In $\mathcal{A}^3$ i punti hanno coordinate (x, y, z)

I piani (iperpiani di $\mathcal{A}^3$) hanno equazione

$$ax + by + cz + d = 0$$

Sono cose molto diffe-
renti: ogni piano è
determinato dalla quater-
na (a, b, c, d), a meno

di un fattore di proporzionalità, con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$

In $\mathbb{P}^3$ i punti hanno coordinate $(x_0, x_1, x_2, x_3) \neq (0,0,0,0)$, definite a meno di un fattore di proporzionalità.

I piani hanno equazione

ne $a_0X_0+a_1X_1+a_2X_2+a_3X_3=0$

con $(a_0, a_1, a_2, a_3) \neq (0,0,0,0)$,

definita a meno di un fattore di proporzionalità

$(\mathbb{R}^4, \mathbb{P}^*, \vartheta)$, dove

$\mathbb{P}^*$ è l'insieme dei piani

di $\mathbb{P}^3$ e

$\vartheta: \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^*$

$$(a_0, a_1, a_2, a_3) \longmapsto a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 X_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + a_3 X_3 = 0 \\ b_0 X_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\alpha_1 \quad [0,1] \longrightarrow [0,1] \times [0,1]$$

$$0.a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots \longmapsto (0.a_1 a_3 a_5 \cdots, 0.a_2 a_4 a_6 \cdots)$$

In $\mathbb{A}^2$ rispetto a un riferimento affine

$P \equiv (\underset{x}{5}, \underset{y}{3}) \qquad P \equiv (\underset{x_0}{1}, \underset{x_1}{5}, \underset{x_2}{3})$

$\equiv (2, 10, 6)$

$r: x + 3y + 5 = 0$

$$\begin{cases} \cancel{5X_0} + X_1 + 3X_2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

"retta impropria del piano" r_∞

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -3x_2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

il punto rappresentato ha coordinate $(0,-3,1)\cdot\lambda$

(quindi $(0,-3,1)$ o $(0,3,-1)$ o $(0,6,-2)$ eccetera)

chi sono?

Sono coefficienti direttivi di r.

$$r: \begin{cases} bx + cy + a = 0 \\ ex + fy + d = 0 \end{cases} \quad \text{coord affini}$$

$$s:$$

$$\begin{cases} aX_0 + bX_1 + cX_2 = 0 \\ dX_0 + eX_1 + fX_2 = 0 \end{cases} \quad \text{coord proi}$$

$$\begin{cases} x+3y+5=0 \\ x-2y-3=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+3y+5=0 \\ -5y-8=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5+\frac{24}{5}=-\frac{1}{5} \\ y=-\frac{8}{5} \end{cases}$$

rps: $\left(-\frac{1}{5},\ -\frac{8}{5}\right)$

$$\begin{cases} 5X_0+X_1+3X_2=0 \\ -3X_0+X_1-2X_2=0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(x_0, x_1, x_2) \sim \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (-5, 1, 8) \text{ pro}$$

x_0

0

$$\left(-\frac{1}{5}, 1, -\frac{8}{5}\right) \text{ aft}$$

$$r: \left\{ \begin{array}{l} x+3y+5=0 \\ 2x+6y+1=0 \end{array} \right. \quad t:$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 5X_0 + X_1 + 3X_2 = 0 \\ X_0 + 2X_1 + 6X_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$[X_0, X_1, X_2] \sim \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) =$$

$$= (0, -27, 9)$$

$x_0 = 0$ punto improprio

$\sim (0,-3,1) \sim (0,3,-1)$

Quel punto improprio rappresenta la direzione comune alle due rette.