$C: y = x^2 \qquad C': y = -x^3$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha^3 \end{cases}$

$P_\alpha \equiv (\alpha, \alpha^2) \qquad P'_\alpha \equiv (\alpha, -\alpha^3)$

$t_\alpha: y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$

$t'_\alpha: y + \alpha^3 = -3\alpha^2(x - \alpha)$

$y - \alpha^2 = 2\alpha x - 2\alpha^2$

$y + \alpha^3 = -3\alpha^2 x + 3\alpha^3$

$\begin{cases} \alpha^2 - 2x\alpha + y = 0 \\ 2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y = 0 \end{cases}$

$2\alpha^3 - 3x\alpha^2 - y \quad \Big| \; \alpha^2 - 2x\alpha + y$

$ \quad \; x + 2\alpha$

$\alpha(2x^2 - 2y) + y(-x - 1)$

$\alpha^2 - 2x\alpha + y$

$\rightarrow \dfrac{4y^3 + (-3x^2 + 6x + 1)y^2 - 4x^3 y}{4(y - x^2)^2}$

$y(4y^2 - 3x^2 y + 6xy + y - 4x^3) = 0$

Metodo 1 per scoprire se la curva

$$\mathcal{C} : \begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$$

è piana o no.

Considero il generico piano dello spazio:

$$\Pi : \underbrace{ax + by + cz + d}_{F(x,y,z)=} = 0$$

Interseco Π con $\mathcal{C}$:

$$\begin{cases} x = f(u) \\ y = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \\ F(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(u) \stackrel{def}{=} F(f(u), \varphi(u), \psi(u))$$

$\Phi(u) = 0$ fornisce come soluzioni i valori (eventuali) di u per cui il punto

$P_{\bar{k}} = (f(\bar{u}), \varphi(\bar{u}), \psi(\bar{u}))$ (che naturalmente $\in \mathcal{C}$)
appartiene anche a Π.
$\Phi(u) = 0$ fornisce le intersezioni $\mathcal{C} \cap \Pi$.

$\mathcal{C}$ è piana $\iff \exists (a, b, c, d)$ per cui $\Phi(u)$ è identicamente nulla.

Es: $\mathcal{C}: \begin{cases} x = u \\ y = u^2 \\ z = u^3 \end{cases}$

$\Pi: ax + by + cz + d = 0$

$au + bu^2 + cu^3 + d = 0$

identicam. nulla

$\iff$ i coeff. di u^0, u^1, u^2, u^3 sono nulli

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

Ma questo non rappresenta alcun piano

$\Longrightarrow$ C è sghemba

Es 5 b

$$C : \begin{cases} x = u^3 - 6u^2 \\ y = 3u \\ z = u - 1 \end{cases}$$

$$ax + by + cz + d = 0$$

$$a(u^3 - 6u^2) + b(3u) + c(u-1) + d = 0$$

$$au^3 - 6au^2 + (3b + c)u - c + d = 0$$

id. nullo $\Longleftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ -6a = 0 \\ 3b + c = 0 \\ -c + d = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a = 0 \\ a = 0 \\ c = k \\ b = -k/3 \\ d = k \end{cases}$$

$k = 3$

$\Pi : -y + 3z + 3 = 0$

contiene C

C piana

$$C : \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = \cos^2 u + \sin^2 u = 1$$

$$C : x^2 + y^2 = 1$$