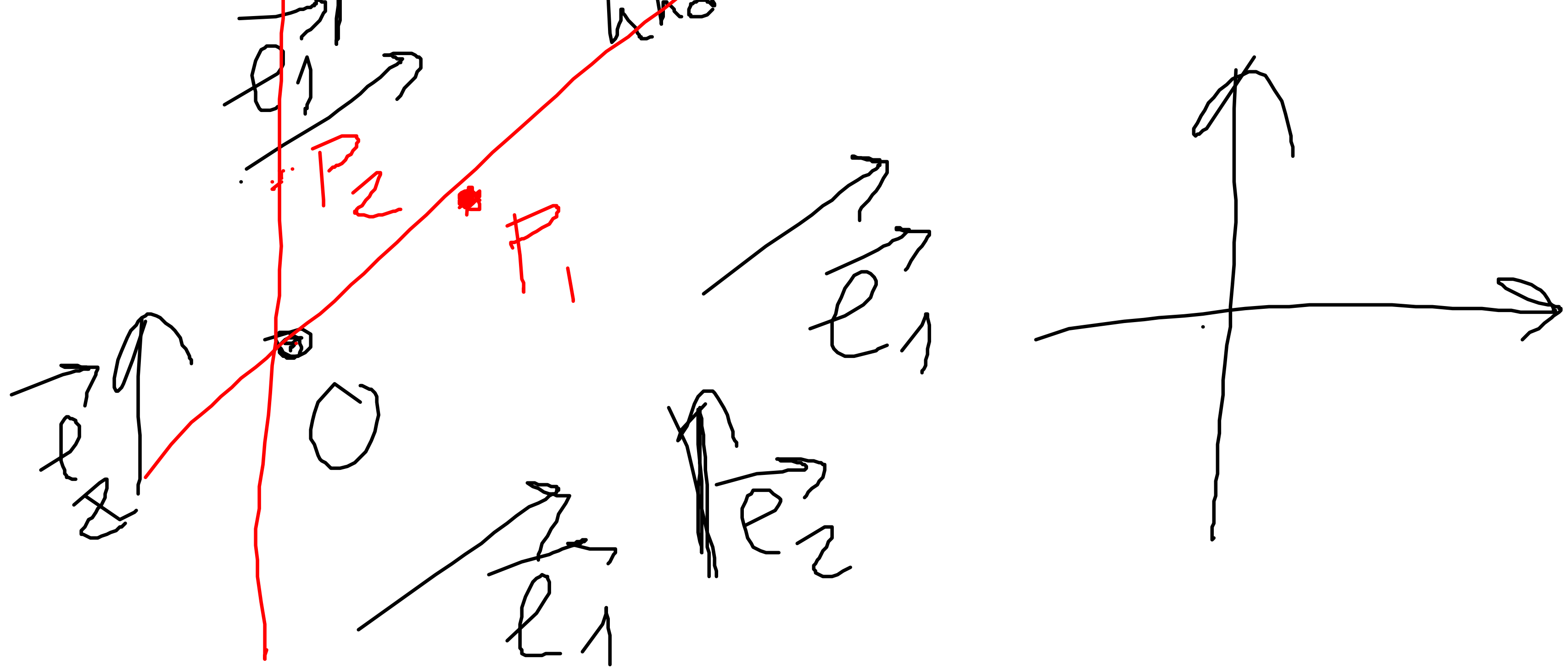
$\mathcal{A}^n$ $\mathcal{R}$ riferimento affine

$$\mathcal{A}^n \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n, \tau)$$

Riferimento affine:

$$\mathcal{R} = (O, \vec{\mathcal{B}})$$

un punto — una base di $\vec{A}$



Dato un punto P, la sua n-pla di coordinate affini rispetto a $\mathcal{R}$ è la n-pla delle componenti di $\overrightarrow{OP}$ rispetto a $\vec{\mathcal{B}}$.

Se, rispetto ad $\mathcal{R}$, ho
$P \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$, $Q \equiv_{\mathcal{R}} (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$
allora $\overrightarrow{PQ} \equiv_{\vec{\mathcal{B}}} (\bar{y}_1 - \bar{x}_1, \dots, \bar{y}_n - \bar{x}_n)$

Anche per i sottospazi affini ho rappresentazioni cartesiana e parametrica. Esse differiscono da quelle dei sottospazi vettoriali per la presenza di termini noti.

In particolare, dato un qualunque sistema S possibile in n incognite, il suo spazi di soluzioni

Sol S è un sottospazio affine di $\mathbb{K}^n$ di dim $= n - r$

dove $r = rA = rC$

Se ho rappresentazioni (cartesiana o parametrica) di un sottospazio affine

$\mathcal{A}$, allora l'analoga rappresentazione del sottospazio vettoriale $\vec{\mathcal{A}}$ si ottiene eliminando i termini noti.

ESEMPI In $\mathcal{A}$ di $\dim = 5$

$$\mathcal{A}' : \begin{cases} x + y - z - t + 3u = 4 \\ 2x + z - 5t - u = 1 \end{cases}$$

$\dim \mathcal{A}' = 5 - 2 = 3$

$$\vec{\mathcal{R}}' : \begin{cases} x + y - z - t + 3u = 0 \\ 2x + z - 5t - u = 0 \end{cases}$$

$$\mathcal{R}'' : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$\vec{\mathcal{R}}''$:

è un punto di $\mathcal{R}''$

I punti $P_0, P_1, \ldots, P_h$ si

dicono affinemente dipendenti se i vettori liberi $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_h}$ sono linearmente dipendenti.

Dati rispetto a un riferimento affine, punti affinemente indipendenti $P_0, P_1, \dots, P_h$, esiste ed è unico il sottospazio affine h-dimensionale $\mathcal{A}'$ che li contiene.

Le rappresentazioni cartesiana e parametrica di $\mathcal{A}'$ si ottengono considerando il generico punto $X \equiv (x_1, \dots, x_n)$ di $\mathcal{A}$ e imponendo a $\overrightarrow{P_0X}$ di appartenere al sottospazio

vettoriale generato da
$\overrightarrow{P_0P_1}, \ldots, \overrightarrow{P_0P_h}$.

ESEMPIO
In A di dim = 5,
rispetto a un riferi=
mento affine, si
scrivano rappr. carte=
siana e parametrica
minime del sottospa=

zio affine A' generato da

$$A \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cancel{D \equiv \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

$$\overrightarrow{AB} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \cancel{\overrightarrow{AD} \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rappresentazione parametrica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}'$

viene da

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-1 \\ t-0 \\ u-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Rappresentazione cartesiana

Impongo

$$r\begin{pmatrix} (x-1) & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \\ (y-0) & \\ (z-1) & \begin{matrix} 1 & 1 \end{matrix} \\ (t-0) & \begin{matrix} -1 & -2 \end{matrix} \\ (u-1) & \begin{matrix} 0 & -1 \end{matrix} \end{pmatrix} = 2$$

$$
\begin{cases}
\begin{vmatrix} (x-1) & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ (z-1) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex]
\begin{vmatrix} (x-1) & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ t & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\[2ex]
\begin{vmatrix} (x-1) & 1 & 0 \\ y & 0 & -1 \\ (u-1) & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
(x-1) - y - (z-1) = 0 \\
-(x-1) + 2y - t = 0 \\
0(x-1) + y - (u-1) = 0
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
x - y - z = 0 \\
-x + 2y - t + 1 = 0 \\
y - u + 1 = 0
\end{cases}
$$

π''