Dato un endomorfismo

$$T: V \longrightarrow V$$

per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ sia

$$U_\lambda = \{ v \in V \mid T(v) = \lambda v \}$$

PROP — $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ U_λ è un sottospazio vettoriale.

Autospazio, un U_λ che

non sia $\{\bar{0}_V\}$. Il corrispondente λ è detto autovalore e i suoi elementi sono detti autovettori di T relativi ad λ.

Sia $A = M_{\mathcal{B}}(T)$ la matrice che rappresenta T risp. a una fissata base ordinata $\mathcal{B}$. Allora

$\forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$U_\lambda : (\lambda I_n - A)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Di conseguenza U_λ è un autospazio di T

$\iff$ il sistema ha soluzioni $\neq$ nulla $\iff |\lambda I_n - A| = 0$

PROP - Dato il polinomio in t $|tI_n - A|$, gli autovalori di T sono tutte e sole le radici di tale polinomio.

Questo polinomio è detto caratteristico.

Dato un autovalore λ, la sua molteplicità algebrica è la molteplicità di λ come radice del polinomio caratteristico, la sua **molteplicità geometrica** è la dimensione di $U_{\bar{\lambda}}$, che risulta uguale a $n - \operatorname{rg}(\bar{\lambda} I_n - A)$.

PROP - $1 \leq mg(\bar{\lambda}) \leq ma(\bar{\lambda})$.

Date matrici $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$, esse si dicono **simili** se $\exists\, E \in GL_n(\mathbb{K})$ tale che

$$A' = E^{-1} \cdot A \cdot E$$

PROP — A, A' sono simili $\iff \exists\, T : V \to V$ lineare, $\exists\, \mathcal{B}, \mathcal{B}'$ basi ordinate di V tali che $A = M_{\mathcal{B}}(T)$, $A' = M_{\mathcal{B}'}(T)$

E è la matrice del cambiamento di base da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$

$A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile per similitudine se esiste una matrice diagonale Λ simile ad A

PROP- A è diagonalizzabile per similitudine $\Longleftrightarrow$ $\sum mg(\lambda) = n$, la somma delle molteplicità geometriche dei suoi autovalori

lori è n.

PROP - Se $A \in M_n(\mathbb{R})$ è simmetrica (cioè ${}^tA = A$) allora è diagonalizzabile per similitudine

---

Forma bilineare su V è un'applicazione $\varphi: V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ t.c. $\forall u, v, w \in V, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$

$$\varphi(u, v+w) = \varphi(u,v) + \varphi(u,w)$$

$$\varphi(u+v, w) = \varphi(u,w) + \varphi(v,w)$$

$$\varphi(\lambda u, v) = \lambda \varphi(u,v) = \varphi(u, \lambda v).$$

PROP – $\varphi : \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$

$$((x_1, \dots x_n), (y_1, \dots y_n)) \mapsto \varphi((x_i), (y_i))$$

è bilineare $\Leftrightarrow$ è polinomiale omogenea di 1° grado nelle x_i e polinomiale omogenea di 1° grado nelle y_i.

Esempi:

$$\varphi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$((x,y,z),(x',y',z')) \longmapsto 3xx' + 5xy' + 7yz'$$

φ è detta simmetrica
se $\forall u, v \in V$ $\varphi(u,v) = \varphi(v,u)$.
